MONOFAZE ALTERNATİF AKIM

Alternatif Akım

Bir elektrik akımının, bağlı olduğu bağımsız parametre sayısına, bu akımın **boyutu** denilecektir. Doğru akım bir boyutlu, alternatif akım iki boyutludur. Doğru akımda akım şiddeti, indüktörden gelen gerilim parametresine, yani akım şiddeti, Ohm yasası ile gerilime bağlıdır. Alternatif akım, indüktörden gelen gerilim ve indivüden gelen açısal hız parametrelerine bağlıdır. Bu nedenle doğru akımın gerilim, akım ve direnç kavramları, ssyısal büyüklüklerdir. Alternatif akım ise, iki boyutlu olup bu kavramlar, düzlemsel vektörlerdir veya karmaşık sayılardır. Bu kavramların bir şiddeti veya mutlak değeri, bir doğrultusu veya argümanı ve bir de yönü vardır.

$$U = Z.\dot{I}, \qquad \dot{I} = U/|Z|, \qquad Z = U/\dot{I}$$

Formülleri ile verilen Ohm yasası alternatif akımda da geçerlidir. Alternatif akımda direnç, bobin ve kondansatör gereçleri, önemli bir yer tutarlar. Bu devre elemanları, alternatif akım ve gerilimin vektörel özeliklerini ortaya koyarlar. Telin ohmik direncine **etkin direnç, rezistans** veya **aktif direnç**, bobinin direncine **etkin olmayan direnç, endüktans, endüktif reaktif direnç, endüktif direnç**, **endüktif reaktans,** veya **sanal endüktif direnç**, kondansatörün direncine de, **kapasitans, kapasitif reaktif direnç, kapasitif direnç**, **kapasitif reaktans** veya **sanal kapasitif direnç** denilir. İndüktans ve kapasitans sözcüklerinin her ikisine birden, **reaktans** veya **sanal direnç** denilir. Alternatif akımda devre elemanlarının, birden fazla bulunduğu devrelerin direnç vektörlerine, **karmaşık empedans** veya **karmaşık direnç**, bu vektörün mutlak değerine de, **empedans** denilecektir. Direnç, bobin ve kondansatör devre elemanları olup, çeşitli birleşimleri ile oluşturulan devrelere, Ohm yasası uygulayarak, bilinmeyenlerin çözümünü yapmağa çalışacağız. Ancak vektörler ile bölüm yapılmaz. İkinci ve üçüncü formülün vektörlerle uygulamasını yapamayacağız. Bu nedenle bazan akımı, bazan da gerilimi sayısal, direncin de mutlak değerini alarak, işlemlere bir kısıtlama ile gireceğiz. Düzlemsel vektör olan bu kavramlar, karmaşık sayı ile de gösterilebilirler. Karmaşık sayılar ile, bölme yapılabildiğinden, bu formüllerin her üçünü de, kısıtlama yapmadan kullanabileceğiz.

Seri Bağlı Devreler

Bir direnç telinin bulunduğu, alternatif akım devresini göz önüne alalım. Bu devrede direnç, akım ve gerilim sayısal büyüklüklerdir. Her üçü de vektör olarak aynı doğrultuda olup bu doğrultu, karşılaştırmalar için başlangıç doğrultusudur. Yani bunların argümanları aynıdır ve sıfırdır. Doğru akımda olduğu gibi Ohm yasası uygulanır. Bir direnç ve bir bobinin seri bağlı olduğu devrede, devre gerilimi, direnç uçları arasındaki gerilim farkı ile, bobin uçları arasındaki gerilim farkının toplamıdır. Bu toplam vektöreldir. Çünkü direnç üzerindeki gerilim başlangıç doğrultusunda, bobin üzerindeki gerilim ise, pozitif yönde başlangıca dik doğrultudadır, R = 0 ise, bobin çok kalın ve özdirenci çok küçük bir telden oluşmuşsa, bobinin uçları arasındaki gerilim, 90^o argümandadır. Kondansatör ile etkin direnç seri bağlanmışsa, kondansatörün uçları arasındaki gerilimin argümanı -90^o dir Bir dirençle bir bobin veya bir direnile bir kondansatör seri bağlanmışsa gerilim,

(256) $\mathbf{U} = \dot{\mathbf{I}}\, R + \dot{\mathbf{I}}\, \mathbf{X}_L$, $X_L = L\,\omega$, $\mathbf{j}^2 = -1$, $\mathbf{X}_L = \mathbf{j}\, X_L$, $Tg\, \varphi = -L\,\omega /R$,

$U_R = \dot{I}\, R$, $\mathbf{U}_L, = \dot{\mathbf{I}}\, \mathbf{X}_L$, $\mathbf{U}^2 = U_R^2 + U_L^2$ **,** $X_C = 1/(C\omega)$, $\mathbf{X}_C = 1/(\,\mathbf{j}\, C\omega\,) = -\,\mathbf{j}\, X_C$,

$\mathbf{U} = \dot{\mathbf{I}}\, R + \dot{\mathbf{I}}\, \mathbf{X}_C$, $\mathbf{U}^2 = U_R^2 + U_C^2$ **,** $Tg\, \varphi = X_C/R$, $\mathbf{U}_C, = \dot{\mathbf{I}}\, \mathbf{X}_C$,

(257) $\dot{\mathbf{I}}_C = \mathbf{j}\, \dot{I}_C$, $\dot{\mathbf{I}}_L = \mathbf{j}\, \dot{I}_L$, $\mathbf{Z}_x = R$, $\mathbf{Z}_y = \mathbf{j}\, X_L$

$\mathbf{Z} = R + \mathbf{j}\, X_L$, $\mathbf{Z} = R + \mathbf{X}_L$ $\mathbf{Z} = R + \mathbf{j}\, X_C$, $\mathbf{Z} = R + \mathbf{X}_C$, $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{U/Z}$**,**

olur. φ açısı akımın argümanıdır.

Paralel Bağlı Devevreler

Bir dirençle bir bobin veya bir direnile bir kondansatör paralel bağlanmışsa akım,

(256) $\mathbf{\dot{I}} = \mathbf{U}/R + \mathbf{U}/\mathbf{X}_L$, $\mathbf{X}_L = \mathbf{j}\, X_L$, $\mathbf{\dot{I}}_R = \mathbf{U}/R$,

$\mathbf{\dot{I}}_L = \mathbf{U}/\mathbf{X}_L$, $\mathbf{j}^2 = -1$, $\mathbf{\dot{I}} = \mathbf{\dot{I}}_R + \mathbf{j}\, \dot{I}_L$, $\mathbf{\dot{I}} = \mathbf{\dot{I}}_R + \mathbf{\dot{I}}_L$, $\dot{I}^2 = \dot{I}_R^2 + \dot{I}_L^2$ **,**

$\mathbf{\dot{I}} = \mathbf{U}/R + \mathbf{U}/\mathbf{X}_C$, $\mathbf{\dot{I}}_R = \mathbf{U}/R$, $\mathbf{\dot{I}}_C = \mathbf{U}/(-\mathbf{j}\, X_C)$, $\mathbf{\dot{I}}_C = \mathbf{U}/\mathbf{X}_C$, $\dot{I}^2 = \dot{I}_R^2 + \dot{I}_C^2$

olur. Burada U gerilimi sayısal alınmıştır, argümanı sıfırdır. R ohmik direnç, L özindüklem katsayısı, ω açısal hızdır. $\mathbf{X}_L$ sanal indüktif dirençtir. X_L sanal indüktif direncin mutlak değeri,..X_C de, sanal kapasitif direncin mutlak değeridir.. Karmaşık sayılarla,

$\mathbf{\dot{I}}_C = \mathbf{j}\, \dot{I}_C$, $\mathbf{\dot{I}}_L = \mathbf{j}\, \dot{I}_L$, $\mathbf{Z}_x = R$, $\mathbf{Z}_y = \mathbf{j}\, X_C$

$\mathbf{Z} = 1/(1/R + 1/(\mathbf{j}\, X_C))$, $\mathbf{Z} = R\, X_C/(\mathbf{X}_C - \mathbf{j}R)$ $\mathbf{\dot{I}} = \mathbf{U}/\mathbf{Z}$,

bulunur. Karmaşık sayıların kalın harflerle gösterilmesi, vektör notasyonu ile ifade edilmesi geleneği yoktur. Bu nedenle karmaşık sayılar kalın harflerle gösterilmeyecektir. j sanal sayılar birimidir. Akım doğrultusunu, başlangıçta bulunan gerilim doğrultusuna taşıyan açıya, **faz açısı** denilir..Seri bağlanmış bobin devresinde akım, gerilime göre 90^o geri, kondansatör devresinde 90^o ileri fazdadır.. Karmaşık sayılarla olan ifadelerde, faz açısını hesaplamak için, başlangıç olarak alınan kavramın argümanından, hesaplanacak kavramın argümanı çıkarılmalıdır. Önüne geri fazda olduğu yazılmalıdır. Bu fark pozitif ise geri fazda, negatif ise ileri fazdadır. Eğer başlangıç olarak alınan kavramın argümanı 0 ise, yani kavram gerçel ise, bulunacak kavramın argümanının ters işaretlisi, faz açısıdır. Bu açı gerilim doğrultusu, başlangıç olmak üzere, başlangıca ulaşmak, matematik dönme yönünde ise pozitif, ters yönde ise negatiftir. Argümanın işareti, açının geometrik konumuna göre belirlenir. Bu nedenle akımın, gerilimin argümanları ve faz açıları ters işaretlidirler.

Alternatif Gerilim

Alternatif gerilim alternatörden sağlanır. Alternatörün indüvisi üzerine sarılı iletken kangallar vardır. Bu kangallarda oluşan gerilimi göz önüne alalım. Kangal düzleminin normali, magnetik indüksiyon vektörüne paralel olsun. Zaman başlangıcında kangal düzleminden geçen akı maksimumdur..Kangal düzlemi birim zamanda ω açısı kadar dönerse, bir t anında kangal düzleminin normali,

$$\varphi = \omega t$$

değerine ulaşır. Kangaldan geçen magnetik indüsiyon ve akı,

(258) $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\Phi = \mathbf{B}.\mathbf{S} = BS \cos\varphi = BS \cos(\omega t)$

olur. **H** magnetik alan, **S** de kangalın alanıdır. Faraday yasasına göre devrede oluşan elektromotor kuvveti,

(259) $U_L(t) = -\ d\Phi/dt = \Phi_{max}\, \omega \sin(\omega t)$, $U_m = U_{max} = \Phi_{max}\, \omega$, $U_L(t) = U_m \sin(\omega t)$,

olur. Φ_{max} ve ω sabit olduklarından, U_{max} da sabittir. Zamana bağlı değildir.

Bir bobinin değişken bir U(t) gerilimi ile beslendiği devreyi göz önüne alalım. Bobinin içindeki elektromagnetik alan, magnetik indüksiyon ve bobinden geçen akı,

(260) $H = N\, \dot{I}/l$, $B = \mu H = \mu N \dot{I}/l$, $\Phi = \mu N S \dot{I}/l$

olur. N bobinin sarım sayısı, l uzunluğu, İ geçen akım ve S de kesit alanıdır. Faraday yasasına göre, N sarımdan geçen zıt elektromotor kuvvet ve özindüklem katsayısı,

(261) $e(t) = -N\, d\Phi/dt = -\mu N^2 S/l\, d\dot{I}/dt$, $L = \mu N^2 S/l$, $e(t) = -L\, d\dot{I}/dt$

olur. Lenz yasasına göre bir olay oluşurken, daima kendisini yaratan etkiye karşı koyacak yönde gelişir. Özindüklem gerilimini yaratan güç, devredeki değişken gerilimdir. O halde özindüklem gerilimi, devreye uygulanan gerilime karşı yöndedir. Devrenin ohmik direnci ihmal edilen bir selfte, özindüklem gerilimi ile, devreye uygulanan değişken gerilim, ters işaretle eşittirler.

(262) $U_L(t) = -e(t) = L\, d\dot{I}/dt$, $U_R = \dot{I}\, R$

Bobinden geçen akım, (262) de U yerine, (259) dan değeri yerine konulurak bulunur.

(263) $U_L = L d\dot{I}/dt$, $\dot{I}_L = 1/L \int U_L dt = -1/(L\omega)\, U_m \cos(\omega t)$

$U_L = U_m \sin(\omega t)$, $\dot{I}_m = U_m/(L\omega)$, $\dot{I}_L = U_m/(L\omega) \sin(\omega t - \pi/2) = \dot{I}_m \sin(\omega t - \pi/2)$

olur.. $\dot{I}_m$ akımın maksimumudur. Gerilimle karşılaştırmak için, akım da, sinüs ile ifade edilmiştir. Gerilim ifadesinde görülen, ωt açısı, vektörün geometrik konumunu gösterir ve

argüman adını alır. $\pi/2$, gerilim vektörü ile, akım vektörü arasındaki faz açısıdır. Akım vektörünü gerilim vektörüne çakıştırmak için, gerçekleştirilen dönme yönü, matematik dönme yönü ise, faz açısı pozitif, değilse negatiftir. Yukardaki akım gerilime göre, $\pi/2$ radyan geri fazdadır. Karmaşık direncin argümanı, başlangıç doğrultusunda olan gerilime göre, akımın faz açısıdır. Akımın argümanı , bunun ters işaretlisidir. Alternatif akımda bobin ve kondansatör gereçleri, akımın gerilimden $\pi/2$ radyan geri veya ileri gitmesine neden olduklarından, gerilim akım ve sanal direnç kavramları, vektörel bir özelik kazanırlar. Doğru akımın devre elemanları, bir parametreye bağlı olup, bir boyutlu bir kavramdırlar. Alternatif akımın devre elemanları, iki parametreye bağlı olup, iki boyutlu bir kavramdırlar. Bu parametreler, gerilim, açısal hız veya frekanstır. Akım Ohm yasası ile gerilime bağlıdır. Devre elemanları düzlemin bir vektörü ile gösterilmelidirler. Burada dört işlem yapılacağından, vektör olarak karmaşık sayılar alınmalıdır. Bu nedenle alternatif akımda gerilim, akım ve ve sanal dirençler karmaşık sayılarla gösterileceklerdir..

$$U = U_m \ Sin(\omega t)$$

geriliminin argümanı ωt ise, bu gerilim karmaşık sayılarla,

(263.1) $$U(t) = U_m \,[Cos\,(\omega t) + j\ Sin\,(\omega t)]$$

ifadesiyle verilecektir. Burada geçen U_m gerilimi, artık gerilimin maksimumunu değil, geilimin mutlak değerini gösterecektir. Akım ve sanal dirençler için de, aşağıdaki örnekte olduğu gibi, ayni gösterilim uygulanacaktır. Karmaşık sayılarla,

(264) $X_L = L\omega$, $\dot{I}_L = U/(j\,X_L)$, $j = e^{j\pi/2}$, $\dot{I}_L = U/(j\,X_L) = U_m\,[Cos\,(\omega t) + j\ Sin\,(\omega t)]/(j\,X_L)$,

$$\dot{I}_L = \dot{I}_m\,[Cos\,(\omega t - \pi/2) + jSin(\omega t - \pi/2)],\quad \dot{I}_m = U_m/(j\,L\omega)$$

olur. j karmaşık sayısı çarptığı karmaşık sayıyı, $\pi/2$ radyan matematik pozitif yönde, böldüğü karmaşık sayıyı da, $\pi/2$ radyan matematik negatif yönde döndürür. X_L sanal direncinin önündeki j harfi, direncin sanal indüktif direnç olduğunu gösterir. Eğer – j olsaydı, direncin sanal kapasitif olduğunu ifade edecekti.

Alternatif akımda iki bileşen vardır.Birinci bileşen gerçel bileşen olup, **etkin** (aktif) iş yapar. Yani geçtiği iletkeni ısıtır. İkinci bileşen sanal bileşen olup, **sanal**(reaktif) iş yapar..Geçtiği iletkeni ısıtmaz. Bobin ve kondansatörde tepkin güç olarak görülür ve elektrik motorunun dönmesinde görev alır. Motorun dönmesi için gereken momenti, iki bileşen ile oluşturulan kuvvet çifti sağlar. İki bileşen olmadan, kuvvet çifti oluşturulamaz. Çünkü moment, iki boyutlu bir kavramdır ve ifadesinde, iki tane kuvvet bileşeni vardır. Lokomotifin piston kolunu, göz önüne alalım. Piston kolu, mafsallarla pistona ve tekerleğe bağlanmış olup, pistonun uyguladığı doğrusal kuvvetin doğrultusunu, değiştirerek tekerleğe iletir. Doğrultusu değişen kuvvet, artık düzlemde değişen kuvvet olmuş ve iki bileşene sahip olmuştur. Böylece kuvvet çifti oluşur ve tekerleğin dönmesi sağlanır. . .

Örnek 1

Self katsayısı L = 0.08 H, olan bir selfin uçları arasına, frekansı f = 50 Hz olan, U = 220 V alternatif gerilim uygulanmıştır. Selfin sanal indüktif direncini bulunuz.

$$X_L = L\omega,\quad j\,X_L = 0.08.\ 2\pi.\ 50\,j = 25{,}13\ j\ \Omega,\qquad \dot{I} = U/(j\,X_L) = -\,8{,}75\ j\ A,$$

Kısa bir anlatımla,

$$U = |U|\,e^{j\omega t},\quad \dot{I} = |\dot{I}|\,e^{j(\omega t + \theta)},\quad j\,X_L = |X_L|\,e^{j\pi/2},\quad \dot{I} = U/(jX_L) = |U/X_L|\,e^{j(\omega t - \pi/2)},\quad \theta = -\,\pi/2,$$

olur.

Bir kondansatörün uçlarına alternatif gerilim uygulansın.

(265) $U_C = Q/C$, $\dot{I} = dQ/dt$, $dU_C = 1/C\ \dot{I}dt$, $\dot{I} = C\ dU_C/dt$,

(259)'dan,

$$dU_C/dt = \omega^2\,\Phi_{max}\,Cos(\omega t) = \omega\ U_m\,Cos(\omega t),\qquad \dot{I} = C\omega\ U_m\ Cos(\omega t) = C\omega\ U_m\ \ Sin(\omega t + \pi/2)$$

bulunur. Karmaşık sayılar ve Ohm yasası ile çözelim.

$$X_C = 1/(C\omega),\quad -\,jX_C = 1/(j\ C\omega),\quad \dot{I} = U/(-\,jX_C\,) = U_m\,[Cos\,(\omega t) + j\ Sin\,(\omega t)]\ /[1/(j\ C\omega)]$$

(266) $\dot{I} = C\omega\ U_m\,[Cos(\omega t + \pi/2) + j\ Sin\,(\omega t + \pi/2)]$, $\dot{I} = \dot{I}_m\,[Cos(\omega t + \pi/2) + j\ Sin\,(\omega t + \pi/2)]$,

j ile çarpım, akımı gerilime göre, $\pi/2$ radyan ileri faza taşımıştır.. Kısa bir anlatımla,.

$U = |U|\, e^{j\omega t}$, $\dot{I} = |\dot{I}|\, e^{j(\omega t + \theta)}$, $-jX_C = |X_C|\, e^{-j\pi/2}$, $\dot{I} = U/(-jX_C) = |U/X_C|\, e^{j(\omega t + \pi/2)}$, $\theta = \pi/2$, olur.

Örnek 2

Sığası $C = 145\ \mu F$, frekansı $f = 50Hz$, olan bir devreye $U = 220\ V$ alternatif gerilim uygulanıyor. Devrenin kapasitif direncini ve akım şiddetini bulunuz.

$$-j X_C = 1/(j C\omega) = -21{,}95\, j\, \Omega, \qquad \dot{I} = U/(-jX_C) = U_m [Cos\,(\omega t) + j\, Sin\,(\omega t)]/[1/(j C\omega)]$$

$$\dot{I} = U/(-j X_C) = \dot{I}_m\, Sin(\omega t + \pi/2), \qquad \dot{I} = 10{,}02\, j\ A, \quad \omega = 2\pi.f = 314{,}16\ rad/sn,$$

j katsayısı, akımın gerilime dik ve pozif yönde olduğunu gösterir.

Örnek 3

Etkin direnci R olan bir telle, özindüklem katsayısı L olan bir bobin, seri bağlanmışlardır. $U_m Sin(\omega t)$ geriliminin uygulanması ile oluşan karmaşık direnci, devreden geçecek akımı ve faz açısını hesaplayalım. Devre elemanlarının uçlarındaki gerilimlerin toplamı, uygulanan gerilime eşit olmalıdır.

(267) $$U_R + U_L = R\dot{I} + L\, d\dot{I}/dt = U_m\, Sin\,(\omega t)$$

Diferansiyel denklemin bir özel çözümü yeterlidir. Çünkü bu konudaki problemlerde, türdeş kısmın çözümü, üstel fonksiyon olup, üsteki zaman değişkeninin katsayısı, negatif gelmektedir. Bu nedenle kısa zamanda bu çözüm sıfıra gitmektedir. Kısa yöntemle çözüm için,. İ'yi çekelim. Paydayı D^2'li kılmak için, pay ve payda, paydanın eşleniği ile genişletilmiştir. Diferansiyel denklemin, kısa yöntem çözüm kuralı gereğince, D^2 yerine $-\omega^2$ konulmuştur.

(268) $$D = d/dt, \qquad \dot{I} = [U_m/(R + LD)]\, Sin\,(\omega t) = [U_m(R - LD)/(R^2 - L^2D^2)]\, Sin\,(\omega t)$$

$$\dot{I} = U_m\, [R\, Sin\,(\omega t) - L\omega\, Cos(\omega t)] \,/\, (R^2 + L^2\omega^2),$$

$$Cos(\varphi) = R/\sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}, \qquad Sin(\varphi) = L\omega/\sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}, \qquad |Z| = \sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}$$

$$\dot{I} = U_m\, Sin\,(\omega t - \varphi)/\sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}, \qquad \dot{I} = U_m/|Z|\, Sin\,(\omega t - \varphi), \qquad U_L = \dot{I}\, L\omega$$

Bu kavramları karmaşık sayılarla ifade edlim.

(269) $$U = U_m\, [Cos(\omega t) + jSin\,(\omega t)], \qquad \dot{I} = \dot{I}_m\, [Cos(\omega t + \theta) + jSin\,(\omega t + \theta)]$$

$$Z = |Z|\, [Cos(\varphi) + jSin\,(\varphi)], \qquad \dot{I} = U_m/Z,$$

$$\dot{I} = U_m\, [Cos(\omega t) + jSin\,(\omega t)]/\{|Z|\, [Cos\,(\varphi) + jSin(\,\varphi)]\},$$

$$\dot{I} = U_m\, [Cos(\omega t) + jSin\,(\omega t)]\, [Cos\,(\varphi) - jSin\,(\varphi)] \,/\, |Z|,$$

$$\dot{I} = U_m\, \{Cos(\omega t)\, Cos\,(\varphi) + Sin\,(\omega t)\, Sin\,(\varphi) + j[-Cos(\omega t)\, Sin\,(\varphi) + Sin\,(\omega t) Cos\,(\varphi)]\}/|Z|,$$

$$\dot{I} = U_m/|Z|\, [Cos\,(\omega t - \varphi) + jSin\,(\omega t - \varphi)],$$

θ açısı akımın argümanı içindedir. φ açısı karmaşık direncin argümanıdır. Karmaşık direnç devre iletkenlerine özgü bir sayı olup, zamandan bağımsızdır. (268) de İ nin çözümünden görüleceği gibi,

$$\theta = -\varphi$$

olmalıdır. Kısa bir anlatımla,

(270) $$U = U_m\, e^{j\,\omega t}, \qquad \dot{I} = \dot{I}_m\, e^{j\,(\omega t + \theta)}, \qquad Tg\,(\varphi) = X_L/R, \quad Z = |Z|\, e^{j\,\varphi}$$

$$Z = U/\dot{I} = U_m/\dot{I}_m\, e^{j\,(\omega t - \omega t - \theta)} = U_m/\dot{I}_m\, e^{-j\,\theta} = |Z|\, e^{j\,\varphi}, \quad |Z| = U_m/\dot{I}_m, \quad \theta = -\varphi$$

olur. Denk devrenin karmaşık direnci ve faz açısı,

(271) $$Z = R + jL\omega, \qquad |Z| = \sqrt{(R^2 + L^2\omega^2)}, \qquad Sin\ \varphi = L\omega/|Z|, \qquad Cos\ \varphi = R/|Z|$$

olur..

Örnek 4

Bir kondansatör ile bir etkin direnç, seri bağlansınlar ve devre değişken bir gerilimle beslensin. Gerilimleri, akımı ve faz açısını bulalım.

(274) $$U_C = Q/C, \qquad dQ/dt = \dot{I}, \qquad U_C = \int \dot{I}dt/C, \qquad R\dot{I} + 1/C\int \dot{I}dt = U_m\, Sin\,(\omega t)$$

Her iki tarafın türevini alalım ve diferansiyel denklemi kısa yöntemle çözelim.

(275) $$R\, d\dot{I}/dt + \dot{I}/C = U_m\, \omega\, Cos\,(\omega t), \qquad D = d/dt, \qquad \dot{I} = [U_m\, \omega\, /(RD + 1/C)]\, Cos\,(\omega t)$$

$$\dot{I} = [U_m\, \omega\, (RD - 1/C)/(R^2D^2 - 1/C^2)]\, Cos(\omega t)$$

$$\dot{I} = U_m\, \omega\, [-R\omega\, Sin(\omega t) - Cos\,(\omega t)/C]/(-R^2\omega^2 - 1/C^2)$$

$$\dot{I} = U_m\, [R\, Sin(\omega t) + Cos(\omega t)/(C\omega)]/[R^2 + 1/(C^2\omega^2)],$$

$\dot{I} = U_m [R \, Sin(\omega t) + Cos(\omega t)/(C\omega)]/ |Z|^2$, $|Z| = \sqrt{[R^2 + 1/(C^2\omega^2)]}$, $Cos(\varphi) = R/|Z|$,
$Sin(\varphi) = [1/(C\omega)]/|Z|$, $\dot{I} = U_m/|Z| \, Sin(\omega t + \varphi)$, $U_R = R\dot{I}$, $U_C = \dot{I}/(C\omega)$,
Karmaşık direncin argümanı φ olduğundan, akım φ radyan ileri fazdadır. (275) deki problemi karmaşık sayılarla çözelim.

(276) $Z = R + 1/(j\, C\omega)$, $\dot{I} = U_m [Cos(\omega t) + jSin(\omega t)] / [R + 1/(j\, C\omega)]$

$$\dot{I} = U_m [Cos(\omega t) + jSin(\omega t)][R + j/(C\omega)] / [R^2 + 1/(C^2\omega^2)], \quad |Z| = \sqrt{[R^2 + 1/(C^2\omega^2)]}$$

$$\dot{I} = U_m \{R \, Cos(\omega t) - 1/(C\omega) \, Sin(\omega t) + j[1/(C\omega) \, Cos(\omega t) + R \, Sin(\omega t)]\}/|Z|^2$$

$$\dot{I} = U_m/|Z| \, [Cos(\omega t + \varphi) + jSin(\omega t + \varphi)],$$

Kısa bir anlatımla,

$$U = U_m e^{j\,\omega t}, \quad \dot{I} = \dot{I}_m e^{j\,(\omega t + \theta)}, \quad Tg(\varphi) = |X_C|/R \quad Z = |Z| \, e^{-j\,\varphi}$$

$$Z = U/\dot{I} = U_m/\dot{I}_m \, e^{j\,(\omega t - \omega t - \theta)} = U_m/\dot{I}_m \, e^{-j\,\theta} = |Z| \, e^{-j\,\varphi}, \quad |Z| = U_m/\dot{I}_m, \quad \theta = \varphi$$

olur.

Seri bağlanmış bir kondansatörle bir bobinden oluşan devrede, akımı ve faz açısını bulunuz.

(277) $U_{LC} = U_L + U_C$, $U_L = \dot{I}(L\omega)$, $U_C = Q/C$, $X_{LC} = L\omega - 1/(C\omega)$,

Uçları arasındaki gerilimlerin toplamını, uyguladığımız gerilime eşitleyelim. Diferansiyel denklemin kısa yöntemle, bir özel çözümünü bulalım. Eğer X_{LC} sanal direnci pozitifse, (268) ve (276) dan,

(278) $Ld\dot{I}/dt + Q/C = U_m \, Sin(\omega t)$, $Ld^2\dot{I}/dt^2 + \dot{I}/C = U_m \, \omega \, Cos(\omega t)$

$$\dot{I} = [U_m \, \omega /(LD^2 + 1/C)] \, Cos(\omega t) = U_m /(- X_{LC}) \, Cos(\omega t),$$

– ω ile kısaltılmıştır.

$$\dot{I} = - U_m \, Cos(\omega t)/X_{LC} = U_m /X_{LC} \, Sin(\omega t - \pi/2) = \dot{I}_m \, Sin(\omega t - \pi/2)$$

olur. Akımı gerilimle karşılaştırmak için, kosinüslü terim sinüs ile ifade edilmiştir. Devre indüktiftir, akım gerilime göre π/2 radyan geri fazdadır. Eğer X_{LC} negatifse, son satırdan,

$$\dot{I} = U_m \, Cos(\omega t) /(- X_{LC}) = U_m \, Sin(\omega t + \pi/2)/X_{LC},$$

olur. Devre kapasitiftir, akım gerilime göre π/2 radyan ileri fazdadır. Payda sıfırsa, devre rezonans haldedir ve akım çok yüksek değerler alır.

Karmaşık sayılarla çözelim. Eğer paydadaki sanal direnç pozitifse,

(279) $\dot{I} = U_m[Cos(\omega t) + jSin(\omega t)] /(jX_{LC})$, $\dot{I} = U_m [- jCos(\omega t) + Sin(\omega t)]/X_{LC}$,

$$\dot{I} = U_m /|X_{LC}| \, [Cos(\omega t - \pi/2) + jSin(\omega t - \pi/2)],$$

devre indüktiftir ve akım gerilimden π/2 radyan geri fazdadır. Son eşitlik, bir üsttekinin payı, – j parantezine alınmış ve – j ile karmaşık sayının çarpımı da, payın π/2 radyan geri alınması ile ifade edilmiştir. Paydadaki sanal direnç negatifse, (279)'u, j ile çarpıp, bölelim.

(280) $\dot{I} = U_m [\, jCos(\omega t) - Sin(\omega t)\,] /(- X_{LC})$, $- X_{LC} = - L\omega + 1/(C\omega) > 0$,

$$\dot{I} = U_m / |X_{LC}| \, [j \, Sin(\omega t + \pi/2) + Cos(\omega t + \pi/2)]$$

olur. Devre kapasitiftir ve akım gerilimden π/2 radyan ileri fazdadır..Paydaki trigonometrik oranların altına, eşdeğerleri yazılmıştır.. Pay π/2 radyan ileri faza gitmiştir. Eğer payda sıfırsa, devre rezonans halindedir ve akım çok yüksek değerler alır. Kısa bir anlatımla,

$$U = U_m e^{j\,\omega t}, \quad \dot{I} = \dot{I}_m e^{j\,(\omega t + \theta)}, \quad X_{LC} = |X_{LC}| \, e^{j\,\varphi}, \quad X_{LC} > 0, \quad X_{LC} = |X_{LC}| \, e^{j\pi/2},$$

$$X_{LC} = U/\dot{I} = U_m/\dot{I}_m \, e^{j\,(\omega t - \omega t - \theta)} = |X_{LC}| \, e^{j\,(-\theta)}, \quad \theta = -\pi/2,$$

olur. Devre indüktifdir. Devre kapasitif ise, $X_{LC} < 0$ ise, X_{LC}'nin argümanı negatif alınır.

$\theta = \pi/2$, olur.

Örnek 5

Sığası C olan bir kondansatör, etkin direnci R olan bir tel, özindüklem katsayısı L olan bir bobin ile, seri bağlansınlar ve uçlarına U(t) değişken gerilimini uygulayalım. Kondansatörün yükü Q, sığası C olsun. Seri devrenin diferansiyel denklemini yazalım.

(281) $U_L + U_R + U_C = L \, d\dot{I}/dt + R\dot{I} + Q/C = U_m \, Sin(\omega t)$,

$$L \, d^2Q/dt^2 + R \, dQ/dt + Q/C = U_m \, Sin(\omega t)$$

Her iki tarafın türevini alıp, Q nün türevi yerine İ yazalım.

(282) $$L\, d^2\dot{I}/dt^2 + R\, d\dot{I}/dt + \dot{I}/C = U_m\, \omega\, Cos(\omega t)$$

$$X_{LC} = L\omega - 1/(C\omega) > 0, \quad |Z| = \sqrt{(R^2 + X_{LC}^2)}, \quad Cos\, \varphi = R/|Z|, \quad Sin\, \varphi = X_{LC}/|Z|$$

$$\dot{I} = [\omega\, U_m/(LD^2 + RD + 1/C)]\, Cos(\omega t) = [\omega U_m/(RD - L\omega^2 + 1/C)]\, Cos(\omega t)$$

$$\dot{I} = \omega U_m/\{RD - [L\omega - 1/(C\omega)]\omega\} Cos\,(\omega t) = \omega U_m/\,(RD - X_{LC}\, \omega)\, Cos\,(\omega t), \quad ,$$

$$\dot{I} = [\omega U_m(RD + X_{LC}\, \omega)/(R^2D^2 - X_{LC}^2\omega^2)\, Cos\,(\omega t),$$

$$\dot{I} = \omega U_m[- R\omega Sin\,(\omega t) + X_{LC}\, \omega\, Cos\,(\omega t)]/(\,- \omega^2R^2 - X_{LC}^2\omega^2)$$

$$\dot{I} = U_m[R\, Sin\,(\omega t) - X_{LC}\; Cos(\omega t)]/(R^2 + X_{LC}^2),$$

$$\dot{I} = U_m/|Z|\, [(R/|Z|)\, Sin\,(\omega t) - (X_{LC}/|Z|)\, Cos\,(\omega t)], \quad R/|Z|) = Cos\,(\varphi),\; X_{LC}\,/|Z| = Sin\,(\varphi),$$

$$\dot{I} = (U_m/|Z|)\, Sin\,(\omega t - \varphi), \qquad |Z|\, \dot{I} = U_m\, Sin\,(\omega t - \varphi)$$

Devre indüktiftir. Son formül Ohm yasasıdır. Akım gerilime göre φ radyan kadar geri fazdadır. Eğer X_{LC} sanal direnci negatif ise, yukarda yapılanlar, dördüncü satırdan itibaren tekrarlanırsa,

$$\dot{I} = \omega U_m/\{RD + [- L\omega + 1/(C\omega)]\omega\} Cos\,(\omega t) = \omega U_m\,/\,(RD - X_{LC}\, \omega)\, Cos\,(\omega t), \quad ,$$

$$\dot{I} = \omega U_m(RD + X_{LC}\, \omega)/(R^2D^2 - X_{LC}^2\, \omega^2)\, Cos\,(\omega t),$$

$$\dot{I} = \omega U_m[- R\omega\, Sin\,(\omega t) + X_{LC}\, \omega\, Cos\,(\omega t)]/(\,- \omega^2R^2 - X_{LC}^2\, \omega^2)$$

$$\dot{I} = U_m[R\, Sin\,(\omega t) - X_{LC}\, Cos\,(\omega t)]/(R^2 + X_{LC}^2),$$

$$\dot{I} = (U_m/|Z|)[(R/|Z|)\, Sin\,(\omega t) + X_{LC}\,/|Z|]\, Cos\,(\omega t)] = (U_m/|Z|)\, Sin\,(\omega t + \varphi),$$

$$|Z|\, \dot{I} = U_m\, Sin\,(\omega t + \varphi)$$

olur. $X_{LC} < 0$ olduğundan, direnç kapasitif olur ve akım gerilime göre φ radyan ileri fazdadır. İ'nin ifadesinde görülen terimler, iki karmaşık sayının bölümünden gelen, karmaşık sayının sanal kısmıdır. Gerilim ifadesi de, karmaşık gerilimin sanal kısmıdır. Karmaşık direncin gerçel ve sanal kısımları işleme girmiştir. Karmaşık sayılarla da, Ohm yasası uygulamaları yapılır.

(283) $$Z = R + j(L\omega - 1/C\omega) = R + j\, X_{LC}$$

Z karmaşık direnci, bir karmaşık sayıdır. Gerilim ve akım fonksiyonlarının mutlak değerleri ve gerçel kısımları görülmektedir. Bu karmaşık sayılar,

(284) $$U = |U|[\, Cos(\omega t\,) + j\, Sin(\omega t)], \qquad \dot{I} = |\dot{I}|\, [Cos\,(\omega t + \theta) + jSin(\omega t + \theta)],$$

$$Z = |Z|[Cos(\varphi) + jSin(\varphi)],$$

olup, Ohm yasasında, hangisi bilinmeyen alınırsa alınsın, yapılacak hesaplarla yukarda bulunan sonuçlar bulunur.

(282) de çözülen problemi karmaşık sayılarla çözelim. Karmaşık sayıların bölümünde, pay ve payda, paydanın eşleniği ile çarpılır.

(284.1) $$X_{LC} = L\omega - 1/(C\omega) > 0, \qquad Cos\, \varphi = R/[\sqrt{(R^2 + X_{LC}^2)},$$

$$Sin\, \varphi = X_{LC}/\sqrt{(R^2 + X_{LC}^2)}, \quad |Z| = \sqrt{(R^2 + X_{LC}^2)}$$

$$\dot{I} = U_m[Cos\,(\omega t) + jSin\,(\omega t)]/(R + j\, X_{LC}\,), \quad \dot{I} = U_m[Cos(\omega t) + jSin(\omega t)](R - jX_{LC})/(R^2 + Z_{LC}^2),$$

$$\dot{I} = U_m\; \{R\, Cos\,(\omega t) + X_{LC}\, Sin\,(\omega t) + j[- X_{LC}\, Cos\,(\omega t) + R\, Sin\,(\omega t)]\}/\, |Z|^2$$

$$Cos\, \varphi = R/|Z|, \quad Sin\, \varphi = X_{LC}\,/|Z|, \quad \dot{I} = U_m/|Z|\, [Cos\,(\omega t - \varphi) + jSin\,(\omega t - \varphi)]$$

(284.2) $$X_{LC} < 0, \quad \dot{I} = U_m\, \{R\, Cos(\omega t) - X_{LC}\, Sin\,(\omega t) + j[X_{LC}\, Cos\,(\omega t) + R\, Sin(\omega t)]\}/|Z|^2$$

$$\dot{I} = U_m/|Z|\, [Cos\,(\omega t + \varphi) + jSin(\omega t + \varphi)]$$

Diferansiyel denklem çözümleri, alternatif akımda Ohm yasasının geçerli olacağını kanıtlar. Kısa bir anlatımla,

$$U = U_m\, e^{j\,\omega t}, \qquad \dot{I} = \dot{I}_m\, e^{j\,(\omega t + \theta)}, \qquad Tg\,(\varphi) = X_{LC}\,/R, \quad X_{LC} > 0, \quad Z = |Z|\, e^{j\,\varphi}$$

$$Z = U/\dot{I}\; = |U/\dot{I}|e^{j\,(\omega t - \omega t - \theta)}\; = |U/\dot{I}|\, e^{-j\,\theta}\; = |Z|\, e^{j\,\varphi}, \quad |Z| = |U/\dot{I}|, \qquad \theta = -\,\varphi$$

$X_{LC} < 0$ ise, X_{LC} 'nin argümanı negatif olur. Sin(φ) ve φ işaret değiştirirler. $Z = |Z|\, e^{-j\,\varphi}$, $\theta = \varphi$, olur.

Akımı ekstremum yapan zamanı arayalım. (282)'nin son formülünden,

$$\dot{I} = U_m/|Z|\, Sin\,(\omega t - \varphi),$$

görüleceği gibi, $\omega t - \varphi = \pi/2$, için akım maksimum, $\omega t - \varphi = -\,\pi/2$ için minimumdur.

$t_1 = (2k\pi + \pi/2 + \varphi)/\omega$ için maksimum, $t_2 = (-\pi/2 + 2k\pi + \varphi)/\omega$ için minimumdur. Gerilimin ifadesinde kosinüs vardır. Gerilim de, $t_1 = (2k\pi + \pi/2)/\omega$, $t_2 = (-\pi/2 + 2k\pi)/\omega$ zamanlarında ekstremum olur. Akım ve gerilimin ekstremumları, faz farkı ile gelmektedir.

Örnek 6

R = 2 Ω, L = 0,07 H, C = 319 μF, f = 50 Hz devre elemanları ile verilen seri devreden İ = 15 A akım geçmektedir. Devre elemanlarının uçları arasındaki gerilimi, devre gerilimini ve faz açısını bulunuz.

$$j X_L = j L\omega = j\, 0{,}07 .100 .\pi = 22\, j\, \Omega, \quad -jX_C = 1/(j\, C\, \omega) = !/(j\, 319.\, 10^{-6} .100\, \pi) = -10\, j\, \Omega$$

$$U_R = R\, \dot{I} = 2.15 = 30 \text{ V}, \quad U_L = j\, X_L\, \dot{I} = 22.15\, j = 330\, j \text{ V},$$

$$U_C = -j\, X_C\, \dot{I} = -10.15\, j = -150\, j \text{ V}, \qquad U = 30 + j(330 - 150) = 30 + 180\, j \text{ V},$$

$$|U| = \sqrt{(30^2 + 180^2)} = 182 \text{ V}, \quad Tg(\varphi) = (L\omega - 1/(C\,\omega))/R = (22 - 10)/2 = 6, \qquad \varphi = 80^o{,}32'$$

Burada akımın faz açısı ve argümanı sıfırdır. Devre indüktif devredir. Çünkü $\varphi > 0$ dir. Gerilim akıma göre ileri fazdadır. Akım gerilime göre geri fazdadır. İşaret, başlangıç olarak gerilim veya akım alındığına göre değişir.

Paralel Bağlı Devreler

Paralel bağlı devrelerde akım, gerilim ve direnç, vektörel büyüklüklerdir. Bir dirençle, bir bobin paralel bağlansın. İletkenlerden $\dot{I}_R$ ve $\dot{I}_L$ akımları geçsin. Bu akımların vektörel toplamı devreden geçen akımı verecektir. Her iki devre elemanının uçlarındaki, gerilim aynıdır. Ohm yasası uygulanır.

$$\dot{I}_R = U/R, \qquad \dot{I}_L = U/X_L, \qquad \dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L, \quad |\dot{I}| = (\dot{I}_R^2 + \dot{I}_L^2)^{1/2}$$

olur. Gerilim ve karmaşık direnç biliniyorsa akım bulunur. Burada $\dot{I}_L$ akımının faz açısı, $+\pi/2$ dir. Argümanı ise $-\pi/2$ dir. Faz açılarının işareti matematik dönme yönüne göre, argümanlar ise geometrik konumuna göre işaretlenirler. İ akım vektörünün mutlak değerini bulmak için, bileşenlerinin karesel ortalaması alınır. Çünkü $\dot{I}_R$ başlangıç doğrultusunda $\dot{I}_L$ ise, 90^o geri fazdadır. İ akım vektörü ile, başlangıç doğrultusu olarak alınan gerilim arasındaki faz açısı ve karmaşık direnç,

$$Z = 1/(1/R + 1/\, jX_L) = R\, X_L\, (jR + X_L)/(R^2 + X_L^2),$$

$$|Z| = R\, |X_L|/(R^2 + |X_L|^2)^{1/2}, \qquad Tg\, \varphi = \dot{I}_L/\dot{I}_R,$$

dir. Paralel devreye denk seri devrenin karmaşık direnci, argümanı, denk etkin direnci ve denk sanal direnci,

$$Z = U/\dot{I}, \qquad |Z| = U/|\dot{I}|, \quad Tg\, \varphi = -\dot{I}_L/\dot{I}_R, \qquad R = |Z| \cos \varphi, \qquad X_L = |Z| \sin \varphi$$

dır. Burada φ karmaşık direncin argümanıdır. Karmaşık sayılarla,

$$\dot{I}_R = U/R, \qquad \dot{I}_L = U/X_L, \qquad \dot{I} = \dot{I}_R - j\dot{I}_L, \qquad |\dot{I}| = (\dot{I}_R^2 + \dot{I}_L^2)^{1/2},$$

dır. Bir dirençle bir kondansatörün paralel bağlanmasında, yalnız bobinin indüktansı yerine kondansatörün – işaretle kapasitansının tersi gelir.

Örnek 7,:

Etkin direnci R = 15 Ώ, olan direnç teli ile, özindüklem katsayısı L = 17.5 mH olan bobin paralel bağlanmışlardır. Bu devreye f = 50 frekanslı, U = 220 volt alternatif gerilim uygulanmıştır. Kollardaki ve ana koldaki akımları, ana koldan geçen akımın gerilime göre faz açısını, paralel devreye denk, seri devrenin karmaşık direncini bulunuz.

$$\dot{I}_R = U/R = 14{,}66 \text{ A}, \quad X_L = L.100.\pi.j = 5{,}49\, j\, \Omega, \quad \dot{I}_L = U/X_L = -40\, j \text{ A},$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L = 14{,}67 - 40\, j \text{ A}, \qquad |\dot{I}_1| = \sqrt{(\dot{I}_R^2 + |\dot{I}_L|^2)} = 42{,}62 \text{ A},$$

$$Z = 1/(1/R + 1/X_L) = 1{,}78 + 4{,}85\, j\, \Omega, \qquad |Z| = R.\, |X_L| /\sqrt{(R^2 + |Z_L|^2)} = 5{,}16\, \Omega,$$

$$\dot{I} = U/Z = 14{,}67 - 40\, j \text{ A}, \quad \varphi = Arctg(-|\dot{I}_L|/\dot{I}_R) = 69^o\, 52$$

$$Z = 1{,}78 + 4{,}85j\, \Omega, \qquad R = |Z| \cos(\varphi) = 1{,}78\, \Omega, \qquad X_L = |Z| \sin(\varphi) = 4{,}85\, j\, \Omega,$$

Son satırda verilen Z, denk devrenin karmaşık direnci, R denk devrenin etkin direnci, X_L denk devrenin sanal indüktif direnci, İ denk devrenin akımı, φ de denk devre akımının, gerilime göre faz açısıdır.

Örnek 8

R = 7 Ω etkin direnci olan bir tel ile, sığası C = 152 μF olan bir kondansatör paralel bağlanmışlardır. Uçlarına f = 50 frekansalı, U = 220 V'luk alternatif gerilim uygulanmıştır. Kollardan ve ana koldan geçen akımları, bu akımların gerilime göre faz açılarını ve bu devreye denk seri devrenin karmaşık direncini, etkin ve sanal kapasitif dirençlerini bulunuz. Problem yukardakine çok yakındır.

$\dot{I}_R = U/R = 31{,}43$ A, $X_C = 1/(j\,C.100.\pi) = -20{,}94\,j\,\Omega$, $\dot{I}_C = U/X_C = 10{,}5\,j$ A,

$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = 31{,}43 + 10{,}5\,j$ A, $|\dot{I}| = \sqrt{(\dot{I}_R^2 + |\dot{I}_C|^2)} = 33{,}14$ A,

$Z = 1/(1/R + 1/X_C) = 6{,}3 - 2{,}1\,j\,\Omega$, $|Z| = R.\,|X_C|\,/\sqrt{(R^2 + .|X_C|^2)} = 6{,}64\,\Omega$,

$\dot{I} = U/Z = 31{,}43 + 10{,}5j$ A, $\varphi = \mathrm{Arctg}\,(-|\dot{I}_C|/\dot{I}_R) = -18^o\,30'$, $Z = 6{,}3 - 2{,}1j\,\Omega$,

$R = |Z|\,\mathrm{Cos}(\varphi) = 6{,}3\,\Omega$, $X_C = |Z|\,\mathrm{Sin}(\varphi) = -2{,}1\,j\,\Omega$.

Burada bulunan Z, denk devrenin karmaşık direnci, R denk devrenin etkin direnci, X_C denk devrenin sanal kapasitif direnci, İ denk devrenin akımı, φ de, denk devre akımının gerilime göre faz açısıdır.

Örnek 9

Paralel bir devrenin birinci kolu üzerinde, $R_1 = 12$ Ω'luk bir etkin direnç ile, özindülklem katsayısı L = 8.3 mH olan, bir bobin seri bağlanmış ve ikinci kolda, $R_2 = 2$ Ω'luk bir etkin dirençle, sığası C = 685 μF olan, bir kondansatör seri bağlanmıştır. Devrenin uçlarına, frekansı f = 50 olan, U = 220 voltluk bir alternatif gerilim uygulanmıştır. Kollardan ve ana koldan geçen akımları, bu akımların gerilime göre faz açılarını, paralel devreye denk seri devrenin karmaşık direncini bulunuz.

$X_L = j.L.100.\pi = 2{,}6\,j\,\Omega$, $X_C = 1/(j.C.100.\pi) = -4{,}65\,j\,\Omega$,

$Z_1 = R_1 + X_L = 12 + j\,2{,}6\,\Omega$, $Z_2 = R_2 + X_C, = 2 - j\,4{,}65\,\Omega$, $Z = 1/(1/Z_1 + 1/Z_2\,)$,

$Z = Z_1.Z_2/(Z_1 + Z_2)$, $Z = 3{,}04 - 3{,}16\,j\,\Omega$, $|Z| = 4{,}39\,\Omega$, $\dot{I} = U/Z = 34{,}7 + 36{,}14\,j$ A,

$\dot{I}_1 = U/Z_1 = 17{,}51 - 3{,}8\,j$ A, $\dot{I}_2 = U/Z_2 = 17{,}19 + 39{,}94\,j$ A,

$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2, = 34{,}7 + 36{,}14\,j$ A, $\varphi_{\dot{I}} = -\mathrm{Arg}(\dot{I}) = -46^o.10'$, $|\dot{I}| = 50{,}1$ A,

$R = |Z|\,\mathrm{Cos}(\varphi_{\dot{I}}) = 3{,}04\,\Omega$, $X_C = |Z|\,\mathrm{Sin}(\varphi_{\dot{I}}) = -3{,}17\,j\,\Omega$,

Son bölümde bulunan değerler, paralel devreye denk devrenin karmaşık direnci, akımın argümanı, denk etkin direnci ve denk sanal direncidir. Faz açısı argümanın ters işaretlisidir. Akımlar, ana koldaki akımın sağlamasıdır.

Kısa bir anlatımla,

$U = |U|e^{j\omega t}$, $\dot{I} = |\dot{I}|e^{j(\omega t + \theta)}$, $\dot{I}_1 = |\dot{I}_1|e^{j(\omega t + \theta 1)}$, $\dot{I}_2 = |\dot{I}_2|e^{j(\omega t + \theta 2)}$,

$Z = |Z|\,e^{j\varphi}$, $Z_1 = |Z_1|\,e^{j\varphi 1}$, $Z_2 = |Z_2|\,e^{j\varphi 2}$

$1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2 = e^{-j\varphi 1}/\,|Z_1| + e^{-j\varphi 2}\,/|\,Z_2|$, $|Z_1| = \sqrt{(R_1^2 + Z_L^2)}$,

$|Z_2| = \sqrt{(R_2 + Z_C^2)}$, $|\dot{I}_1| = |U|\,/\,|Z_1|$, $|\dot{I}_2| = |U|\,/\,|Z_2|$,

Üstel fonksiyonların yerine, trigonometrik değerleri konulursa,

$1/Z = (|Z_2|\,\mathrm{Cos}(\varphi_1) - j|Z_2|\,\mathrm{Sin}(\varphi_1) + |Z_1|\,\mathrm{Cos}(\varphi_2) - j|Z_1|\,\mathrm{Sin}(\varphi_2))\,/(|Z_1|\;|Z_2|)$,

olur.

$1/Z = \{|Z_2|\,\mathrm{Cos}(\varphi_1) + |Z_1|\mathrm{Cos}(\varphi_2) - j\,[|Z_2|\,\mathrm{Sin}(\varphi_1) + |Z_1|\,\mathrm{Sin}(\varphi_2)]\}\,/(|Z_1|\;|Z_2|)$,

$\mathrm{Tg}(\varphi_1) = X_L/R$, $\mathrm{Tg}(\varphi_2) = X_C/R$, $\theta_1 = -\varphi_1$, $\theta_2 = \varphi_2$,

$\mathrm{Tg}(\varphi) = [|Z_2|\,\mathrm{Sin}(\varphi_1) + |Z_1|\,\mathrm{Sin}(\varphi_2)]\,/\,[|Z_2|\,\mathrm{Cos}(\varphi_1) + |Z_1|\mathrm{Cos}(\varphi_2)]$,

$|1/Z| = [|Z_2|^2 + |Z_1|^2 + 2\,|Z_2|\,|Z_1|\,\mathrm{Cos}(\varphi_1 - \varphi_2)]^{1/2}\,/(|Z_1|\;|Z_2|)$,

$\dot{I} = U/Z$, $|\dot{I}| = |U|\,[|Z_2|^2 + |Z_1|^2 + 2\,|Z_2|\,|Z_1|\,\mathrm{Cos}(\varphi_1 - \varphi_2)]^{1/2}\,/(|Z_1|\;|Z_2|)$,

$|\dot{I}| = [|\dot{I}_2|^2 + |\dot{I}_1|^2 + 2\,|\dot{I}_2|\,|\dot{I}_1|\,\mathrm{Cos}(\varphi_1 - \varphi_2)]^{1/2}$, $\varphi_{\dot{I}} = \mathrm{Arg}(\dot{I})$, $\theta = -\varphi_{\dot{I}}$,

Alternatif Akım Devrelerinde Güç

Akımın ve gerilimin etkin değerleri U ve İ ise, bir t_1 anındaki değerlere, **ani** değerler, denilir.

(286) $u = U\,\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t)$, $i = \dot{I}\,\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t + \varphi)$

küçük harfler ani değerlerdir. Devreye verilen güç,

(287) $p = u\,i = U\,\dot{I}\,\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t)\,\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t + \varphi)$

olur. Çarpan kosinüsleri toplam biçiminde yazalım.

(288) $$p = ui = U\dot{I}\,Cos(-\varphi) - U\dot{I}\,Cos(2\omega t + \varphi)$$
olur. Ani gücün birinci bileşeni,

(289) $$P = U\dot{I}\,Cos(-\varphi),$$
olup, **etkin güç, aktif güç, gerçel güç** adlarını alır. Yararlı işi yapan bu güçtür. Ani gücün ikinci bileşeni,

(290) $$R = U\dot{I}\,Cos(2\omega t + \varphi)$$
olup, **flüktüant güç** adını alır. Bir peryottaki ortalaması sıfırdır. Bu akımın çok fazlı dengeli devrelerde değeri sıfır olur. Fazlar arasında bir dengesizlik olduğu zamanlarda, yeniden ortaya çıkar. Bu güçlerin mutlak değeri,

(291) $$N = U\dot{I}$$
olup, **görünen güç** adını alır. Birimi (VA)volt amperdir. Görünen gücün düşey bileşenine,

(292) $$Q = U\dot{I}\,Sin(-\varphi),$$
tepkin güç, **reaktif güç** veya **sanal güç** denilir. Birimi (VAR) volt amper reaktiftir. Bu güç sanal direnç bulunan devrelerde görülür. Bir yarım peryotta, devreden almaç tarafından çekilir, diğer yarım peryotta yeniden devreye verilir. Bir peryottaki toplamı sıfır olduğundan yararlı iş, gerçel iş yapmaz.

Yukarda tanımlanan etkin ve tepkin güçler, görünen gücün bileşenleridir. Güç, karmaşık sayılarla gösterilebilen gerilim ve akımın çarpımı olduğundan, görünen güç için de, mekanikte olduğu gibi, bir karmaşık gösterilim tasarımı yapalım. Bu karmaşık sayının mutlak değeri, Uİ görünen güç olacaktır. Akımı mekanikteki yolun karşıtı olarak göz önüne alalım ve gerilimi akımın eşleniği ile çarpalım.

(293) $\mathbf{N = U.\bar{\dot{I}}} = |U\dot{I}|\,(Cos\,\varphi - jSin\,\varphi) = P - jQ, \quad |U\dot{I}|\,(Cos(-\varphi) + jSin(-\varphi)) = P + jQ,$

$\mathbf{p} = |U|\,e^{j\,\omega t}\,|\dot{I}|\,e^{j(-\,\omega t\,-\,\varphi)} = |U\dot{I}|\,e^{-j\,\varphi}, \quad \mathbf{p} = |U\dot{I}|\,(Cos(-\varphi) + jSin(-\varphi)), \quad \mathbf{N = p} = P + jQ$

Akımın argümanı, karmaşık direncin argümanı ile, ters işarette bulunur. Görünen güç vektörünün bileşenleri ile, gerilim vektörünün, akım vektörünün eşleniği ile çarpımından elde edilen gücün bileşenlerinin, aynı olduğu görülmektedir.

Tepkin Güce Mekanik Yorum

Düzlemde Bir **F** kuvveti bir maddesel notaya **s** yolunu kat ettirsin. Bu olay üzerinde iki türlü iş tanımlanır. Kuvvet ile yolun eşleniğini karmaşık sayılarda çarpalım.

(294) $\mathbf{F} = F_1 + j\,F_2, \quad \mathbf{\bar{s}} = s_1 - js_2, \quad \mathbf{F\,\bar{s}} = F_1s_1 + F_2s_2 + j(F_2s_1 - F_1s_2)$

$\dot{I}_ö = F_1\,s_1 + F_2\,s_2, \quad \dot{I}_d = j(F_2\,s_1 - F_1\,s_2)$

.Çarpımın gerçel kısmına **öteleme işi**, sanal kısmına da **dönme işi** denilecektir. Bu konuda ayrıntılı örnekler için **Gök Mekaniği** Orhan Melih Sermutlu kitabına başvurulmalıdır.

Örnek 10

$$Z_1 = 7 - 13j\ \Omega, \qquad Z_2 = 11 + 8j\ \Omega, \qquad Z_3 = 5 + 9j\ \Omega$$

Karmaşık dirençleri ile verilen üç almaçtan ilk ikisi paralel, üçüncüsü bu paralel devre ile seri bağlanmıştır. Devre 220 volt alternatif akımla beslenmektedir. Almaçların şebekeden çektikleri etkin gücü, tepkin gücü, görünen gücü ve güç katsayısını hesaplayınız.

Paralel devrenin uçlarına V gerilimi uygulansın. Kollardaki akımlar $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, devrenin akımı İ ve devrenin denk karmaşık direnci de Z olsun.

$$\dot{I}_1 = V/Z_1, \quad \dot{I}_2 = V/Z_2, \quad \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = U(1/Z_1 + 1/Z_2) = U(Z_1 + Z_2)/(Z_1Z_2)$$
$$U/\dot{I} = Z_1Z_2/(Z_1 + Z_2), \quad Z = Z_1Z_2/(Z_1 + Z_2) + Z_3 = (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1)/(Z_1 + Z_2)$$
$$Z = 15{,}58 + 7{,}1j\ \Omega, \quad \dot{I} = 220/Z = 11{,}69 - 5{,}33j\ A, \quad \varphi = Arg(Z) = 24^o30',$$
$$|\dot{I}| = 12{,}85\ A, \qquad V = 220 - \dot{I}.Z_3 = 113{,}59 - 78.54\ j\ V,$$
$$\dot{I}_1 = U/Z_1 = 8{,}33 + 4{,}25\ j\ A, \qquad \dot{I}_2 = U/Z_2 = 3{,}36 - 9{,}58\ j\ A,$$
φ faz açısı olup, pozitif olduğundan, devre indüktiftir. Akım gerilime göre geri fazdadır. Gerilimle akımın eşleniği çarpımı, görünen güç vektörünü verir.

$$N = U.\bar{\dot{I}} = 220.(11{,}69 + 5{,}33j) = 2571{,}4 + 1172{,}7\ j\ VA,$$
$$P = U.\dot{I}\,Cos(\varphi) = 2571{,}4\ VA, \qquad Q = = -\,U.\dot{I}\,Sin(\varphi\,) = -\,1172{,}7\ VAR,$$
$$|N| = 12{,}85.220 = 2826{,}2\ VA, \quad Tg\,(\varphi) = Q/P, \quad \varphi = 24^o\,30', \quad Cos(\varphi) = 0.91,$$

MONOFAZE UZAY AKIMI

Doğru akım bir boyutlu, alternatif akım iki boyutludur. Frekanslı akımların da, iki boyutlu olduğu göz önüne alınırsa, bu iki akım arasında çok büyük nitelik farkları olduğu açıktır. Eğer üç boyutlu akım elde edilebilirse, bu düzeyde nitelik farklılıkları gene gelecektir. İndüviye iki açısal hız parametreli, küresel bir hareket vererek, üç boyutlu akım alternatörü yapılmaya çalışılmıştır.

Alternatörün rotoru, indüvi görevi ile, iletken dairesel kangal çubukları içerir. İndüvi iki bağımsız motor yardımı ile, küresel bir hareket yapar. Yani rotor, indüviyi döndüren motorla birlikte, eksenine dik ikinci bir eksen etrafında, ikinci bir motorla döndürülecektir. İndüvi ve indüktör küresel olup, indüktör sargılarını taşıyan çıkıntılar, dengeli olarak kürenin iç yüzeyine dağıtılırlar. Eğer iki kutup varsa, indüktör sargı çıkıntıları, her bir kutup bir yarım küreye gelecek biçimde, dört kutup varsa, bu çıkıntılar indüktör küresinin içine çizilen düzgün dörtyüzlünün yüzlerinin merkezlerine gelecek biçimde, eğer altı kutup varsa, indüktör küresi içine çizilen küp yüzlerinin merkezlerine gelecek biçimde, 8 kutup varsa, indüktör küresi içine çizilen düzgün sekizyüzlünün yüzlerinin merkezlerine gelecek biçimde, 12 kutup varsa, indüktör küresi içine çizilen, düzgün beşkenlerin oluşturduğu düzgün onikiyüzlünün yüzlerinin merkezlerine gelecek biçimde yerleştirilirler. İletken kangallar indüvi küresinin, birinci ekseninin indüviyi kestiği noktalardan geçen, boylam daireleri düzeninde yerleştirilirler. İlk deney alternatörü, iki kutuplu yapılmalıdır.

İndüvi küresi birim küre seçilsin ve indüktör küresi sabit olsun. İndüvi küresi, küresel hareketlidir. Sağ el kuralına uygun, birinci motorun ekseni Ox, ikinci motorun ekseni Oy ve bunlara dik eksen de, Oz olsun. Eksenlerin başlangıçta indüktör küresini kestiği noktalar, sıra ile, A, A', B, B', C, C' olsunlar. Önce başlangıç olarak, kangal düzleminin normali, Oz ekseni ile çakışsın. Birinci motor dönsün, ikinci motor dursun. Kangal düzleminin normalinin ucu, BCB' ikinci motora göre olan, boylam dairesini çizer. Birinci motor dursun, ikinci motor dönsün. Kangal düzleminin normalinin ucu, ACA' boylam dairesini çizer. Bu hareketi, birini önce biraz hareket ettirdikten sonra durdurup, diğerini sürekli hareket ettirerek tekrarlayalım. Benzer biçimde kangal düzleminin normal birim vektörünün ucu, birincide B, B' den, ikincide de A, A' den geçen boylam dairelerini çizer. Motorların her ikisi birlikte çalışırsa, kangal düzleminin normal birim vektörünün ucu, motor eksenlerinden geçen, meridyen düzlemlerin arakesiti üzerinde olur. Boylam dairelerinden geçen veya motor eksenlerinden geçen düzlemlere, **meridyen düzlemler** denilir.

İndüktör küresi, iki yarım küreden oluşacaktır. İki kutuplu alternatörde, bir yarım kureyi yaklaşık olarak kaplayacak biçimde bir kutbun sargı çıkıntısı olacaktır. İndüvi küresi ile birinci motor, bir dairesel kasnağa yerleştirilecek ve bu kasnağı, indüktöre monte edilmiş sabit olan, ikinci bir motor döndürecektir. İndüktör küresi ile, indüvi küresi arasında kalan hava boşluğu, minimum olacak biçimde, motor ve kasnak boyutlandırılmalıdır. Kasnak üzerine konulacak bir iletken, dışardan kömür fırçalar ile alınacak olan, birinci motorun elektirik akımını taşıyacak ve kangal iletkenlerinde devresini tamamladıktan sonra, kasnaktaki iletkene, oradan da gene kömür fırçalar ile, dışarıya iletilecektir.

İndüktör iki kutuplu, kutuplar ekseni Oz, magnetik indüksiyon vektörü de, Oz doğrultusunda olsun. Kangal düzleminin normal birim vektörünün ucu, bir t anında birim kürenin bir N noktasında bulunsun. N noktasından ve motor eksenlerinden geçen boylam dairelerini çizelim. BCB' düzlemi ile, ANA' boylamının kesim noktalarından biri, P olsun. OAP meridyen düzlemi, BCB' düzlemine diktir. Çünkü BCB’ düzlemi, Oy, Oz eksenlerinden geçen koordinat düzlemi olup, AP yayı da, Ox ekseninden geçen boylam dairesi üzerindedir ve ANA' meridyen düzleleminin Ox doğrusu, BCB' düzlemine diktir. Bu nedenle, NPC küresel üçgeni, P de diktir. İkinci motorun dönmesi ile, N noktası PN yayını, birinci motorun dönmesi ile de, CP yayını çizecektir. Başlangıç ekseni Ox ekseni ve başlangıç düzlemi de, ACA' düzlemi alınmıştır. Birinci motorun açısal hızı α radyan/sn, ikinci motorun açısal hızı β

radyan/sn olsun. αt açısı, ACA’ başlangıç düzlemi ile, APA’ meridyen düzleminin oluşturduğu iki düzlemli açı olup, küresel koordinatların **azimut** açısıdır. βt açısı da, PN yayını gören merkez açı olup, küresel koordinatların **zenit** açısının tümleridir. Zenit açısı, NA = θ yayının karşısındaki merkez açıdır. Ox ekseni, ikinci motorun başlangıç doğrultusu,. ACA’ düzlemi de, birinci motorun başlangıç düzlemidir..İndüvi ve indüktör kürelerinin merkezleri, küresel dönme merkezi ve koordinat sisteminin başiangıç noktası aynı noktadır.. CPN küresel üçgeninde kosinüs teoremi,

(295) $$\mathrm{Cos}\,(CN) = \mathrm{Cos}\,(CP)\,\mathrm{Cos}\,(PN) + \mathrm{Sin}\,(CP)\,\mathrm{Sin}\,(PN)\,\mathrm{Cos}\,(CPN)$$

$$PN + NA = PA = \pi/2, \qquad PN = PA - NA = \pi/2 - NA\,,$$

dir. İki harfle ifade edilenler, birim kürenin yayları olup, karşılarındaki merkez açıların radyan değerleridir. Üç harfle gösterilen CPN açısı, küresel üçgenin köşe açısıdır ve diktir. Bu açı, BCB’ koordinat düzlemi ile, APA’ meridyen düzleminin ölçek açısıdır. Bu düzlemlerden BCB’ düzlemi, koordinat düzlemi olup, P noktasından geçen diğer düzlemin Ox doğrusuna diktir. Bu nedenle ölçek açı diktir. Küresel üçgenin köşedeki kenar yaylarına çizilen tegetlerin açısına, küresel üçgenin **köşe açısı** denilir. Birinci satırın son terimi sıfır olur..PN yerine (295)’den değeri konulursa,

(296) $$\mathrm{Cos}\,(CN) = \mathrm{Cos}(CP)\,\mathrm{Cos}(PN) = \mathrm{Cos}(CP)\,\mathrm{Sin}(NA),$$

bulunur. En sonda sinüslü terimde, NA = θ, küresel koordinatların zenit açısıdır. PN yayı ikinci motor tarafından, CP yayı da, birinci motor tarafından kat edilirler. OC doğrultusu, Oz ekseni doğrultusudur ve mağnetik indüksiyon vektörünün doğrultusudur. Normal birim vektörün, magnetik indüksiyon vektörü ile, oluşturduğu açının açısal hızı ω olsun. t anında,

(298) $$\theta = \pi/2 - \beta t, \quad PN = \beta t, \quad CP = \alpha t, \quad CN = \omega t, \quad \mathrm{Cos}\,(\omega t) = \mathrm{Cos}(\alpha t)\,\mathrm{Cos}(\beta t),$$

olur. İki motorun hareketi ile, yalnız N ve P noktaları yer değiştirecekler, diğer noktalar yer değiştirmeyeceklerdir. Bu noktalar, N ve P noktalarının hareketlerini belirlemek için konulmuş, nirengi noktalarıdır. . .

İkinci Yöntem: Küresel Koordinatlar,

Küresel koordinatlar için, Ox ekseni kutup ekseni, BCB’ koordinat düzlemi de, başlangıç düzlemi olarak alınacaktır. Azimut ve zenit açıları, yukarda ifade edildiği gibi alınacaktır. $\theta = \pi/2 - \beta t$, bağıntısı göz önüne alınırsa, küresel koordinatlar,

$$x = \mathrm{Sin}(\beta t), \qquad y = \mathrm{Cos}(\beta t)\,\mathrm{Sin}(\alpha t), \qquad z = \mathrm{Cos}(\beta t)\,\mathrm{Cos}(\alpha t)$$

olur. Küresel koordinatlarda yer vektörü, aynı zamanda küre yüzeyinin normal birim vektörüdür. Mağnetik indüksiyon vektörü, Oz ekseni doğrultusundadır.

$$\mathbf{r} = \mathrm{Sin}(\beta t)\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{Cos}(\beta t)\,\mathrm{Sin}(\alpha t)\,\mathbf{e}_2 + \mathrm{Cos}(\beta t)\,\mathrm{Cos}(\alpha t)\,\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{r}\,\mathbf{e}_3 = \mathrm{Cos}(\beta t)\,\mathrm{Cos}(\alpha t)$$

Son terim birim vektörlerin iç çarpımı olup, **r** normal birim vektörü ile, Oz ekseni arasındaki açının kosinüsünü verir. Bu açı ωt olup, bir köşe açısı dik olan, CPN küresel üçgeninin, dik açı karşısındaki yayı gören, merkez açıdır. CPN dik açısının, komşu yaylarını gören merkez açılar, αt ve βt açılarıdır.

$$\mathrm{Cos}\,(\omega t) = \mathrm{Cos}(\alpha t)\,\mathrm{Cos}\,(\beta t)$$

Bağıntısı yeniden bulunur.

Magnetik indüksiyon ve bir kangaldan geçen akı,

(299) $$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \Phi = \mathbf{B}\,\mathbf{S} = B\,S\,\mathrm{Cos}\,(\omega t) = \Phi_{max}\,\mathrm{Cos}(\alpha t)\,\mathrm{Cos}(\beta t)$$

olur. **S** kangalın alanıdır. Faraday yasası gereğince, bir iletken kangaldaki gerilim ve akım,

(300) $$U = -\,\partial\Phi/\partial t = \Phi_{max}\,[\alpha\,\mathrm{Sin}(\alpha t)\,\mathrm{Cos}(\beta t) + \beta\,\mathrm{Cos}\,(\alpha t)\,\mathrm{Sin}(\beta t)]$$

$$\dot{I} = U/Z = \Phi_{max}\,[\alpha\,\mathrm{Sin}\,(\alpha t)\,\mathrm{Cos}(\beta t) + \beta\,\mathrm{Cos}\,(\alpha t)\,\mathrm{Sin}(\beta t)\,]\,/Z,$$

olur. Ohm yasasının geçerli olduğu, örnekler üzerinde görülecektir.

U gerilimine **üç boyutlu alternatif gerilim**, kısaca **uzay gerilimi**, akıma **uzay akımı** ve Z direncine de, **uzay direnci** denilecektir. Bobinin ve kondansatörün uzay dirençleri, uzay akımının ve uçları arsındaki uzay geriliminin ölçülmesi ile ölçülürler. Çünkü bu akım 50 frekanslı alternatif akım değildir.

(300) de bulunan, U uzay geriliminin.ikinci yanını, açıların toplamı ve farkı ile yazalım.

. $U = \Phi_{max}\{\alpha/2\, [Sin(\alpha + \beta)t + Sin(\alpha - \beta)t] + \beta/2[Sin(\alpha + \beta)t - Sin(\alpha - \beta)t]\}$

$$U = \Phi_{max}/2\, [(\alpha + \beta)\, Sin(\alpha + \beta)t + (\alpha - \beta)\, Sin\, (\alpha - \beta)t]$$

$$\dot{I} = \Phi_{max}\, [(\alpha + \beta)\, Sin(\alpha + \beta)t + (\alpha - \beta)\, Sin(\alpha - \beta)t]\, /(2Z),$$

Kısalığı sağlamak için,

$$\omega_1 = \alpha + \beta, \qquad \omega_2 = \alpha - \beta$$

harfleri kullanılacaktır.

(301) $U = \Phi_{max}/2\, [\omega_1 Sin(\omega_1 t) + \omega_2\, Sin(\omega_2 t)]$, $\dot{I} = \Phi_{max}\, [\omega_1 Sin(\omega_1 t) + \omega_2\, Sin(\omega_2 t)]/(2Z)$,

$$U_{1m} = \Phi_{max}\, \omega_1/2, \quad U_{2m} = \Phi_{max}\, \omega_2/2, \quad U = U_{1m}\, Sin(\omega_1 t) + U_{2m}\, Sin(\omega_2 t),$$

$$\dot{I} = U/Z, \quad Z_1 = R + j\, (L\omega_1 - 1/(C\omega_1)), \quad Z_2 = R + j\, (L\omega_2 - 1/(C\omega_2)),$$

$$\dot{I}_{1m} = U_{1m}/|Z_1|, \quad \dot{I}_{2m} = U_{2m}/|Z_2|, \quad \dot{I} = \dot{I}_{1m}\, Sin(\omega_1 t) + \dot{I}_{2m}\, Sin(\omega_2 t),$$

$$U_1 = U_{1m}/\sqrt{2}, \quad U_2 = U_{2m}/\sqrt{2}, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_{1m}/\sqrt{2}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{2m}/\sqrt{2},$$

m indisi ile, bu kavramların maksimumları ifade edilmiştir. 1 ve 2 indisi ile yazılanlar, uzay kavramlarının bileşenleri olup, işlem kuralları aşağıda gündeme gelecektir. Son satırdaki değerler, etkin değerlerdir. Eğer uzay gerilimi bir uzay direnci üzerinden geçiriliyorsa, hiçbir ayrıcalık göstermez. Uzay gerilimi uzay direncine bölünür, uzay akımı bulunur.

Uzay akımı, uzay gerilimine göre, 90^o geri fazda veya ileri fazdadır. (301) de, uzay geriliminde ve uzay akımında, iki tane sinüslü terim vardır. Bu sinüslü terimlerin her biri, bir akım gösterir. Bunların açısal hızları, yani frekansları ve genlikleri farklıdırlar. Birincisi yüksek frekanslı, ve genlikli, ikincisi ise alçak frekanslı ve genliklidirler. Bu iki akım aynı iletkenden akarlar, fakat karışmazlar. Bu nedenle uzay akımı, iki tane karmaşık sayıdan bileşene sahiptir. Fakat bu karmaşık sayıların birlikte üç parametresi vardır, üç boyutlu bir vektördürler. İki farklı frekansı ve genliği olan bir akımdır. Bu frekansların arasında organik(yapısal) bir bağ vardır. Karmaşık sayılar aralarında bağımlıdırlar. Çünkü karmaşık sayılar, Φ, ω_1, ω_2 gibi üç bağımsız parametreye sahiptirler. Φ indüktörün gerilim, ω_1 ve ω_2 de, iki akımın bağımsız frekans veya genlik parametreleridir. U uzay geriliminin ifadesinde, ω_1 veya ω_2 sıfır alınırsa, yani $\alpha = \pm \beta$ alnırsa, alternatif gerilim elde edilir. Alternatif gerilim uzay geriliminin özel halidir. Uzay geriliminin, çok daha üstün nitelikli özelikleri olmalıdır. Bir üç boyutlu alternatör üzerinde, bu üstün nitelikli özelikler, deneylerle araştırılmalıdır.

Uzay Karmaşık Sayıların İşlem Kuralları

Uzay gerilim için, her nekadar vektör denilse de, işlem kuralları göz önüne alındığında, iki elemanlı küme demek daha yerinde olacaktır. Frekansları farklı elemanların arasındaki toplam işareti yerine virgül konulup, küme notasyonu ile gösterilecektir. Çünkü bu kavramlar birbirleri ile toplanıp, çıkarılmazlar. Farklı frekanslı ve farklı genlikli bu akımlar, birbirleri ile toplandıkları zaman, karmaşık sayıların gerçel ve sanal kısımları gibidirler...

$$A = a_1\{a_2, a_3\}, \quad B = b_1\{b_2, b_3\}, \quad A \pm B = \{a_1a_2 \pm b_1b_2,\ a_1a_3 \pm b_1b_3\},$$

$$kA = a_1\{ka_2,\ ka_3\}, \quad kA \pm pA = a_1\{ka_2 \pm pa_2,\ ka_3 \pm pa_3\} = a_1\{(k \pm p)a_2,\ (k \pm p)a_3\},$$

$$A.B = a_1b_1\{a_2.\, b_2,\ a_3.\, b_3\}, \quad A/B = a_1/b_1\{a_2/b_2,\ a_3/b_3\}, \quad k^2/A = k/a_1\{k/a_2,\ k/a_3\}$$

Küme elemanlarının her ikisi de, aynı türden olmalıdır. Bu kümeler üç boyutlu uzayın karmaşık sayılarıdır ve uzay gerilimin, uzay akımın ve uzay direncin uzay karmaşık sayılarıdırlar.

Bobin ve Kondansatörden Geçen Uzay Akımı

Uzay akımı özindüklem katsayısı L olan bir bobin üzerinden geçirilsin. (262) den,

$$U_L = L\, d\dot{I}/dt$$

dir. U nun (301) den değeri yerine konulur ve (263) de olduğu gibi, entegral alınırsa,

$$U = U_{1m}\, Sin\, (\omega_1 t) + U_{2m}\, Sin\, (\omega_2 t)\}$$

(302) $\dot{I}_L = - U_{1m}/(L\omega_1)\, Cos(\omega_1 t) - U_{2m}/(L\omega_2)\, Cos(\omega_2 t)]$,

Uzay gerilim fonksiyonu ile karşılaştırmak için sinüslerle ifade edelim.

(303). $\dot{I}_L = U_{1m}/(L\omega_1)\, Sin(\omega_1 t - \pi/2) + U_{2m}/(L\omega_2)\, Sin(\omega_2 t - \pi/2)]$

(268) de bulduğumuz akımı ve verilen gerilimi, (269) da karmaşık sayıya tamamladık. Burada bulunan sinüslü terimler de, karmaşık sayıların sanal kısımlarıdır. Karmaşık sayılara tamamlayalım.

(304) $U = \{|U_1|\,[\mathrm{Cos}\,(\omega_1 t) + j\,\mathrm{Sin}\,(\omega_1 t)\,],\quad |U_2|\,[\mathrm{Cos}\,(\omega_2 t) + j\,\mathrm{Sin}\,(\omega_2 t)\,]\}$

$$X_L = \{jL\,\omega_1,\quad jL\,\omega_2\},\qquad X_{1L} = jL\,\omega_1,\qquad X_{2L} = jL\,\omega_2,$$

$$\dot{I}_L = |U_1|/(L\omega_1)\,[\mathrm{Sin}(\omega_1 t) - j\mathrm{Cos}(\omega_1 t)] + |U_2|/(L\omega_2)\,[\mathrm{Sin}(\omega_2 t) - j\,\mathrm{Cos}(\omega_2 t)]\,,$$

Karmaşık sayılar, j ile bölünmüştür. Bu bölüm işleminde akım, π/2 radyan geri faza gider, veya,

$$\dot{I}_L = \{|U_1|/(L\,\omega_1)\,[\mathrm{Cos}\,(\omega_1 t - \pi/2) + j\mathrm{Sin}\,(\omega_1 t - \pi/2)],$$
$$|U_2|/(L\,\omega_2)\,[\mathrm{Cos}\,(\omega_2 t - \pi/2) + j\,\mathrm{Sin}\,(\omega_2 t - \pi/2)]\},$$

biçiminde yazılırsa eşitlik bozulmaz. Ohm yasası ile de, aynı sonuca gelinmiştir.

Bir kondansatörün uçlarına, uzay gerilim uygulayalım. İşlemleri türev ile yapalım. Kondansatörün yükü Q ve sığası da C olsun.

(305) $U_C = Q/C,\quad dQ/dt = \dot{I},\quad dU_C = dQ/C = \dot{I}dt/C,\quad \dot{I}_C = C\,dU_C/dt$

(301) den, U uzay gerilimi yerine konulur ve türev alınırsa,

$$U = U_{1m}\,\mathrm{Sin}\,(\omega_1 t) + U_{2m}\,\mathrm{Sin}\,(\omega_2 t),$$
$$\dot{I}_C = U_{1m}\,(C\omega_1)\,\mathrm{Cos}\,(\omega_1 t) + U_{2m}\,(C\omega_2)\,\mathrm{Cos}\,(\omega_2 t)$$

olur. U uzay gerilimi ile karşılaştırmak için, kosinüsler yerine sinüsleri getirelim.

(306).. $\dot{I}_C = U_{1m}\,(C\omega_1)\,\mathrm{Sin}(\omega_1 t + \pi/2) + U_{2m}\,(C\omega_2)\,\mathrm{Sin}(\omega_2 t + \pi/2),$

Uzay kavramları karmaşık sayılarla ifade edelim.

$$U = \{|U_1|\,[\mathrm{Cos}\,(\omega_1 t) + j\,\mathrm{Sin}\,(\omega_1 t)],\quad |U_2|\,[\mathrm{Cos}\,(\omega_2 t) + j\,\mathrm{Sin}\,(\omega_2 t)]\},$$
$$X_C = \{1/(j.C\omega_1),\quad 1/(j.C\omega_2)\},\qquad X_{1C} = 1/(j.C\omega_1),\qquad X_{2C} = 1/(j.C\omega_2),$$
$$j = e^{j\,\pi/2},\quad \dot{I}_C = |U_1|\,(C\omega_1)\,[-\mathrm{Sin}(\omega_1 t) + j\,\mathrm{Cos}(\omega_1 t)] + |U_2|\,(C\omega_2)\,[-\mathrm{Sin}(\omega_2 t) + j\,\mathrm{Cos}(\omega_2 t)],$$

Karmaşık sayılar, j ile çarpılmıştır. Bu çarpma işleminde akım, π/2 radyan ileri faza gider, veya,

$$\dot{I}_C = \{|U_1|\,(C\,\omega_1)\,[\mathrm{Cos}\,(\omega_1 t + \pi/2) + j\mathrm{Sin}\,(\omega_1 t + \pi/2)],$$
$$|U_2|\,(C\,\omega_2)\,[\mathrm{Cos}\,(\omega_2 t + \pi/2) + j\,\mathrm{Sin}\,(\omega_2 t + \pi/2)]\},$$

biçiminde yazılırsa eşitlik bozulmaz. Karmaşık sayıları, üstel fonksiyonlarla gösterelim.

$$U = |U_1|\,e^{j\,(\omega 1t)} + |U_2|\,e^{j\,(\omega 2t)},\qquad \dot{I} = |\dot{I}_1|\,e^{j\,(\omega 1t + \theta)} + |\dot{I}_2|\,e^{j\,(\omega 2t + \theta)},$$

(305)'den,

(307) $\dot{I}_C = C.dU/dt = C\,|U_1|\,de^{\,j\,(\omega 1t)}/dt + C\,|U_2|\,de^{\,j\,(\omega 2t)}/dt,$

$$j = e^{j\,\pi/2},\qquad \dot{I}_C = |U_1|\,j\,(C\omega_1)\,e^{j\,(\omega 1t)} + |U_2|\,j\,(C\omega_2)\,e^{j\,(\omega 2t)},$$
$$\dot{I}_C = |U_1|\,(C\omega_1)\,e^{j\,(\omega 1t + \pi/2)} + |U_2|\,(C\omega_2)\,e^{j\,(\omega 2t + \pi/2)},\qquad \theta = \pi/2,$$

olur. j ile çarpım akımı, π/2 radyan ileri faza götürmüştür.

Uzay Akımın Peryod ve Frekansı

Birinci ve ikinci motorların açısal hızları, α ve β olsunlar. (309) eşitliklerinden birinci uzay akımın açısal hızı $\omega_1 = \alpha + \beta$, ikinci uzay akımın açısal hızı $\omega_2 = \alpha - \beta$ dır. Bu açısal hızlara dayalı olarak iki tane peryod ve frekans tanımı yapılır.

$$T_1 = 2\,\pi/\omega_1,\qquad T_2 = 2\,\pi/\omega_2,\qquad f_1 = 1/T_1,\qquad f_2 = 1/T_2$$
$$T = \{T_1,\quad T_2\},\qquad f = \{f_1,\quad f_2\}$$

uzay karmaşık sayıları ile tanımlanan T zamanına **uzay akımın peryodu,** f sayısına da **uzay akımın frekansı** denilecektir.

Uzay Gerilimlerde Ohm Yasası

Uzay gerilimini, uzay akımını ve uzay direçlerini karmaşık sayılarla ifade edelim. Yalnız bobin varsa,

(310) $U = \{\,|U_1|\,e^{j\,\omega 1\,t},\quad |U_2|\,e^{j\,\omega 2\,t}\},\quad X_{1L} = jL\,\omega_1,\quad X_{2L} = jL\,\omega_2,\quad |X_{1L}|^2 = -L^2\,\omega_1^{\,2},$

$$|X_{2L}|^2 = -L^2\,\omega_2^{\,2},\qquad X_L = \{\,jL\,\omega_1,\ \ jL\,\omega_2\,\},\qquad X_L = |\,X_L|\{e^{j\pi/2},\ e^{j\pi/2}\ \},$$
$$|X_L| = \{|X_{1L}|,\quad |X_{2L}|\},\quad X_L = \{|X_{1L}|\,e^{j\pi/2},\ |X_{2L}|\,e^{j\pi/2}\},$$
$$\dot{I}_L = U/X_L = \{|U_1|\,e^{j\,(\omega 2\,t - \pi/2)}/|X_{1L}|,\quad |U_2|\,e^{j\,(\omega 2\,t - \pi/2)}\}/|X_{2L}|\}$$

olur. Yalnız kondansatör varsa,

$X_{1C} = 1/(j\ C\ \omega_1)$, $X_{2C} = 1/(j\ C\ \omega_2)$, $X_C = \{1/(j.C\ \omega_1),\ 1/(j.C\ \omega_2)\}$,
$X_C = |X_C|\{e^{-j\pi/2},\ e^{-j\pi/2}\}$, $|X_C| = \{|X_{1C}|,\ |X_{2C}|\}$, $X_C = \{|X_{1C}|\ e^{-j\pi/2},\ |X_{2C}|\ e^{-j\pi/2}\}$,
$\dot{I}_C = U/X_C = \{|U_1|\ e^{j(\omega 2\,t+\pi/2)}/|X_{1C}|,\ \ |U_2|\ e^{j(\omega 2\,t+\pi/2)}\}/|X_{2C}|\}$

olur. X_L Bobin için sanal indüktif uzay direnç, X_C kondansatör için sanal kapasitif uzay direnç formülleri olup, uzay geriliminin uzay akımına bölünmesiyle bulunmuşlardır. Benzer biçimde diğer dirençler de hesaplanırlar. Uzay direçler, üç boyutlu ve iki elemanlı birer küme olup, uzayın karmaşık sayılarıdır. Bu formüllerle ve yukarda açıklanan işlem kuralları ile,

$U = \dot{I}Z$, $\dot{I} = U/Z$, $Z = U/\dot{I}$

formülleri sağlanırlar.

Bir dirençle bir bobin seri bağlansınlar. Devre uzay akımla beslensin. Bu problemin alternatif akımda çözümü, (268) de aşağıdaki formüllerle verilmiştir.

$U_R + U_L = R\dot{I} + Ld\dot{I}/dt = U_m\,Sin(\omega t)$, $Z = R + jL\omega$, $\dot{I} = U_m/|Z|Sin(\omega t - \varphi)$,

(311) $R\dot{I} + Ld\dot{I}/dt = U_{1m}\ Sin(\omega_1 t) + U_{1m}\ Sin(\omega_2 t)]$

Bu denklemin ikinci tarafında iki tane sinüslü terim vardır. Özel çözümü bulmak için, her iki terimin ayrı ayrı çözümü yapılır, toplanır.

$Z_1 = R + jL\ \omega_1$, $Z_2 = R + jL\ \omega_2$, $|Z_1|^2 = R^2 + L^2\ \omega_1^2$,
$|Z_2|^2 = R^2 + L^2\ \omega_2^2$, $Cos\ \varphi_1 = R/|Z_1|$, $Sin\ \varphi_1 = L\ \omega_1/|Z_1|$
$Cos\ \varphi_2 = R/|Z_2|$, $Sin\ \varphi_2 = L\ \omega_2/|Z_2|$
$\dot{I}_L = U_{1m}/|Z_1|\ Sin(\omega_1 t - \varphi_1) + U_{2m}/|Z_2|\ Sin(\omega_2 t - \varphi_2)]$

Uzay karmaşık sayılarla çözelim. Önce uzay gerilimini, uzay direncini ve uzay akımını uzay karmaşık sayılara tamamlayalım.

(312) $U = \{|U_1|\ e^{j\,\omega 1t},\ \ |U_2|\ e^{j\,\omega 2\,t}\}$, $Z = \{Z_1,\ Z_2\} = \{R + jL\ \omega_1,\ \ R + jL\ \omega_2\}$,
$Z = |Z|\{e^{j\varphi 1},\ \ e^{j\varphi 2}\}$, $|Z| = \{|Z_1|,\ \ |Z_2|\}$, $Tg(\varphi_1) = L\ \omega_1/R$,
$Tg(\varphi_2) = L\ \omega_2/R$, $Z = \{|Z_1|\ e^{j\varphi 1},\ \ |Z_2|\ e^{j\varphi 2}\}$,

Bu formüllerde Ohm yasasının sağlandığı kolayca görülür.

$\dot{I}_L = U/Z = \{|U_1|/|Z_1|\ e^{j(\omega 1\,t-\ \varphi 1)},\ \ |U_2|/|Z_2|\ e^{j(\omega 2\,t-\ \varphi 2)}\}$,

Bir dirençle bir kondansatör seri bağlansınlar. Devre uzay gerlimle beslensin. Bu problemin çözümü (275) ve (276) da aşağıdaki formüllerle verilmiştir.

$U_R + U_C = R\dot{I} + 1/C\int\dot{I}dt = U_m\,Sin(\omega t)$, $R\ d\dot{I}/dt + \dot{I}/C = U_m\ \omega\ Cos(\omega t)$,
$Z = R + 1/(j.C\omega)$, $\dot{I} = U_m/|Z|\ Sin(\omega t + \varphi)$,

(313) $Rd\dot{I}/dt + \dot{I}/C = U_{1m}\ \omega_1\ Cos(\omega_1 t) + U_{2m}\ \omega_2\ Cos(\omega_2 t)$,
$\dot{I}_C = U_{1m}/|Z_1|\ Sin(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{2m}/|Z_2|\ Sin(\omega_2 t + \varphi_2)$,

Bu sonucu bulmak için, iki kosinüslü terimin çözümleri (275)'deki gibi ayrı, ayrı bulunur ve toplanır.

$X_{1C} = 1/(j.C\omega_1)$, $Z_1 = R + 1/(j.C\omega_1)$, $X_{2C} = 1/(j.C\omega_2)$, $Z_2 = R + 1/(j.C\omega_2)$,
$|Z_1|^2 = R^2 + 1/(C^2\ \omega_1^2)$, $|Z_2|^2 = R^2 + 1/(C^2\ \omega_2^2)$, $Cos\ \varphi_1 = R/|Z_1|$,
$Sin\ \varphi_1 = |X_{1C}|/|Z_1|$, $Cos\ \varphi_2 = R/|Z_2|$, $Sin\ \varphi_2 = |X_{2C}|/|Z_2|$
$\dot{I}_C = U_{1m}/|Z_1|\ Sin(\omega_1 t + \varphi_1) + U_{2m}/|Z_2|\ Sin(\omega_2\ t + \varphi_2))$,
$\dot{I}_C = \dot{I}_{1m}\,Sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \dot{I}_{2m}\ Sin(\omega_2\ t + \varphi_2))$,

Bu problemi uzay karmaşık sayılarla çözelim. Önce bu kavramları uzay karmaşık sayılara tamamlayalım.

(314) $U = \{|U_1|\ e^{j\,\omega\,t},\ |U_2|\ e^{j\,\omega 2\,t}\}$, $Z = \{\ R + X_{1C},\ \ R + X_{2C}\ \}$
$Z = \{Z_1,\ Z_2\}$, $Z = \{|Z_1|\ e^{-j\varphi 1},\ \ |Z_2|\ e^{-j\varphi 2}\}$, $|Z| = \{|Z_1|,\ \ |Z_2|\}$
$Z = \{|Z_1|,\ \ |Z_2|\}\{e^{-j\varphi 1},\ \ e^{-j\varphi 2}\}$, $Z = \{|Z_1|\ e^{-j\varphi 1},\ \ |Z_2|\ e^{-j\varphi 2}\}$,
$\dot{I}_C = U/Z = \{|U_1|/|Z_1|\ e^{j(\omega 1\,t+\varphi 1)},\ \ |U_2|/|Z_2|\ e^{j(\omega 2\,t+\varphi 2)}\}$,
$\dot{I}_C = \{\ |\dot{I}_1|\ e^{j(\omega 1\,t+\varphi 1)},\ \ |\dot{I}_2|\ e^{j(\omega 2\,t+\varphi 2)}\}$

Bir bobinle bir kondansatör seri bağlansınlar. Devre uzay akımıyla beslensin. Bu problemin alternatif akımla çözümü, (278) de aşağıdaki formüllerle verilmiştir.

$U_L + U_C = Ld\dot{I}/dt + 1/C\int\dot{I}dt = U_m\,Sin(\omega t)$, $Ld^2\dot{I}/dt^2 + \dot{I}/C = U_m\ \omega\ Cos(\omega t)$,
$X = j[L\omega - 1/(C\omega)]$, $\dot{I} = -U_m\,Cos\ (\omega t)/Z$, $L\omega - 1/(C\omega) > 0$ ise,

$\dot{I}_L = U_m/|X| \, Sin\,(\omega t - \pi/2)$, $L\omega - 1/(C\omega)<0$ ise, $\dot{I}_C = U_m/|X| \, Sin\,(\omega t + \pi/2)$,

(315) $Ld^2\dot{I}/dt^2 + \dot{I}/C = U_{1m}\,\omega_1\, Cos(\omega_1 t) + U_{2m}\,\omega_2\, Cos(\omega_2 t)]$

İki kosinüslü terimlerin ayrı ayrı çözümleri bulunur, toplanır.

$\omega_1 >0$, $\omega_2 >0$, $L\omega_1 - 1/(C\omega_1) >0$, $L\omega_2 - 1/(C\omega_2) >0$, $X_{1LC} = j(L\omega_1 - 1/(C\omega_1))$,
$X_{2LC} = j(L\omega_2 - 1/(C\omega_2))$, $\varphi = \pi/2$, $\dot{I}_L = - U_{1m}/X_{1LC}\, Cos\,(\omega_1 t) - U_{2m}/X_{2LC}\, Cos\,(\omega_2 t)$,
$\dot{I}_L = \dot{I}_{1m}\, Sin(\omega_1 t - \pi/2) + \dot{I}_{2m}\, Sin(\omega_2 t - \pi/2)$, $\omega_1>0$, $\omega_2>0$, $L\omega_1 - 1/(C\omega_1) <0$
$L\omega_2 - 1/(C\omega_2) <0$, $\dot{I}_C = U_{1m}/X_{1LC}\, Cos\,(\omega_1 t) + U_{2m}/X_{2LC}\, Cos\,(\omega_2 t)$,

X_{1LC} ve X_{2LC}'nin negatif işaretleri, $\dot{I}_C$'yi pozitif kılmış ve $\pi/2$ radyan ileri faza götürmüştür..

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{1m}\, Sin(\omega_1 t + \pi/2) + \dot{I}_{2m}\, Sin(\omega_2 t + \pi/2)$$

Devre birincide indüktif, ikincide kapasitiftir.

Bu problemi uzay karmaşık sayılarla çözelim. Önce bu kavramları, uzay karmaşık sayılara tamamlayalım.

(316) $U = \{|U_1|\, e^{j\,\omega 1\, t},\ |U_2|\, e^{j\,\omega 2\, t}\}$, $X_{LC} = \{jL\omega_1 - j/(C\omega_1),\ jL\omega_2 - j/(C\omega_2)\}$
$X_{LC} = |X_{LC}|\,\{e^{j\pi/2},\ e^{j\pi/2}\} = \{|X_{1LC}|,\ |X_{2LC}|\}\{e^{j\pi/2},\ e^{j\pi/2}\} = \{|X_{1LC}|\, e^{j\pi/2}, |X_{2LC}|\, e^{j\pi/2}\}$,
$L\omega_1 - 1/(C\omega_1) >0$, ise, $\dot{I}_L = U/X = |\dot{I}_1|\, e^{j\,(\omega 1\, t - \pi/2)},\ |\dot{I}_2|\, e^{j\,(\omega 2\, t - \pi/2)}\}$,
$L\omega_1 - 1/(C\omega_1) <0$, ise, $\dot{I}_C = U/X = |\dot{I}_1|\, e^{j\,(\omega 1\, t + \pi/2)},\ |\dot{I}_2|\, e^{j\,(\omega 2\, t + \pi/2)}\}$,

Devre birinci uzay akımında sanal indüktif, ikinci uzay akımında sanal kapasitiftir. Çünkü $L\omega_1 - 1/(C\omega_1)$ ifadesi, işaret değiştirdiğinden, j işaret değiştirir ve j'nin argümanı işaret değiştirir.

Bir bobinle bir kondansatör ve bir direnç seri bağlansınlar. Devre uzay gerilimiyle beslensin. Bu problemin çözümü (279), (280) ve (281) de aşağıdaki formüllerle verilmiştir.

$U = U_m\, Sin(\omega t)$, $UR + U_L + U_C = R\dot{I} + Ld\dot{I}/dt + 1/C \int \dot{I} dt = U_m\, Sin(\omega t)$,
$Rd\dot{I}/dt + Ld^2\dot{I}/dt^2 + \dot{I}/C = U_m\, \omega\, Cos(\omega t)$, $Z = R + j[L\omega - 1/(C\omega)]$, $\dot{I}_L = U_m/|Z|\, Sin\,(\omega t - \varphi)$,

Uzay akımına uygulanırsa,

(317) $Ld^2\dot{I}/dt^2 + Rd\dot{I}/dt + \dot{I}/C = U_{1m}\omega_1\, Cos(\omega_1 t) + U_{2m}\,\omega_2\, Cos\,(\omega_2 t)$,

İki kosinüslü terimlerin ayrı ayrı çözümleri bulunur ve toplanır.

$\omega_1 >0$, $\omega_2 >0$, $L\,\omega_1 - 1/(C\,\omega_1) >0$, $L\,\omega_2 - 1/(C\,\omega_2) >0$, $Z_1 = R + jL\,\omega_1 - j/(C\,\omega_1)$,
$Z_2 = R + jL\,\omega_2 - j/(C\,\omega_2)$, $|Z_1|^2 = R^2 + [L\,\omega_1 - 1/(C\,\omega_1)]^2$, $|Z_2|^2 = R^2 + [L\,\omega_2 - 1/(C\,\omega_2)]^2$,
$Cos\,\varphi_1 = R/|Z_1|$, $Sin\,\varphi_1 = [L\,\omega_1 - 1/(C\,\omega_1)]/|Z_1|$, $Cos\,\varphi_2 = R/|Z_2|$,
$Sin\,\varphi_2 = [L\,\omega_2 - 1/(C\,\omega_2)]/|Z_2|$, $\dot{I}_L = U_{1m}/|Z_1|\, Sin\,(\omega_1 t - \varphi_1) + U_{2m}/|Z_2|\, Sin\,(\omega_2 t - \varphi_2)$,
$\omega_1 >0$, $\omega_2 >0$, $L\,\omega_1 - 1/(C\omega_1) <0$, $L\,\omega_2 - 1/(C\omega_2) <0$,
$\dot{I}_C = \dot{I}_{1m}\, Sin\,(\omega_1 t + \varphi_1) + \dot{I}_{2m}\, Sin\,(\omega_2 t + \varphi_2)$,

Devre birinci halde indüktif, ikinci halde kapasitiftir.

Uzay karmaşık sayılarla bu problemi çözelim. Önce uzay gerilimini, uzay akımını ve uzay direncini, uzay karmaşık sayılara dönüştürelim.

$U = U = \{|U_1|\, e^{j\,\omega\, t},\ |U_2|\, e^{j\,\omega 2\, t}\}$, $Z = \{R + jL\,\omega_1 - j/(C\,\omega_1),\ R + jL\,\omega_2 - j/(C\omega_2)\}$
$|Z| = \{|Z_1|,\ |Z_2|\}$, $Z = \{|Z_1|,\ |Z_2|\}\{e^{j\varphi 1},\ e^{j\varphi 2}\} = \{|Z_1|\, e^{j\varphi 1},\ |Z_2|\, e^{j\varphi 2}\}$,
$\dot{I}_L = U/Z = \{|U_1/Z_1|\, e^{j\,(\omega 1 t - \varphi 1)},\ |U_2/Z_2|\, e^{j(\omega 2\, t - \varphi 2)}\}$,
$\dot{I}_C = U/Z = \{|U_1/Z_1|\, e^{j\,(\omega 1 t + \varphi 1)},\ |U_2/Z_2|\, e^{j(\omega 2\, t + \varphi 2)}\}$,

Devre birinci halde indüktif, ikinci halde kapasitiftir. Çünkü Z karmaşık direncinin sanal kısmı, ikinci halde argümanının tanjantı ve dolaysı ile argümanı, işaret değiştirirler.

Uzay akımı üç parametreye bağlı bir akım olarak tanımlandı. Üçüncü parametre, ikinci bir motorla sağlandı. İkinci motor yerine, indüktöre frekanslı bir akım verilirse, aynı sonuca varılır. Gene üç parametre bulunur. Fakat (301) gerilim ifadesindeki iki kosinüslü terim getirilemez, akım sinizoidal olmaz, Ohm yasası uygulanamaz. Bu nedenle iki frekanslı akım oluşmaz ve burada olduğu gibi, belirli matematik kurallar altında işlemler yürütülemez. Diğer yandan gerçekleşen olay, iki peryodik hareketin girişimidir. Halbuki motorların hareketi, kangal düzleminin normalinin ucuna, küresel bir hareket verir. Doğrusal hareket, dairesel hareket ve küresel hareket bir boyutlu, iki boyutlu ve üç boyutlu uzayların basit hareketleridir. İki veya üç bağımsız bileşene ayrılamazlar. Küresel hareket, iki basit dönme hareketinin oluşturduğu bir hareket olmakla beraber, iki basit dönme hareketin doğrusal toplamı değildir. Örneğin, uzayda dairesel helis hareketi, bileşik harekettir. İki basit hareketin bileşkesidir. İkinci motor birinci motoru döndürmektedir. Hareketleri birbirlerinden bağımsızdır. Fakat biri diğerini, eksenine dik bir düzlem içinde dödürdüğü için, sonuçta oluşan küresel hareket, bu iki basit hareketin doğrusal toplamı değildir. Yani küresel hareketin yer vektörü, iki dönme hareketinin yer vektörleri toplamı değildir. Küresel hareket ile motorların dönme hareketleri arasında, bağımlılık vardır, fakat uzay helisinde olduğu gibi, doğrusal bağımlılık yoktur. Kuranportör iletişiminde, birden fazla, farklı frekanslı akımlar, aynı iletkenden aynı zamanda iletilebilirler. Birbirlerine karışmazlar ve destek olmazlar. Çünkü bu akımlar birbirlerinden bağımsız olup, her biri ikişer parametreye bağlıdır. Her biri indüvinin bir eksen etrafında dönmesi ile, yani düzlemsel bir hareketi ile oluşmaktadırlar. Uzay akımda ise, iki frekanslı akım aralarında bağımlı olup, ikisi birlikte üç parametreye bağlıdırlar. Basit küresel bir hareket sonucu oluşmuşlardır..Bu nedenle bu iki frekanslı akım, yapısal yönleri ile bağımlı olup, birbirlerine destek olurlar ve bağımsız iki veya üç bileşene ayrılamazlar. Uzay akım bu özeliği nedeni ile, bir çok yeni ve üstün nitelikli özeliklere sahip olacaktır.

Örnek 11,:

Etkin direnci R=15 Ω, olan direnç teli ile, sanal direnci L = 17.5 mH, olan bobin paralel bağlanmışlardır. Bu devreye $f_1 = 50$ ve $f_2 = 70$ frekanslı alternatörde, Φ = 1 Weber magnetik indüksiyon uygulanmıştır. Kollardaki ve ana koldaki akımları, ana koldan geçen akımın gerilime göre faz açılarını, paralel devreye denk seri devrenin etkin ve sanal dirençlerini bulunuz.

Aşağıda akımların ve dirençlerin üç indisinden birincisi, frekans numarası, ikincisi paralel kol numarası. üçüncüsü de, direncin türünü belirleyen harftir.

R = 15, L= 0,0175, f1 = 50, f2 = 70, $w_1 = 2\pi.f_1 = 314{,}16$ Radyan/sn,
$w_2 = 2\pi.f_2 = 439{,}82$ Radyan/sn, Φ = 1 Weber, $U_1 = \Phi.w_1/2 = 157{,}08$ V,
$U_2 = \Phi.w_2/2 = 220$ V, $X_{12L} = j.L.100.\pi = 5.50\,j\ \Omega$, $\dot{I}_{11R} = U_1/R = 10{,}47$ A,
$\dot{I}_{12L} = U_1/X_{12L} = -28{,}57\,j$ A, $\dot{I}_1 = \dot{I}_{11R} + \dot{I}_{12L} = 10{,}47 - 28{,}57\,j$ A,
$|\dot{I}_1| = \sqrt{(\dot{I}_{11R}^2 + \dot{I}_{12L}^2)} = 30{,}43$ A, $\varphi_{1\dot{I}} = -69^o52'$, $Z_1 = 1/(1/R + 1/X_{12L}) = 1{,}78 + 4{,}85j\ \Omega$,
$|Z_1| = R.X_{12L}/\sqrt{(R^2 + X_{12L}^2)} = 5{,}16\ \Omega$, $\varphi_{1Z} = 69^o52'$, $X_{22L} = j.L.140.\pi = 7{,}70\,j\ \Omega$,
$\dot{I}_{21R} = U_2/R = 14{,}66$ A, $\dot{I}_{22L} = U_2/X_{22L} = -28{,}57\,j$ A, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{21R} + \dot{I}_{22L} = 14{,}67 - 28{,}57\,j$ A,
$|\dot{I}_2| = \sqrt{(\dot{I}_{21R}^2 + \dot{I}_{22L}^2)} = 42.62$ A, $\varphi_{2\dot{I}} = -62^o50'$, $Z_2 = 1/(1/R + 1/X_{22L}) = 3{,}13 + 6{,}09\,j\ \Omega$,
$|Z_2| = R.X_{22L}/\sqrt{(R^2 + X_{22L}^2)} = 6{,}85\ \Omega$, $\varphi_{2Z} = 62^o50'$, $\dot{I}_1 = U_1/Z_1 = 10{,}47 - 28{,}57\,j$ A,
$\dot{I}_2 = U_2/Z_2 = 14.67 - 28{,}57\,j$ A, $R_1 = |Z_1|Cos(\varphi_{1Z}) = 1{,}78\ \Omega$, $X_{1L} = |Z_1|.Sin(\varphi_{1Z}) = 4{,}85\ \Omega$,
$R_2 = |Z_2|Cos(\varphi_{2Z}) = 3{,}13\ \Omega$, $X_{2L} = |Z_2|.Sin(\varphi_{2Z}) = 6{,}09\ \Omega$,

Son bölümde verilen R_1, X_{1L}, R_2, X_{2L} değerleri, denk devrenin etkin ve sanal dirençleri, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ denk devrenin akımları, φ_{1Z} ve φ_{2Z} de, denk devre akımlarının, faz açılarıdır..

Örnek 12

R = 7 Ω etkin direnci ile, C = 152 μF'lık bir kondansatör paralel bağlanmışlardır. Uçlarına $f_1 = 50$ ve $f_2 = 70$ frekansalı alternatörde, Φ = 1 Weber magnetik indüksiyon vektörü uygulanmıştır. Kollardan ve ana koldan geçen akımları, bu akımların gerilime göre faz açılarını ve bu devreye denk seri devrenin etkin ve sanal dirençlerini bulunuz. Problem yukardakine çok yakındır.

R = 7Ω, C = 0.000152 μF, f1 = 50, f2 = 70, $w_1 = 2\pi.f_1 = 314{,}16$ Radyan/sn,
$w_2 = 2\pi.f_2 = 439{,}82$ Radyan/sn, Φ = 1 Weber, $U_1 = \Phi.w_1/2 = 157{,}08$ V,
$U_2 = \Phi.w_2/2 = 220$ V, $X_{12C} = 1/(j.C.100.\pi) = -20{,}94\,j\ \Omega$, $\dot{I}_{11R} = U_1/R = 22{,}44$ A,
$\dot{I}_{12C} = U_1/X_{12C} = 7{,}50\,j$ A, $\dot{I}_1 = \dot{I}_{11R} + \dot{I}_{12C} = 22{,}44 + 7{,}50\,j$ A,
$|\dot{I}_1| = \sqrt{(\dot{I}_{11R}^2 + \dot{I}_{12L}^2)} = 23{,}66$ A, $\varphi_{1\dot{I}} = 18^o\,29'$, $Z_1 = 1/(1/R + 1/X_{12C}) = 6{,}30 - 2{,}10\,j\ \Omega$,
$|Z_1| = R.X_{12C}/\sqrt{(R^2 + X_{12C}^2)} = 6{,}64\ \Omega$, $\varphi_{1Z} = -18^o\,29'$, $\dot{I}_1 = U_1/Z_1 = 22{,}44 + 7{,}50\,j$ A,

$X_{22C} = 1/(j.C.140.\pi) = -14{,}96\ j\ \Omega$, $\dot{I}_{21R} = U_2/R = 31{,}42$ A, $\dot{I}_{22C} = U_2/X_{22C} = 14{,}70\ j$ A,
$\dot{I}_2 = \dot{I}_{21R} + \dot{I}_{22C} = 31{,}42 + 14{,}70\ j$ A, $|\dot{I}_2| = \sqrt{}(\dot{I}_{21R}^2 + \dot{I}_{22C}^2) = 34{,}69$ A, $\varphi_{2\dot{I}} = 25^o\ 04'$,
$Z_2 = 1/(1/R + 1/X_{22C}) = 5{,}74 - 2{,}69\ j\ \Omega$, $|Z_2| = R.X_{22C}/\sqrt{}(R^2 + X_{22C}^2) = 6{,}34\ \Omega$,
$\varphi_{2Z} = -25^o\ 04'$, $\dot{I}_2 = U_2/Z_2 = 31{,}42 + 14{,}70\ j$ A,
$R_1 = |Z_1|Cos(\varphi_{1Z}) = 6{,}3\ \Omega$, $X_{1C} = |Z_1|.Sin(\varphi_{1Z}) = -2{,}1\ \Omega$,
$R_2 = |Z_2|Cos(\varphi_{2Z}) = 5{,}74\ \Omega$, $X_{2C} = |Z_2|.Sin(\varphi_{2Z}) = -2{,}69\ \Omega$,

Son bölümde verilen R_1, X_{1C}, R_2, X_{2C} değerleri, denk devrenin etkin ve sanal dirençleri, $\dot{I}_1$ ve $\dot{I}_2$ denk devrenin akımları, $\varphi_{1\dot{I}}$ ve $\varphi_{2\dot{I}}$, denk devre akımlarının argümanları, φ_{1Z}, φ_{2Z} açıları da, gerilimin ekseni başlangıç ekseni olduğundan, akımların faz açılarıdır. .

Örnek 13

Paralel bir devrenin birinci kolu üzerinde, $R_1 = 12\ \Omega$'luk bir etkin direnç ile, self katsayısı, L = 8.3 mH olan, bir bobin seri bağlanmış ve ikinci kolda, $R_2 = 2\ \Omega$'luk bir etkin dirençle, sığası, C = 685 μF olan, bir kondansatör seri bağlanmıştır. Devrenin uçlarına,
$f_1 = 40$ ve $f_2 = 70$ frekansalı alternatörde, $\Phi = 1$ Weber magnetik indüksiyon vektörü uygulanmıştır. Kollardan ve ana koldan geçen akımları, bu akımların gerilime göre, faz açılarını, paralel devreye denk seri devrenin etkin ve sanal dirençlerini bulunuz.

$R_1 = 12\ \Omega$, L = 0,0083 mH, $R_2 = 2\ \Omega$, C = 0.000685 μF, f1 = 40, f2 = 70,
$w_1 = 2\pi.f_1$, $w_1 = 251{,}33$ Radyan/sn, $w_2 = 2\pi.f_2 = 439{,}82$ Radyan/sn, $\Phi = 1$ Weber,
$U_1 = \Phi.w_1/2$, $U_1 = 125{,}66$ V, $U_2 = \Phi.w_2/2 = 220$ V, $X_{11L} = j.L.80.\pi = 2{,}09\ j\ \Omega$,,
$X_{12C} = 1/(j.C.80.\pi) = -5{,}81\ j\ \Omega$, $Z_{11RL} = R_1 + X_{11L} = 12 + 2{,}09\ j\ \Omega$, ,
$\dot{I}_{11RL} = U_1/Z_{11RL} = 10{,}16 - 1{,}77\ j$ A, $Z_{12RC} = R_2 + X_{12C}\ \Omega = 2 - 5{,}81\ j\ \Omega$,
$\dot{I}_{12RC} = U_1/Z_{12RC} = 6{,}66 + 19{,}34\ j$ A, $\dot{I}_1 = \dot{I}_{11RL} + \dot{I}_{12RC} = 16{,}82 + 17{,}57\ j$ A,,
$|\dot{I}_1| = \sqrt{}(\dot{I}_{11RL}^2 + \dot{I}_{12RC}^2) = 24{,}33$ A, $\varphi_{1\dot{I}} = 46^o\ 15'$, $Z_1 = 1/(1/Z_{11RL} + 1/Z_{12RC})$,
$Z_1 = 3{,}57 - 3{,}73\ j\ \Omega$, $|Z_1| = 5{,}17\ \Omega$, $\varphi_{1Z} = -46^o\ 15'$, $\dot{I}_1 = U_1/Z_1 = 16{,}82 + 17{,}57\ j$ A,
$X_{21L} = j.L.140.\pi = 3{,}65\ j\ \Omega$,, $X_{22C} = 1/(j.C.140.\pi) = -3{,}32\ j\ \Omega$,
$Z_{21RL} = R_1 + X_{21L}, = 12 + 3{,}65\ j\ \Omega$, $\dot{I}_{21RL} = U_2/Z_{21RL} = 16{,}77 - 5{,}1\ j$ A,
$Z_{22RC} = R_2 + X_{22C} = 2 - 3{,}32\ j\ \Omega$,, $\dot{I}_{22RC} = U_2/Z_{22RC} = 29{,}29 + 48{,}61\ j$ A,
$\dot{I}_2 = \dot{I}_{21RL} + \dot{I}_{22RC} = 40{,}1 + 43{,}5\ j$ A, $|\dot{I}_2| = \sqrt{}(\dot{I}_{21RL}^2 + \dot{I}_{22RC}^2) = 63{,}36$ A, $\varphi_{2\dot{I}} = 43^o\ 22'$,
$Z_2 = 1/(1/Z_{21RL} + 1/Z_{22RC})$, $Z_2 = 2{,}52 - 2{,}38\ j\ \Omega$, , $|Z_2| = 3{,}47\ \Omega$, , $\varphi_{2Z} = -43^o\ 22'$,
$\dot{I}_2 = U_2/Z_2 = 46{,}1 + 43{,}5\ j$ A, $R_1 = |Z_1|Cos(\varphi_{1Z}) = 3{,}57\ \Omega$, $X_{1C} = |Z_1|.Sin(\varphi_{1Z}) = -3{,}73\ \Omega$,
$R_2 = |Z_2|Cos(\varphi_{2Z}) = 2{,}52\ \Omega$, $X_{2C} = |Z_2|.Sin(\varphi_{2Z}) = -2{,}38\ \Omega$,

Son bölmde bulunan değerler, paralel devreye denk devrenin etkin ve sanal dirençleri, denk devrenin argümanlar ve faz açılarıdır. Akım, ana koldaki akımın sağlamasıdır.

Kısa bir anlatımla,
$U = |U|e^{j\omega t}$, $\dot{I} = |\dot{I}|e^{j(\omega t + \theta)}$, $\dot{I}_1 = |\dot{I}_1|e^{j(\omega t + \theta 1)}$, $\dot{I}_2 = |\dot{I}_2|e^{j(\omega t + \theta 2)}$,
$Z = |Z|\ e^{j\varphi}$, $Z_1 = 1/(1/Z_{11RL} + 1/Z_{12RC})$, $|Z_1| = 5{,}17\ \Omega$, $\varphi_{1Z} = -46^o\ 15'$,
$Z_1 = |Z_1|\ e^{j\varphi 1Z}$, $Z_2 = 1/(1/Z_{21RL} + 1/Z_{22RC}) = 2{,}52 - 2{,}38\ j\ \Omega$, , $|Z_2| = 3{,}47\ \Omega$,
$\varphi_{2Z} = -43^o\ 22'$, $Z_2 = |Z_2|\ e^{j\varphi 2Z}$, $\dot{I}_1 = U_1/Z_1 = \dot{I}_{1m}\ e^{j(\omega 1t + \varphi 1Z)}$, $\dot{I}_2 = U_2/Z_2 = \dot{I}_{2m}\ e^{j(\omega 2\ t + \varphi 2Z)}$,
$R_1 = |Z_1|\ Cos(\varphi_{1Z}) = 3{,}57\ \Omega$, $X_{1C} = |Z_1|.Sin(\varphi_{1Z}) = -3{,}73\ \Omega$,
$R_2 = |Z_2|Cos(\varphi_{2Z}) = 2{,}52\ \Omega$, $X_{2C} = |Z_2|.Sin(\varphi_{2Z}) = -2{,}38\ \Omega$,
olur.

Uzay Akım Devrelerinde Güç

Uzay gerilimi ve uzay akımı, ani değerleri ile ve (301) gösterilimi ile göz önüne alalım.

(318) $U = \sqrt{}2\{U_1\ Sin\ (\omega_1 t)\ ,\quad U_2\ Sin\ (\omega_2 t)\ \}$,
$\dot{I} = \sqrt{}2\ \{\dot{I}_1\ Sin\ (\omega_1 t + \varphi_1),\quad \dot{I}_2\ Sin(\omega_2 t + \varphi_2)\ \}$

Φ ile ifade edilen akı sabiti ve açısal hız katsayısı, mutlak değerlerin içine katılmıştır. Bu formüllerle devreye verilen gücü yazalım.

(319) $p = U\dot{I} = \{2\ U_1\ \dot{I}_1\ Sin\ (\omega_1 t)\ Sin(\omega_1 t + \varphi_1),\quad 2U_2\dot{I}_2\ Sin(\omega_2 t)\ Sin(\omega_2 t + \varphi_2)\ \}$

Çarpım biçiminde olan bu sinüslü terimleri, toplam bi çiminde yazalım.

(320) $p = \{U_1\dot{I}_1\ [Cos(-\varphi_1) - Cos\ (2\omega_1 t + \varphi_1)],\quad U_2\dot{I}_2\ [Cos(-\varphi_2) - Cos\ (2\omega_2 t + \varphi_2)]\ \}$

Küme elemanlarının birinci terimine **uzay etkin güç**, ikinci elemanına **uzay fülüktüant güç,** bu güçlerin mutlak değerine, **uzay görünen güç** ve uzay görünen gücün düşey bileşenine de, **uzay tepkin güç** denilecektir.

(321) $P_1 = U_1\dot{I}_1 \, Cos(-\varphi_1)$, $Q_1 = U_1\dot{I}_1 \, Sin(-\varphi_1)$, $P_2 = U_2\dot{I}_2 \, Cos(-\varphi_2)$,
$Q_2 = U_2\dot{I}_2 \, Sin(-\varphi_2)$, $N_1 = U_1\dot{I}_1$ $N_2 = U_2\dot{I}_2$

Alternatif akımda olduğu gibi, burada da, uzay gerilimi ile uzay akımın eşleniğinin çarpımına, uzay akımın uzay gücü denilecektir. Uzay güç,

(322) $p = \mathbf{U}.\bar{\dot{\mathbf{I}}} = \{|U_1|\, e^{j\,\omega 1\, t},\ \ |U_2|\, e^{j\,\omega 2\ t}\}\{|\dot{I}_1|\, e^{j\,(-\,\omega 1\ t-\varphi 1)},\ \ |\dot{I}_2|\, e^{j\,(-\,\omega 2\ t-\varphi 2)}\}$
$p = \{|U_1\dot{I}_1|\, e^{-j\varphi 1},\ \ |U_2\dot{I}_2|\, e^{-j\,\varphi 2}\}$

olup, iki elemanlı bir kümedir. Bu gücün iki bileşeni P, Q ve N mutlak değeri,

$P = \{|U_1\dot{I}_1|\, Cos(\varphi_1),\ \ |U_2\dot{I}_2|\, Cos(\varphi_1)\}$, $Q = -\,\{|U_1\dot{I}_1|\, Sin(\varphi_1),\ \ |U_2\dot{I}_2|\, Sin(\varphi_2)\}$
$p = P + jQ$, $N = \{|U_1\bar{\dot{I}}_1|,\ \ |U_2\bar{\dot{I}}_2|\}$

dır. Her üçü de iki elemanlı bir kümedir.

Örnek 14

Dirençlerin üç indisinden birincisi frekans numarasını, ikincisi paralel kol numarasını ve üçüncüsü de, harf olup, direncin türünü gösterir. Akımlarda ve gerilimlerde birinci indis frekans numarası, ikinci indis paralel kol numarasıdır.

Uzay karmaşık dirençleri ile verilen üç almaçtan ilk ikisi paralel, üçüncüsü bu paralel devre ile seri bağlanmışlardır. Almaçların şebekeden çektikleri etkin gücü, tepkin gücü, görünen gücü ve güç katsayısını hesaplayınız.

$R_1 = 6\ \Omega$, $C_1 = 954\ \mu F.$, $R_2 = 14\ \Omega$, $L_2 = 7$ mH., $R_3 = 8\ \Omega$, $L_3 = 4$ mH.
$\alpha = 50\pi$ rad/sn, $\beta = 20\pi$ rad/sn, $\omega_1 = 70\pi$ rad/sn, $\omega_2 = 30\pi$ rad/sn, $f_1 = 35$, $f_2 = 15$,
$\Phi_{max} = 1$Wb. $|U_1| = \sqrt{2}\ \Phi_{max}\,\omega_1/2 = 155{,}5$ V, $|U_2| = \sqrt{2}\ \Phi_{max}\,\omega_2/2 = 66{,}64$ V ,
$X_{11C} = 10^6/(j\ C_1\,\omega_1) = -\,4{,}77\ j\ \Omega$, $X_{21C} = 1/(j\ C_1\omega_2) = -11{,}12\ j\ \Omega$,
$X_{12L} = j.L_2\omega_1 = 1{,}54\ j\ \Omega$, $X_{22L} = j.L_2\omega_2, = 0{,}66\ j\ \Omega$, $X_{13L} = j.L_3\omega_1 = 0{,}88\ j\ \Omega$
$X_{23L} = j.L_3\omega_2 = 0{,}38\ j\ \Omega$, $Z_1 = \{R_1 + X_{11C},\ \ R_1 + X_{21C})\ \Omega$,
$Z_2 = \{R_2 + X_{12L},\ \ R_2 + X_{22L}\}\ \Omega$, $Z_3 = \{R_3 + X_{13L},\ \ R_3 + X_{23L}\}\ \Omega$

olsun. Z_1 , Z_2 , Z_3 almaçların karmaşık dirençleridir. V_1 paralel devre uçları arasındaki, birinci frekanslı akımının gerilimi, V_2 de paralel devre uçları arsındaki, ikinci frekanslı akımın gerilimi olsun.

$V/\dot{I} = Z_1Z_2/(Z_1 + Z_2)$, $Y = Z_1Z_2/(Z_1 + Z_2) + Z_3 = (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1)/(Z_1 + Z_2)$
$Z_1 = \{Z_{11},\ \ Z_{21}\}$, $Z_2 = \{Z_{12},\ \ Z_{22}\}$, $Z_3 = \{Z_{13},\ \ Z_{23}\}$, $Y = \{Y_1,\ \ Y_2\}$
$Z_{11} = R_1 + X_{11C} = 6 -\ 4{,}77\ j\ \Omega$, $Z_{21} = R_1 + X_{21C} = 6 - 11{,}12\ j\ \Omega$,
$Z_{12} = R_2 + X_{12L} = 14 + 1{,}54\ j\ \Omega$, $Z_{22} = R_2 + X_{22L} = 14 + 0{,}66\ j\ \Omega$,
$Z_{13} = R_3 + X_{13L} = 8 + 0{,}88\ j\ \ \Omega$, $Z_{23} = R_3 + X_{23L} = 8 + 0{,}38\ j\ \Omega$,
$Y_1 = (Z_{11}\ Z_{12} + Z_{12}\ Z_{13} + Z_{13}\ Z_{11})/(Z_{11} + Z_{12})\ \Omega$, $Y_1 = 12{,}90 - 1{,}20\ j\ \Omega$,
$Y_2 = (\ Z_{21}\ Z_{22} + Z_{22}\ Z_{23} + Z_{23}\ Z_{21})/(Z_{21} + Z_{22})\ \Omega$, $Y_2 = 14{,}70 - 3{,}70\ j\ \Omega$,
$|Y_1| = \sqrt{(12{,}903^2 + 1{,}204^2)} = 12{,}96\ \Omega$, $\varphi_{1y} = -\ 5^o.20'$,
$|Y_2| = \sqrt{(14{,}702^2 + 3{,}704^2)} = 15{,}16\ \Omega$, $\varphi_{2y} = -\ 14^o.08'$,
$\dot{I}_1 = U_1/Y_1$, $\dot{I}_1 = 11{,}95 + 1{,}11\ j$ A, $|\dot{I}_1| = 12$ A, $\varphi_{1\dot{I}} =\ 5^o{,}36'$, $\dot{I}_2 = U_2/Y_2$,
$\dot{I}_2 = 4{,}26 + 1{,}07\ j$ A, $|\dot{I}_2| = 3{,}4$ A, $\varphi_{2\dot{I}} = 14^o{,}08'$,
$\dot{I} = U/Y$, $V_1 = U_1 - \dot{I}_1.Z_{13} = 60{,}9 - 19{,}43\ j$ V, $|V_1| = 63{,}9$ V, $\varphi_{1V} = -\ 17^o{,}42'$,
$V_2 = U_2 - \dot{I}_2.Z_{23} = 32{,}95 - 10{,}20\ j$ V, $|\ V_2| = 34{,}49$ V, $\varphi_{2V} = -\ 17{,}12'$
$\dot{I}_{11} = V_1/Z_{11} = 7{,}8 + 2{,}96\ j$ A, $|\dot{I}_{11}| = 8{,}34$ A, $\varphi_{\dot{I}11} = 20^o\ 46'$, $\dot{I}_{12} = V_1/Z_{12} = 4{,}15 - 1{,}84\ j$ A,
$|\dot{I}_{12}| =\ 4{,}54$ A, $\varphi_{\dot{I}12} = -\ 23^o\ 58'$,
$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{12} = V_1(1/Z_{11} + 1/Z_{12}) = V_1(Z_{11} + Z_{12})/(Z_{11}Z_{12}) = 11{,}95 + 1{,}11\ j$ A,
$\dot{I}_{21} = V_2/Z_{21} = 1{,}95 + 1{,}91\ j$ A, $|\dot{I}_{21}| = 2{,}73$ A, $\dot{I}_{22} = V_2/Z_{22} = 2{,}31 - 0{,}84\ j$ A,
$|\dot{I}_{22}| = 2{,}46\ j$ A, , $\varphi_{\dot{I}22} = -\ 19^o\ 54'$,
$\dot{I}_2 = \dot{I}_{21} + \dot{I}_{22} = V_2(1/Z_{21} + 1/Z_{22}) = V_2(Z_{21} + Z_{22})/(Z_{21}Z_{22}) = 4{,}26 + 1{,}07\ j$ A,
$\dot{I} = \{|U_1|\, e^{j70\,\pi\, t},\ \ |U_2|\, e^{j\,30\,\pi\, t}\}\ /\ \{|Y_1|\, e^{-j\,\varphi 1y},\ \ |Y_2|\, e^{-j\,\varphi 2y}\}$

$\dot{I} = \{|U_1|\, e^{j(70\pi t + \varphi 1y)}/|Y_1|, \quad |U_2|\,|\, e^{j(30\pi t + \varphi 2y)}/|Y_2\}, \quad \dot{I} = \{|\dot{I}_1|\, e^{j(70\pi t + \varphi 1y)}, \; |\dot{I}_2|\, e^{j(30\pi t + \varphi 2y)}\}$

Gerilimle akımın eşleniği çarpımı, görünen güç vektörünü verir.

$$N = P + jQ = U\,\bar{\dot{I}} = \{|U_1|^2 e^{-j\varphi 1}/|Y_1|, \quad |U_2|^2 e^{-j\varphi 2} / |Y_2|\},$$

$$|N| = \{ |U_1|^2 / |Y_1|, \quad |U_2|^2 / |Y_2| \}, \qquad |N| = \{ |U_1||\dot{I}_1|, \quad |U_2||\dot{I}_2| \},$$

$$N_1 = |U_1|^2 e^{-j\varphi 1}/|Y_1| = 1857{,}8 - 173{,}35\, j \text{ VA}, \qquad |N_1| = |U_1||\dot{I}_1| = 1865{,}9 \text{ VA},$$

$$N_2 = |U_2|^2 e^{-j\varphi 2} / |Y_2| = 284{,}05 - 71{,}57\, j \text{ VA}, \qquad |N_2| = |U_2||\dot{I}_2| = 292{,}93 \text{ VA},$$

$$P = \{ |U_1|^2 \operatorname{Cos} \varphi_{1y} / |Y_1|, \; |U_2|^2 \operatorname{Cos} \varphi_{2y} / |Y_2| \} = (1857{,}8, \quad 284{,}05) \text{ VA},$$

$$Q = \{- |U_1|^2 \operatorname{Sin} \varphi_{1y} / |Y_1|, \; - |U_2|^2 \operatorname{Sin} \varphi_{2y} / |Y_2| \} = (-173{,}35, \quad -71{,}58) \text{ VAR},$$

$$P_1 = |U_1|^2 \operatorname{Cos} \varphi_{1y} / |Y_1| = 1857{,}8 \text{ VA}, \qquad P_2 = |U_2|^2 \operatorname{Cos} \varphi_{2y} / |Y_2| \} = 284{,}05 \text{ VA},$$

$$Q_1 = - |U_1|^2 \operatorname{Sin} \varphi_{1y} / |Y_1| = -173{,}35 \text{ VAR}, \qquad Q_2 = - |U_2|^2 \operatorname{Sin} \varphi_{2y} / |Y_2| = -71{,}58 \text{ VAR},$$