İ Ç İ N D E K İ L E R

I TANSÖRLER VE MATRİSLER
Vektör uzayları 3
Matrisler 4
Karmaşık sayılar 4
Dört boyutlu dördüncü mertebe matrisler 4
II DÖRDÜNCÜ VE BEŞİNCİ DERECE DENKLEMLERİ
Dördüncü derece denklemler 7
Dördüncü derece denklemlerin bileşenlere ayrılmaları 8
Beşinci derece denklemlerinin bileşenlere ayrılmaları 11
III İKİNCİ SANAL DÜZLEM ve İKİNCİ KARMAŞIK SAYILARI
İkinci sanal düzlem 15
IV BOYUTLU UZAYDA 1'İN KÖKLERİ ve İZOTROP NOKTALAR
Dört boyutlu uzayda 1'in dördüncü kökleri 16
Dört boyutlu uzayda 1'in üçüncü kökleri 16
Dört boyutlu uzayda – 1'in üçüncü kökleri 17
Dört boyutlu uzayda –1'in dördüncü kökleri 17
Dört boyutlu uzayda 1'in basit dördüncü kökleri 18
Dört boyutlu uzayın görel uzunluğu 18
İzotrop noktaların genelleştirilmesi 19
V İKİNCİ ÖKLİDSEL DÜZLEM
Öklidsel düzlem 20
İkinci Öklidsel düzlemde üst karmaşık sayıların işlemleri 22
Barisantrik vektörler 23
VI UZAYIN DAİRESEL TRİGONOMETRİSİ ve
BİRİNCİ ÜST KARMAŞIK SAYILARI
Uzayda dairesel trigonometri 25
Uzayda çok değişkenli dairesel trigonometri 27
VII DÖRT BOYUTLU UZAYDA ÜÇÜNCÜ ÜST KARMAŞIK SAYILAR
Üçüncü üst karmaşık sayılar 28
Kuvvet teoremi 29
Kök işlemi 29
Kuvvet teoreminin genel kanıtı 30
Dört boyutlu üçüncü üst karmaşık sayılarda köklerin çok değerliliği 31
Kare kökün çok değerliliği 31
Küp kökün çok değerliliği 32
Dördüncü kökün çok değerliliği 33
Dört boyutlu uzayda üçüncü üst karmaşık sayılarla dördüncü derece denkleminin
Dördüncü kök altında çözümü 34
VIII DÖRT BOYUTLU UZAYIN HİPERBOLİK TRİGONOMETRİSİ
ve İKİNCİ ÜST KARMAŞIK SAYILARI
Dört boyutlu uzayda hiperbolik trigonometri 36
İzotrop noktalar 37
Dört boyutlu uzayda kuvvet serileri 37
Dört boyutlu uzayda çok değişkenli hiperbolik trigonometri 40
İkinci üst karmaşık sayıların kuvvet ve kök işlemleri 41
Kuvvet teoremi 41
IX DÖRT BOYUTLU UZAYDA DAİRESEL TRİGONOMETRİ
ve BİRİNCİ ÜST KARMAŞIK SAYILAR
Dört boyutlu uzayda dairesel trigonometri 43

Seri işlemleri	45
Dört boyutlu uzayda çok değişkenli dairesel trigonometri	46
Birinci üst karmaşık sayıların kuvvet ve kök işlemleri	46
Kuvvet teoremi	47
Birinci üst karmaşık sayıların köklerinin çok değerliliği	47

I
TANSÖRLER VE MATRİSLER

Vektör Uzayları

Vektör aksiyomlarını sağlayan n boyutlu uzaya, vektör uzayı denilir. Vektör uzayının elemanları üzerinde bulunan indisler, elemanın karakterini belirlerler. İndislerin sayısı, elemanın yapısal boyutunu, bir indisin alabileceği en büyük sayı da, bu elemanın içinde bulunduğu uzayın boyutunu, yani mertebesini belirler. Bir indisli ve indisin alabileceği en büyük değeri, 3 e kadar olan elemanlara **vektör**, diğer çok indisli veya mertebesi 3 ten büyük olan elemanlara da, **tansör** denilir. İç çarpımın tanımlandığı vektör uzaylarına **Öklid uzayı** ve elemanlarına da, **Öklid tansörleri** denilir. İndisler, elemanın üssüne yazılmışsa, **kontrvariant bileşen**, alta yazılmışsa, **kovariant bileşen** adını alırlar. Bu bileşenlerin,

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{x}\ \mathbf{e}_i = x_i$$

işlemleri ile özelikleri belirlenir. Öklid tansörlerinde kontrvariant bileşenler, kovariant bileşenlere eşittir. Bir tek terimlide, çarpanlardan biri üst indisli, diğeri aynı harfle alt indisli ise, bu tek terimli 1 den n' e kadar toplanacak demektir. Buna Einstein kısaltması denilir.

(278) $\quad \mathbf{x} = x^n \mathbf{e}_n, \qquad \mathbf{x} = x^1\, \mathbf{e}_1 + x^2\, \mathbf{e}_2 + ... \quad + x^n\, \mathbf{e}_n = \sum x^n\, \mathbf{e}_n = x^n\, \mathbf{e}_n$

n boyutlu uzayda, **x** vektörü veya tansörü kovariant bileşenleri ve kontrvariant bileşenleri ile verilir. Tansörü ilk kez Cauchy, gerilme hesaplarında kullanmıştır. Tansör sözcüğü tendre (germek) sözcüğünden türetilmiştir. Gelişme Einstein ile olmuştur.

Boyutları n ve p olan U_n ve V_p uzaylarını göz önüne alalım. $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n$ vektörleri U_n uzayının, $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \dots y_p$ vektörleri de, V_p uzayının elemanları olsunlar. Bu iki vektör uzayı, yeni bir vektör uzayı oluştururlar. Bu uzayı U_n*V_p ile, bu uzayın bir elemanını da, x*y ile gösterelim. Bu elemanlarda, dağılma özeliği bulunsun,

a) $\quad \mathbf{x} * (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}*\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}*\mathbf{y}_2, \qquad (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)*\mathbf{y} = \mathbf{x}_1*\mathbf{y} + \mathbf{x}_2*\mathbf{y}$

b) a sayısal değeri ile birleşim özeliği bulunsun,

$$a\ \mathbf{x}*\mathbf{y} = \mathbf{x}*a\mathbf{y} = a(\mathbf{x}*\mathbf{y})$$

c) $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n)$ ve $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots \mathbf{y}_p)$ vektör kümeleri sırayla, U_n ve V_p vektör uzaylarının herhangi bazları iseler, U_n*V_p uzayına ait np tane

$$\mathbf{x}_i*\mathbf{y}_j \ (i = 1,2,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots p)$$

elemanı, U_n*V_p uzayının bir bazı olsun. U_n*V_p vektör uzayına, U_n ve V_p uzaylarının tansör çarpımı, **x*y** elemanına da, **x** ve **y** vektörlerinin tansör çarpımı denilir. Tansörlerin çarpımında, bir alt, bir üst indis aynı ise, çarpımda büzülme yapılır.

$$T = t^{ij}, \quad U = u^{ij}, \quad t_{ij} = g_{ij}\, t^{ij}, \quad u_{ij} = g_{ij}\, u^{ij}, \quad t^{ij} = g^{ij}\, t_{ij}, \quad g_{ij} = \mathbf{e}_i . \mathbf{e}_j, \quad g^{ik}\, g_k^{\ j} = g^{ij}$$

T ve U tansörleri kontrvariant bileşenleri ile verilmişlerdir. g_{ij} iki boyutlu esas tansör veya metrik tansör adını alır, kontrvariant bileşenleri, kovariant bileşenlere dönüştürür. g'nin kontrvariant bileşenleri ile karşıt işlem yapılır. Hem kovariant, hem kontrvariant bileşeni olan esas tansör, karma esas tansör adını alır. $\mathbf{e}_i$ ve $\mathbf{e}_j$ vektörleri baz elemanlarıdır.

Örnek:

Küresel koordinatlarda metrik tansörü bulunuz.

(279) $\quad \mathbf{x} = x^i\, \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^j\, \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{x}\,\mathbf{y} = x^i\, y^j\, \mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_j = g_{ij}\, x^i\, y^j, \quad ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$

Bir boyutlu, mertebesi m olan bir tansörün şiddeti,

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}\,\mathbf{x} = \mathbf{x}\,(\mathbf{e}_i x^i) = (\mathbf{x}\mathbf{e}_i)\, x^i = \sum_{i=1}^{i=m} x_i\, x^i = x_i\, x^i = x^i\, x_i = d^2$$

olup, vektörün **normu** adını alır.

Küresel koordinatlarla, karteziyen koordinatlar arasındaki dönüşüm formülünü yazalım.

$$x = r\, \mathrm{Sin}\theta\, \mathrm{Cos}\varphi, \quad y = r\, \mathrm{Sin}\theta\, \mathrm{Sin}\varphi, \quad z = r\, \mathrm{Cos}\theta,$$

$$dx = -\, r\, \mathrm{Sin}\theta\, \mathrm{Sin}\varphi\, d\varphi + r\, \mathrm{Cos}\theta\, \mathrm{Cos}\varphi\, d\theta + \mathrm{Sin}\theta\, \mathrm{Cos}\varphi\, dr,$$

$$dy = r\, \mathrm{Sin}\theta\, \mathrm{Cos}\varphi\, d\varphi + r\, \mathrm{Cos}\theta\, \mathrm{Sin}\varphi\, d\theta + \mathrm{Sin}\theta\, \mathrm{Sin}\varphi\, dr, \qquad dz = -\, r\, \mathrm{Sin}\theta\, d\theta + \mathrm{Cos}\theta\, dr$$

(280) $\quad ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = dr^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\, \mathrm{Sin}^2\theta\, (d\varphi)^2$

Birinci taraf karteziyen, ikinci taraf küresel koordinatlarda ds yay elemanının ifadesinde, noktanın kontrvariant bileşenleridirler. $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ dir. ds nin ve gij nin (279) daki ifadelerinden, ortogonal koordinatlarda i, j den farklı ise, gij = 0 olacağı görülür. (279) un son formülü ile, (280) karşılaştırılırsa, metrik tansör,

$$g_{ij} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\,\mathrm{Sin}^2\theta \end{matrix}$$

olarak bulunur.

Matrisler

İki indisli Öklid tansörlerini göz önüne alalım. Çarpımlarını,

(281) $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $C = A.B$, $(c_{ij}) = (a_{it})\,(b_{tj})$

formülü ile tanımlayalım. Einstein kısaltması nedeni ile çarpım, t indisi üzerinden toplam alınarak yapılacaktır. Öklid tansörleri olduklarından, büzülme için t nin birinde alt, diğerinde üst indis olmasına gerek yoktur. Çünkü Öklid tansörlerinde kovariant bileşenler, kontrvariant bileşenlere eşittirler. Birinci indisler satırı, ikinci indisler sütunu gösterirler. Bu çarpım kuralı ile, sahip olunan özelikler şunlardır.

1) Kapalılık özeliği vardır. İki tansörün çarpımından gelecek çarpım, çarpanların kümesindendir.

2) Birleşim özeliği vardır. $(g_{ij}) = (a_{ij})[(b_{it})(c_{tj})] = [(a_{it})(b_{tj})](c_{ij})$

3) Birim elemanı vardır. Köşegen elemanları 1, diğerleri sıfır olan tansörler, birim tansörlerdir.

4) Tersi vardır. C, A tansörlerini bilinen, B tansörünü bilinmeyen alırsak, çarpım eşitliği, n bilinmeyen n denklemden oluşan doğrusal bir sistemdir. Katsayılar determinantı sıfırdan farklı ise, çözüm vardır, A tansörü **düzgündür,** katsayılar determinantı sıfır ise, çözüm yoktur, A tansörü **düzgün değildir**, denilecektir. Bu özeliklere sahip olan tansörler kümesi, gurup oluştururlar. Gurup oluşturan Öklid tansörlerine **matris** denilir.

Karmaşık Sayılar

İkinci mertebe matrislerde, I, B ve C matrisleri,

$$I = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \qquad B = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}, \qquad C = \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

ile verilsinler. I ve B iki elemanlı matrisler kümesi, devresel matrisler gurubunun devresel alt gurubudur. I ve C'nin kuvvet matrisleri ile oluşan dört elemanlı devresel matrisler kümesi, devresel matrisler gurubunun devresel alt gurubudur. İkinci matris gurubu, K gerçel sayılar cisminin de eklenmesi ile, **karmaşık sayılar** cismini oluştururlar. Çünkü,

(282) $C^2 = -1$, $I = 1$, $Z = k_1 I + k_2 C$

konulursa, bir karmaşık sayı ifade edilmiş olur. Karmaşık sayıların bu tanımından hareketle, daha üst boyutlarda karmaşık sayılar tanımlayalım.

Dört Boyutlu Dördüncü Mertebe Matrisler

Önce üç boyutlu bir matris araştıralım. Üç boyutlu matris, üç boyutlu Öklid tansörlerinden oluşturulmalıdır. Büzülme yapılacak indislerin sayısının seçimine göre,

(283) $(c_{ijklmn}) = (a_{ijk})(b_{lmn})$, $(c_{in}) = (a_{its})(b_{stn})$, $(c_{ijmn}) = (a_{ijs})(b_{smn})$

matris çarpma işlemleri tanımlayabiliriz. Fakat bu tansörlerin çarpımlarından hiç biri, üç boyutlu değildirler. Kapalılık özeliği yoktur. O halde tek boyutlu tansörlerden matris tanımlanamaz..

Dört boyutlu matrisi, dört boyutlu Öklid tansörlerinden oluşturmalıyız.

(284) $C = A.B$, $(c_{ijpq}) = (a_{ijts})(b_{stpq})$

Dört boyutlu tansörlerin, tansör çarpımına göre kapalılık özeliği vardır. Çarpım, çarpanların kümesinden bir tansördür. Birim elemanı ve birleşim özeliği olduğu örnekte gösterilecektir. Tersinin olduğu da, Öklid tansörünün düzgün olması ile sağlanacaktır. Dört boyutlu Öklid tansörlerinden, dört boyutlu matris tanımlanabilir.

Örnek

Dört boyutlu ve dördüncü mertebe matrislerin çarpımı:

(285) $c_{1111} = a_{1111} b_{1111} + a_{1112} b_{2111} + a_{1113} b_{3111} + a_{1114} b_{4111} + a_{1121} b_{1211} + a_{1122} b_{2211} + a_{1123} b_{3211} + a_{1124} b_{4211} + a_{1131} b_{1311} + a_{1132} b_{2311} + a_{1133} b_{3311} + a_{1134} b_{4311} + a_{1141} b_{1411} + a_{1142} b_{2411} + a_{1143} b_{3411} + a_{1144} b_{4411}$

$c_{1112} = a_{1111} b_{1112} + a_{1112} b_{2112} + a_{1113} b_{3112} + a_{1114} b_{4112} + a_{1121} b_{1212} + a_{1122} b_{2212} + a_{1123} b_{1322} + a_{1124} b_{4212} + a_{1131} b_{1312} + a_{1132} b_{2312} + a_{1133} b_{3312} + a_{1134} b_{4312} + a_{1141} b_{1412} + a_{1142} b_{2412} + a_{1143} b_{3412} + a_{1144} b_{4412}$

....

$c_{3241} = a_{3211} b_{1141} + a_{3212} b_{2141} + a_{3213} b_{3141} + a_{3214} b_{4141} + a_{3221} b_{1241} + a_{3222} b_{2241} + a_{3223} b_{3241} + a_{3224} b_{4241} + a_{3231} b_{1341} + a_{3232} b_{2341} + a_{3233} b_{3341} + a_{3234} b_{4341} + a_{3241} b_{1441} + a_{3242} b_{2441} + a_{3243} b_{3441} + a_{3244} b_{4441}$

....

Dört boyutlu matrislerde dört sıra vardır. Bunlar satır, sütun, derinlik ve sanal sıralarıdır. Dördüncü mertebeden bir matrisin her bir sırasında, dört eleman vardır. Bir dört boyutlu, dördüncü mertebe matrisin, $s = m^n = 4^4 = 256$ elemanı vardır. (s eleman, n boyut, m mertebe sayısı)

(286) $b_{11} =$ $\{a_{1111}\ a_{1221}\ a_{1331}\ a_{1441}$ $a_{2222}\ a_{2332}\ a_{2442}\ a_{2112}$ $a_{3333}\ a_{3443}\ a_{3113}\ a_{3223}$ $a_{4444}\ a_{4114}\ a_{4224}\ a_{4334}\}$

$b_{12} =$ $\{a_{1112}\ a_{1222}\ a_{1332}\ a_{1442}$ $a_{2223}\ a_{2333}\ a_{2443}\ a_{2113}$ $a_{3334}\ a_{3444}\ a_{3114}\ a_{3224}$ $a_{4441}\ a_{4111}\ a_{4221}\ a_{4331}\}$

$b_{13} =$ $\{a_{1113}\ a_{1223}\ a_{1333}\ a_{1443}$ $a_{2224}\ a_{2334}\ a_{2444}\ a_{2114}$ $a_{3331}\ a_{3441}\ a_{3111}\ a_{3221}$ $a_{4442}\ a_{4112}\ a_{4222}\ a_{4332}\}$

b_{11}, b_{12}, b_{13}, ... eleman kümeleri, matris elemanlarının özeliklerine göre düzenlenmiş bir sınıflamadır. Bir dört boyutlu matriste bütün elemanlar, buradaki sınıflama oluşacak biçimde türetilebilirler. İlk eleman başlangıç elemanı olup, a_{1111} dir. Bu elemanların indislerine 1 ekleyerek, birinci sütun oluşturulur. Diğer üç sütun, önceki sütunların ikinci ve üçüncü indislerine 1 ekleyerek oluşturulur. Özet olarak söylenirse, düşey doğrultuda dört indise bir ekleyerek, yatay doğrultuda iki ve üçüncü indislere bir ekleyerek, bütün kümeler oluşturulur. Toplam 4 ü geçerse, 4 modülüne göre kalan alınır. b_{12} kümesinde başlangıç eleman a_{1112} dir Benzer kural tekrarlanır. Böylece 16 terimli kümelerden, 16 tane küme oluşturulur. b_{11} kümesi birim elemanlarının kümesidir. Bu kümenin, burada indisleri yazılı 16 elemanı 1, geri kalan 240 elemanı, sıfır olan bir matris, birim matristir. Bu özeliği, C = A.B çarpım örneğinde görmek mümkündür. A matrisi birim matris olsun. Çarpım tablosundan C = B olacağı görülür. Diğer kümeler işaret kümesidir. Anlamını açıklamak için, daha az terimli bir örnek alalım.

Dört boyutlu ikinci mertebeden matrislerin çarpımı:

(287) $C = A.B, \qquad (c_{ijpq}) = (a_{ijst})\,(b_{tspq})$

Dört sıranın her birinde, iki eleman vardır. Toplam olarak, $s = 2^4 = 16$ eleman vardır.

(288)
$$\begin{aligned}
c_{1111} &= a_{1111} b_{1111} + a_{1112} b_{2111} + a_{1121} b_{1211} + a_{1122} b_{2211}\\
c_{1112} &= a_{1111} b_{1112} + a_{1112} b_{2112} + a_{1121} b_{1212} + a_{1122} b_{2212}\\
c_{1121} &= a_{1111} b_{1121} + a_{1112} b_{2121} + a_{1121} b_{1221} + a_{1122} b_{2221}\\
c_{1122} &= a_{1111} b_{1122} + a_{1112} b_{2122} + a_{1121} b_{1222} + a_{1122} b_{2222}\\
c_{1211} &= a_{1211} b_{1111} + a_{1212} b_{2111} + a_{1221} b_{1211} + a_{1222} b_{2211}\\
c_{1212} &= a_{1211} b_{1112} + a_{1212} b_{2112} + a_{1221} b_{1212} + a_{1222} b_{2212}\\
c_{1221} &= a_{1211} b_{1121} + a_{1212} b_{2121} + a_{1221} b_{1221} + a_{1222} b_{2221}\\
c_{1222} &= a_{1211} b_{1122} + a_{1212} b_{2122} + a_{1221} b_{1222} + a_{1222} b_{2222}\\
c_{2111} &= a_{2111} b_{1111} + a_{2112} b_{2111} + a_{2121} b_{1211} + a_{2122} b_{2211}\\
c_{2112} &= a_{2111} b_{1112} + a_{2112} b_{2112} + a_{2121} b_{1212} + a_{2122} b_{2212}
\end{aligned}$$

$$c_{2121} = a_{2111}\, b_{1121} + a_{2112}\, b_{2121} + a_{2121}\, b_{1221} + a_{2122}\, b_{2221}$$
$$c_{2122} = a_{2111}\, b_{1122} + a_{2112}\, b_{2122} + a_{2121}\, b_{1222} + a_{2122}\, b_{2222}$$
$$c_{2211} = a_{2211}\, b_{1111} + a_{2212}\, b_{2111} + a_{2221}\, b_{1211} + a_{2222}\, b_{2211}$$
$$c_{2212} = a_{2211}\, b_{1112} + a_{2212}\, b_{2112} + a_{2221}\, b_{1212} + a_{2222}\, b_{2212}$$
$$c_{2221} = a_{2211}\, b_{1121} + a_{2212}\, b_{2121} + a_{2221}\, b_{1221} + a_{2222}\, b_{2221}$$
$$c_{2222} = a_{2211}\, b_{1122} + a_{2212}\, b_{2122} + a_{2221}\, b_{1222} + a_{2222}\, b_{2222}$$

Birim eleman olduğunu, yukarda verilen birim matrisin yalnız $_{1,2}$ indis sayılarının bulunduğu terimleri alıp, çarpım tablosunda yerine koymak suretiyle görebiliriz.

(289) $b_{11}= \{a_{1111},\ \ a_{1221},\ \ a_{2222},\ \ a_{2112}\}$ $\qquad b_{12} = \{a_{1112},\ \ a_{1222},\ \ a_{2221},\ \ a_{2111}\}$

$b_{21} = \{a_{1121},\ \ a_{1211},\ \ a_{2212},\ \ a_{2122}\}$ $\qquad b_{22} = \{a_{1122},\ \ a_{1212},\ \ a_{2211},\ \ a_{2121}\}$

Kümeleri yukarda açıklandığı gibi türetilmiştir. b_{11} kümesi birim kümedir. Bu kümedeki dört elemanı 1, geri kalan 12 elemanı sıfır olan matris, birim matristir. Diğer kümelerdeki elemanları 1, geri kalan 12 elemanı sıfır olan matrisler, işaret matrisleridir. Böylece birim matrisle beraber, elemanları matris olan, dört elemanlı, alt küme oluşmuştur. Bu dört matrisli alt küme, devresel matrisler gurubunun devresel alt gurubudur. Çarpım tablosundan kapalılık özeliği görülebilir. Bu matrislerin sıfır olan bir elemanıyla aynı indisli, çarpım matris elemanının da, sıfır olduğu, sıfırdan farklı bir elemanıyla aynı indisli, çarpım matris elemanın da, sıfırdan farklı olduğu, yani çarpım matrisin, çarpanlarla aynı kümeden olduğu görülür. Birim elemanı ve ters matrisin olduğu, genel matris özeliklerinde ortaya konulmuştu. Genel olarak yüksek boyutlu tansörlerde, çarpanlardan biri bilinmeyen olursa, m^q bilinmeyen, m^p denklemden oluşan, denklem sisteminden, m^p tane denklem sistemi gelir. m^p tane determinantın, sıfırdan farklı olması gerekir. (n boyut sayısı, indis sayısı, m bir boyuttaki eleman sayısı, mertebesi, q üzerinde toplam alınan indis sayısı, p üzerinde toplam alınmayan indis sayısıdır, $p + q = n$ dir, matrislerde $p = q$ dür). Sözü geçen katsayılar determinantı, sıfırdan farklı olan matrislere **düzgün tansörler** denilir. Düzgün tansörler bizim uğraşı konumuz olacaklardır. Düzgün tansörlerin tersi vardır.

Birleşim özeliği, bir bileşen üzerinde göstermekle yetinilecektir.

$$G = A.(B.C),\qquad H = (A.B).C,\qquad D = B.C,\qquad E = A.B$$
$$d_{1111} = b_{1111}\, c_{1111} + b_{1112}\, c_{2111} + b_{1121}\, c_{1211} + b_{1122}\, c_{2211}$$
$$e_{1111} = a_{1111}\, b_{1111} + a_{1112}\, b_{2111} + a_{1121}\, b_{1211} + a_{1122}\, b_{2211}$$
$$g_{1111} = a_{1111}\, d_{1111} + a_{1112}\, d_{2111} + a_{1121}\, d_{1211} + a_{1122}\, d_{2211}$$
$$h_{1111} = e_{1111}\, c_{1111} + e_{1112}\, c_{2111} + e_{1121}\, c_{1211} + e_{1122}\, c_{2211}$$
$$\begin{aligned} g_{1111} = {} & a_{1111}(b_{1111}\, c_{1111} + b_{1112}\, c_{2111} + b_{1121}\, c_{1211} + b_{1122}\, c_{2211}) + \\ & a_{1112}(b_{2111}\, c_{1111} + b_{2112}\, c_{2111} + b_{2121}\, c_{1211} + b_{2122}\, c_{2211}) + \\ & a_{1121}(b_{1211}\, c_{1111} + b_{1212}\, c_{2111} + b_{1221}\, c_{1211} + b_{1222}\, c_{2211}) + \\ & a_{1122} (b_{2211}\, c_{1111} + b_{2212}\, c_{2111} + b_{2221}\, c_{1211} + b_{2222}\, c_{2211}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} h_{1111} = {} & (a_{1111}\, b_{1111} + a_{1112}\, b_{2111} + a_{1121}\, b_{1211} + a_{1122}\, b_{2211})\, c_{1111} + \\ & (a_{1111}\, b_{1112} + a_{1112}\, b_{2112} + a_{1121}\, b_{1212} + a_{1122}\, b_{2212})\, c_{2111} + \\ & (a_{1111}\, b_{1121} + a_{1112}\, b_{2121} + a_{1121}\, b_{1221} + a_{1122}\, b_{2221})\, c_{1211} + \\ & (a_{1111}\, b_{1122} + a_{1112}\, b_{2122} + a_{1121}\, b_{1222} + a_{1122}\, b_{2222})\, c_{2211} \end{aligned}$$
$$G = H$$

G matrisinin satır terimlerinin, H matrisinin sütun terimlerine eşit olduğu görülüyor. Bu işlemler bütün diğer sıralar için de geçerlidir. Dört boyutlu matrislerin, birleşim özeliği vardır. Böylece dört boyutlu, ikinci mertebe Öklid tansörleri gurup oluştururlar ve matris adını alırlar.

(290) $\mathbf{1} = \{a_{1111},\ a_{1221},\ a_{2222},\ a_{2112}\}$ $\qquad \mathbf{g}_1 = \{-a_{1112},\ a_{1222},\ a_{2221},\ -a_{2111}\}$

$\mathbf{g}_2 = \{-a_{1121},\ -a_{1211},\ a_{2212},\ a_{2122}\}$ $\qquad \mathbf{g}_3 =\{-a_{1122},\ a_{1212},\ -a_{2211},\ a_{2121}\}$

(289) da olduğu gibi, bu matrisler de, indisleri yazılı elemanları 1, diğer 12 elemanı sıfır olan matrislerdir. Bu kümedeki matrislerin bazı elemanlarına, negatif işaret konulmuştur. Bu işaretler kapalılık özeliğini sağlamak için, çarpımın çarpanlarla aynı kümeden olması için,

çarpım tablosunda c_{1111} elemanının, pozitif gelmesini sağlayacak biçimde konulmuştur. Yeni bulunan dört devresel matristen oluşan küme, devresel matrisler gurubunun, devresel alt gurubudur. (291) Çarpım tablosunda, bu özellik görülebilir.

(291) $c_{1111} = a_{1111}\, b_{1111} + (-a_{1112})(-b_{2111}) + (-a_{1121})(-b_{1211}) + (-a_{1122})(-b_{2211})$
$c_{1112} = a_{1111}(-b_{1112}) + (-a_{1112})b_{2112} + (-a_{1121})b_{1212} + (-a_{1122})b_{2212}$
$c_{1121} = a_{1111}(-b_{1121}) + (-a_{1112})b_{2121} + (-a_{1121})b_{1221} + (-a_{1122})b_{2221}$
$c_{1122} = a_{1111}(-b_{1122}) + (-a_{1112})b_{2122} + (-a_{1121})b_{1222} + (-a_{1122})b_{2222}$
$c_{1211} = (-a_{1211})b_{1111} + a_{1212}(-b_{2111}) + a_{1221}(-b_{1211}) + a_{1222}(-b_{2211})$
$c_{1212} = (-a_{1211})(-b_{1112}) + a_{1212}\, b_{2112} + a_{1221}\, b_{1212} + a_{1222}\, b_{2212}$
$c_{1221} = (-a_{1211})(-b_{1121}) + a_{1212}\, b_{2121} + a_{1221}\, b_{1221} + a_{1222}\, b_{2221}$
$c_{1222} = (-a_{1211})(-b_{1122}) + a_{1212}\, b_{2122} + a_{1221}\, b_{1222} + a_{1222}\, b_{2222}$
$c_{2111} = (-a_{2111})b_{1111} + a_{2112}(-b_{2111}) + a_{2121}(-b_{1211}) + a_{2122}(-b_{2211})$
$c_{2112} = (-a_{2111})(-b_{1112}) + a_{2112}\, b_{2112} + a_{2121}\, b_{1212} + a_{2122}\, b_{2212}$
$c_{2121} = (-a_{2111})(-b_{1121}) + a_{2112}\, b_{2121} + a_{2121}\, b_{1221} + a_{2122}\, b_{2221}$
$c_{2122} = (-a_{2111})(-b_{1122}) + a_{2112}\, b_{2122} + a_{2121}\, b_{1222} + a_{2122}\, b_{2222}$
$c_{2211} = (-a_{2211})b_{1111} + a_{2212}(-b_{2111}) + a_{2212}(-b_{2111}) + a_{2221}(-b_{1211})$
$c_{2212} = (-a_{2211})(-b_{1112}) + a_{2212}\, b_{2112} + a_{2221}\, b_{1212} + a_{2222}\, b_{2212}$
$c_{2221} = (-a_{2211})(-b_{1121}) + a_{2212}\, b_{2121} + a_{2221}\, b_{1221} + a_{2222}\, b_{2221}$
$c_{2222} = (-a_{2211})(-b_{1122}) + a_{2212}\, b_{2122} + a_{2221}\, b_{1222} + a_{2222}\, b_{2222}$

(290) Alt gurubunun kapalılık özelliğine göre, A ve B çarpanlarının ve C çarpımının aynı indisli elemanları, aynı işarette olmalıdırlar. a_{1112} ve b_{1112} elemanları negatiftirler. c_{1112} elemanı da, negatif gelmiştir. a_{1212} ve b_{1212} elemanları pozitiftirler. c_{1212} elemanı da, pozitif gelmiştir. Çarpım da aynı kümeden bir matristir

$\mathbf{1}$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ (290) matris kümesinde, indisleri yazılı elemanları 1, diğer elemanları sıfır olan matrisleri oluşturalım. Bu matrislerin, dört boyutlu uzayın, doğrusal bağımsız cebirsel baz elemanları oldukları gösterilecektir.

II
DÖRDÜNCÜ VE BEŞİNCİ DERECE DENKLEMLERİ

Dördünce Derece Denklemler

$\mathbf{1}$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ vektörleri (290) da verilen matrisler olsunlar. (288) de verilen çarpım tablosu ile bu vektörlerin işlem özelikleri,

(292) $\mathbf{g}_1.\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{g}_2.\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{g}_3.\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{g}_1.\mathbf{g}_2.\mathbf{g}_3 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{g}_1^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{g}_2^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{g}_3^2 = \mathbf{1}$

olup, birleşim, yer değiştirme ve dağılım özelikleri vardır. Dört boyutlu matrisler gurubunun, genelde yer değiştirme özeliği yoktur. Fakat karmaşık sayı oluşturan, matris alt guruplarının, yer değiştirme özeliği vardır. Bu vektörlerin oluşturduğu alt guruba, K gerçel sayılar cisminin eklenmesi ile oluşan, dört boyutlu uzayın karmaşık sayılar cismine, **birinci üst karmaşık sayılar** denilecektir.

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{1} + k_2\mathbf{g}_1 + k_3\mathbf{g}_2 + k_4\mathbf{g}_3$$

Dördüncü derece denkleminin köklerini, dört boyutlu uzayın vektörleri olarak yorumlayalım ve dört boyutlu uzayın baz elemanları olarak tasarladığımız vektörlerle ifade edelim. x, y, z, t değişkenleri gerçel olsunlar.

$$\mathbf{X}^4 + a_1\mathbf{X}^3 + a_2\mathbf{X}^2 + a_3\mathbf{X} + a_4 = 0$$

(293) $\mathbf{X}_1 = \mathbf{1}x + \mathbf{g}_1 y + \mathbf{g}_2 z + \mathbf{g}_3 t, \qquad \mathbf{X}_2 = \mathbf{1}x - \mathbf{g}_1 y + \mathbf{g}_2 z - \mathbf{g}_3 t,$
$\mathbf{X}_3 = \mathbf{1}x + \mathbf{g}_1 y - \mathbf{g}_2 z - \mathbf{g}_3 t, \qquad \mathbf{X}_4 = \mathbf{1}x - \mathbf{g}_1 y - \mathbf{g}_2 z + \mathbf{g}_3 t,$

$$A = \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{g}_1 & -\mathbf{g}_2 & -\mathbf{g}_3 \\ \mathbf{1} & -\mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & -\mathbf{g}_3 \\ \mathbf{1} & -\mathbf{g}_1 & -\mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \end{matrix}$$

Başlangıçta Karmaşık Sayılar I, (28) de verilen matrisle farkı, sadece uzayın birim vektörleridir. x, y, z, t sayılarına **kök bileşenleri** denilir. (292) de verilen işlem özelikleri ile, kökler ve katsayılar arasındaki bağıntıları kuralım.

(294) $a_1 = -4x,$

(295) $a_2 = 2(3x^2 - y^2 - z^2 - t^2),$

(296) $a_3 = -4(x^3 - xy^2 - xz^2 - xt^2 + 2yzt)$

(297) $a_4 = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 2x^2(y^2 + z^2 + t^2) - 2(y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2) + 8xyzt$

Bu bağıntılar, başlangıçta verilen (29) formülleri ile aynı gelmişlerdir. Burada katsayılar matrisi farklıdır. Sonuçların aynı gelmesi, dört boyutlu vektörlerin ve problemin iç yapısının bir özeliğidir. Sanal gelmesi gereken terimlerin katsayıları, A matrisinin simetri özeliği nedeni ile, sıfır gelmişlerdir. Bu özelik yukarda verilen köklerle katsayıların bağıntılarında, x yerine x, y yerine y$\mathbf{g}_1$, z yerine z$\mathbf{g}_2$, t yerine de t$\mathbf{g}_3$ konularak kolayca görülür. Yalnız gerçel sonuçlar kalmıştır. Bu nedenle, sanal vektörler yerine, 1 koyarak bulunan matrisin sonucu gelmiştir. Kökler de aynı geleceklerdir. Çözüm aynıdır.

(298) $x = -a_1/4,$

(299) $a_4 = x^4 + (y^2 + z^2 + t^2)^2 - 4(y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2) - 2x^2(y^2 + z^2 + t^2) + 8xyzt,$

(300) $yzt = (-a_3 - a_1^3/8 + a_1a_2/2)/8, \quad b_3 = -y^2z^2t^2 = -(-a_3 - a_1^3/8 + a_1a_2/2)^2/64,$

(301) $b1 = -(y^2 + z^2 + t^2) = -(3a_1^2/16 - a_2/2),$

(302) $b_2 = y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2 = -a_4/4 + 3a_1^4/256 + a_2^2/16 - a_1^2a_2/16 + a_1a_3/16,$

y^2, z^2, t^2 değerleri,

$$Z^3 + b_1Z^2 + b_2Z + b_3 = 0$$

üçüncü derece denkleminin kökleri olarak bulunurlar.

Dördüncü Derece Denklemlerin Bileşenlere Ayrılmaları

(303) $\mathbf{X}_1 = \mathbf{1}x + \mathbf{g}_1y + \mathbf{g}_2z + \mathbf{g}_3t,$

kökünün denklemi sağlaması için gerekli koşulları bulalım.

(304) $P(\mathbf{w}) = (x + \mathbf{g}_1y + \mathbf{g}_2z + \mathbf{g}_3t)^4 + a_1(x + \mathbf{g}_1y + \mathbf{g}_2z + \mathbf{g}_3t)^3 +$
$a_2(x + \mathbf{g}_1y + \mathbf{g}_2z + \mathbf{g}_3t)^2 + a_3(x + \mathbf{g}_1y + \mathbf{g}_2z + \mathbf{g}_3t) + a_4 = 0$

Parantezleri açalım, gerçel ve sanal kısımları ayrı, ayrı yazalım. Dört bileşen gelecektir. Denklemin köklerini bulmak için, x, y, z, t bilinmeyenlerini bulmak gereklidir. Dört denkleme gereksinim vardır. Eğer vektör sistemi doğrusal bağımsız ise, dört bileşenin sıfır olması gerekir. Dört denklem ve dört bilinmeyen elde edilir. Dört bileşenin eşit olması, paranteze alınıp, vektörlerin toplamının sıfır olması, uzayda olduğu gibi, dört boyutlu uzayda da düşünülmeyecektir. Çünkü bu sanal vektörlerin toplamı izotrop doğru üzerinde olup, şiddeti sıfırdır, fakat doğrultusu ve yönü vardır. Denklemin çözümü olduğunu biliyoruz. O halde vektörlerin katsayıları sıfır olmalıdır. Bu gerçeği görelim. Bileşenler şunlardır.

$$\mathbf{w} = x + \mathbf{g}_1y + \mathbf{g}_2z + \mathbf{g}_3t,$$

$$P(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^4 + a_1\mathbf{w}^3 + a_2\mathbf{w}^2 + a_3\mathbf{w} + a_4 = 0,$$

w kökü ile dördüncü derece denklemine girelim. 1'in kare kökleri olan $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ dört tane küme oluşturacaklardır. Bu kümelerin her biri, ayrı, ayrı sıfıra özdeştirler. Bu nedenle bu kümeler, dördüncü derece denkleminin bileşenleridir. Bu bileşenleri bulmak için, (303) kökünün, dördüncü kuvvete kadar Binom açılımlarını yazalım. P(**w**) denkleminin bileşenleri,

$$\mathbf{w}^n = w_1^n + \mathbf{g}_1w_2^n + \mathbf{g}_2w_3^n + \mathbf{g}_3w_4^n$$

$$P_j(\mathbf{w}) = w_j^4 + a_1w_j^3 + a_2w_j^2 + a_3w_j + a_4 = 0, \quad (n, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$P(\mathbf{w}) = P_1(\mathbf{w}) + \mathbf{g}_1P_2(\mathbf{w}) + \mathbf{g}_2P_3(\mathbf{w}) + \mathbf{g}_3P_4(\mathbf{w}) + \mathbf{g}_3P_4(\mathbf{w})$$

$$\mathbf{w}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\mathbf{g}_1xy + 2\mathbf{g}_2xz + 2\mathbf{g}_3xt + 2\mathbf{g}_3yz + 2\mathbf{g}_2yt + 2\mathbf{g}_1zt$$

$$w_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \quad w_2^2 = 2(xy + zt), \quad w_3^2 = 2(xz + yt), \quad w_4^2 = 2(xt + yz)$$

$$w_1^3 = x(x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2) + 6yzt, \quad w_2^3 = y(3x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) + 6_1x$$

$$w_3^3 = z(3x^2 + 3y^2 + z^2 + 3t^2) + 6xyt, \quad w_4^3 = t(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + t^2) + 6xyz,$$

$$w_1^4 = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 6x^2(y^2 + z^2 + t^2) + 6(y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2) + 24xyzt,$$

$$w_2^4 = 4(x^3y + xy^3 + z^3t + zt^3) + 12(x^2zt + y^2zt + xz^2y + xyt^2),$$

$w_3^4 = 4(x^3z + y^3t + xz^3 + yt^3) + 12(x^2yt + xy^2z + yz^2t + xt^2z),$
$w_4^4 = 4(x^3t + y^3z + yz^3 + xt^3) + 12(x^2yz + xy^2t + xz^2t + yzt^2)$
bulunur. Bu değerleri,

$$P_j(\mathbf{w}) = w_j^4 + a_1w_j^3 + a_2w_j^2 + a_3w_j + a_4 = 0$$

denkleminde yerine koyalım.

Gerçel terim:

(305) $P_1(\mathbf{w}) = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 6x^2(y^2 + z^2 + t^2) + 6(y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2) + 24xyzt + a_1x(x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2) + 6a_1yzt + a_2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + a_3x + a_4$

Birinci sanal terim, $\mathbf{g}_1$'in katsayısı,

(306) $P_2(\mathbf{w}) = 4(x^3y + xy^3 + z^3t + zt^3) + 12(x^2zt + y^2zt + xz^2y + xyt^2) + a_1y (3x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) + 6a_1xzt + 2a_2xy + 2a_2zt + a_3y$

İkinci sanal terim, $\mathbf{g}_2$'nin katsayısı,

(307) $P_3(\mathbf{w}) = 4(x^3z + y^3t + xz^3 + yt^3) + 12(x^2yt + xy^2z + yz^2t + xt^2z) + a_1z(3x^2 + 3y^2 + z^2 + 3t^2) + 6a_1xyt + 2a_2xz + 2a_2yt + a_3z$

Üçüncü sanal terim, $\mathbf{g}_3$'ün katsayısı,

(308) $P_4(\mathbf{w}) = 4(x^3t + y^3z + yz^3 + xt^3) + 12(x^2yz + xy^2t + xz^2t + yzt^2) + a_1t(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + t^2) + 6a_1xyz + 2a_2xt + 2a_2yz + a_3t$

olur. $P_j(\mathbf{w})$ denklemleri özdeş olarak sıfırdırlar.

(309) $P_1(\mathbf{w})\mathbf{1} + P_2(\mathbf{w})\mathbf{g}_1 + P_3(\mathbf{w})\mathbf{g}_2 + P_4(\mathbf{w})\mathbf{g}_3 = 0$

denklemi de, özdeş olarak sıfırdır. $P_1(\mathbf{w})$, $P_2(\mathbf{w})$, $P_3(\mathbf{w})$, $P_4(\mathbf{w})$ denklemlerinin sıfır olduklarını görelim. Kökler ve katsayılar bağıntılarını kullanarak, $P_1(\mathbf{w})$ ve $P_2(\mathbf{w})$ de, bilinmeyenlerin yok edilmesi ile, $P_3(\mathbf{w})$ ve $P_4(\mathbf{w})$ de, denklem katsayılarının yok edilmesi ile, sıfır oldukları gösterilecektir.

$P_1(\mathbf{w}) = x^4 + (y^2 + z^2 + t^2)^2 + 6x^2(y^2 + z^2 + t^2) + 4(y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2) + 24xyzt + a_1x^3 + 3a_1x(y^2 + z^2 + t^2) + 6a_1yzt + a_2x^2 + a_2 (y^2 + z^2 + t^2) + a_3x + a_4$

(298), (299), (300), (301), (302) den, bilinmeyenlerin değerleri yerlerine konulursa,

$P_1(\mathbf{w}) = a_1^4/256 + (3a_1^2/16 – a_2/2)^2 + 6a_1^2 /16(3a_1^2/16 – a_2/2) + 4(– a_4/4 + 3a_1^4/256 + a_2^2/16 – a_1^2a_2/16 + a_1a_3/16) – 6a_1yzt – a_1^4/64 – 3a_1^2/4 (3a_1^2/16 – a_2/2) + 6a_1yzt + a_1^2a_2/16 + a_2(3a_1^2/16 – a_2/2) – a_1a_3/4 + a_4$

$P_1(\mathbf{w}) = a_1^4/256(1 + 9 + 18 + 12 – 4 – 36) + a_1^2a_2/16(- 3 – 3 – 4 + 6 + 1 + 3) + a_2^2/4(1 + 1 – 2) + a_1a_3/4(1 – 1) + a_4(–1 +1) + a_1yzt(– 6 + 6) = 0$

$P_2(\mathbf{w}) = – a_1^3/16\, y – a_1y^3 + 4z^3t + 4zt^3 + 3/4a_1^2zt + 8y^2zt + 4y^2zt – 3a_1 yz^2 – 3a_1yt^2 + a_1y^3 +$
. $3a_1^3/16\, y + 3a_1yz^2 + 3a_1yt^2 – 3/2a_1^2zt – a_1a_2/2\, y + 2a_2zt + a_3y$

$P_2(\mathbf{w}) = [a_1^3/16(– 1 + 3) + a_3 – a_1a_2/2 + 8yzt]y + [4(y^2 + z^2 + t^2) + a_1^2/4(3 – 6) + 2a_2]\, zt$

$P_2(\mathbf{w}) = (a_1^3/8 + a_3 – a_1a_2/2 – a_1^3/8 – a_3 + a_1a_2/2)y + (3a_1^2/4 – 2a_2 – 3a_1^2/4 + 2a_2)\, zt = 0$

$P_3(\mathbf{w}) = 4x^3z + 4y^3t + 4xz^3 + 4yt^3 + 12x^2yt + 12xy^2z + 12yz^2t + 12xzt^2 - 4xz^3 – 12x^3z – 12xy^2z – 12xzt^2 – 24x^2yt + 4(3x^2 – y^2 – z^2 – t^2)\, xz + 4(3x^2 – y^2 – z^2 – t^2)yt + [- 4x(x^2 – y^2 – z^2 – t^2) – 8yzt]z$

$P_3(\mathbf{w}) = x^3z(4 – 12 + 12 – 4) + y^3t(4 – 4) + xz^3(4 – 4 – 4 + 4) + yt^3(4 – 4) + x^2yt(12 – 24 + 12) + xy^2z(12 -12 – 4 + 4) + yz^2t(12 – 4 – 8) + xzt^2(12 – 12 – 4 + 4) = 0$

$P_4(\mathbf{w}) = 4x^3t + 4y^3z + 4yz^3 + 4xt^3 + 12x^2yz + 12xy^2t + 12xz^2t + 12yzt^2 – 4xt^3 – 12x^3t – 12xy^2t – 12xz^2t – 24x^2yz + 4(3x^2 – y^2 – z^2 – t^2)xt + 4(3x^2 – y^2 – z^2 – t^2)yz + [– 4x(x^2 – y^2 – z^2 – t^2) – 8yzt]t$

$P_4(\mathbf{w}) = x^3t(4 – 12 + 12 – 4) + y^3z(4 – 4) + yz^3(4 – 4) + xt^3(4 – 4 – 4 + 4) + x^2yz(12 – 24 + 12) + xy^2t(12 –12 – 4 + 4) + xz^2t(12 – 12 – 4 + 4) + yzt^2(12 – 4 – 8) = 0$

(309) Denkleminin özdeş olarak sıfır olduğu görülmüştür. Bu sonuç (290) dört boyutlu uzayın vektör sisteminin, Öklid vektör uzayının, baz sistemi olmasıyla mümkündür. Köklerle katsayıların arasındaki bağıntılar, aralarında bağımsız olup, bağımsız x, y, z, t kök bileşenlerini çözmüşlerdir. Aynı formüller, bu dört bilinmeyeni içeren, bir vektörel ifadenin dört bileşenini sıfıra eşit kılmış, x, y, z, t bilinmeyenlerinin çözümünü sağlayacak, başka bir

denklem sistemi oluşturmuşlardır. Bu vektör sisteminin, doğrusal bağımsız olmadığını varsayalım. Üçü bağımsız biri bağımlı olsun. Bağımlı olan bir vektörü yok edelim. (309) denklemi sıfıra özdeş olduğundan, üç katsayı sıfıra eşitlenecektir. Böylece dört bilinmeyenli, üç denklem elde edilir. Bu sistem çözülmez. Bu denklem sisteminin çözümünün var olduğu, daha önce çözüldüğü için bilinmektedir. Birinci bileşen gerçel, diğerleri sanaldır. Bir sanal bileşenle, gerçel bileşenin doğrusal bağımsız olacağı kesindir. Fakat denklem sayısı yetersizdir. Ancak dört vektörün doğrusal bağımsız olması halinde denklem sayısı, bilinmeyen sayısına eşit olur. Böylece dört vektörün doğrusal bağımsız olacağı anlaşılır.

Bileşenlerin toplamı alınırsa,

$$P_1(\mathbf{w}) + P_2(\mathbf{w}) + P_3(\mathbf{w}) + P_4(\mathbf{w}) = (x + y + z + t)^4 + a_1(x + y + z + t)^3 + a_2(x + y + z + t)^2 + a_3(x + y + z + t) + a_4 = 0$$

bulunur. $x + y + z + t$'nin de, kök olduğu görülür.

Bir dördüncü derece denklemi, yukarda olduğu gibi, 1'in sekizinci kökleri yardımı ile de, dört kümeye ayrılabilir. Fakat sonuçta bulunan kümeler, buradakinden farklı olur ve sıfır olmadıklarından, bileşen olarak alınamaz.

x, y, z, t kök bileşenleri ne olursa olsun, (309) denklemi, özdeş olarak sıfırdır. Başlangıçta (28) ile verilen çözümler ile, y yerine $y\mathbf{e}_1$, z yerine $z\mathbf{e}_2$, t yerine $t\mathbf{e}_3$ konularak elde edilecek (293) çözümleri de, (309) denklemini sağlayacaktır. Böylece bir dördüncü derece denkleminin iki çözüm takımı vardır. Birincisi bilinen (28) ile verilen çözüm, diğeri üst karmaşık sayılarla verilen (293) çözümüdür.

Örnek

Kök bileşenleri, $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$, $t = 3$ olan bir dördüncü derece denkleminin kökleri,
$X_1 = x + y + z + t = 5$, $X_2 = x - y + z - t = -5$, $X_3 = x + y - z - t = 1$, $X_4 = x - y - z + t = 3$
olur. Bu sayıları kök kabul eden dördüncü derece denklemi,

$$X^4 - 4X^3 - 22X^2 + 100X - 75 = 0$$

olur. Bu denklemin ikinci çözüm takımı da,

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{1} + 2\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 + 3\mathbf{g}_3, \qquad \mathbf{X}_2 = \mathbf{1} - 2\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 - 3\mathbf{g}_3,$$
$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{1} + 2\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 - 3\mathbf{g}_3, \qquad \mathbf{X}_4 = \mathbf{1} - 2\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + 3\mathbf{g}_3$$

dır. Kök bileşenleri x, y, z, t gerçel ve karmaşık olabilir. $\mathbf{1}$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ üst karmaşık sayıları, Öklidsel değildir. Çünkü, gerek Öklid düzleminin izotrop nokta çiti ve gerekse, Öklid uzayının izotrop koniği ile bir ilgi kurulmamıştır.

Beşinci Derece Denklemlerin Bileşenlere Ayrılmaları

© Üst karmaşık sayılarla dördüncü derece denkleminin, dört bileşene ayrılması gibi, beşinci derece denklemi de, karmaşık sayılarla olan, 1'in beşinci kökleri ile beş bileşene ayrılır.

(310) $$\mathbf{p} = \mathrm{Cos}(2\pi/5) + i\,\mathrm{Sin}(2\pi/5), \qquad \mathbf{q} = \mathrm{Cos}(4\pi/5) + i\,\mathrm{Sin}(4\pi/5),$$
$$\mathbf{s} = \mathrm{Cos}(6\pi/5) + i\,\mathrm{Sin}(6\pi/5), \qquad \mathbf{r} = \mathrm{Cos}(8\pi/5) + i\,\mathrm{Sin}(8\pi/5)$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{p}^2, \quad \mathbf{s} = \mathbf{p}^3, \quad \mathbf{r} = \mathbf{p}^4, \quad \mathbf{p}^5 = 1, \quad \mathbf{pr} = 1, \quad \mathbf{qs} = 1, \quad (\mathbf{p} + \mathbf{r})(\mathbf{q} + \mathbf{s}) = -1$$

1, **p**, **q**, **s**, **r** birin beşinci kökleri ile, beşinci derece denkleminin kökleri, x, y, z, t, u gerçel olmak üzere,

$$\begin{aligned}
X_1 &= x + y + z + t + u\\
X_2 &= x + \mathbf{p}y + \mathbf{q}z + \mathbf{r}t + \mathbf{s}u\\
X_3 &= x + \mathbf{q}y + \mathbf{r}z + \mathbf{s}t + \mathbf{p}u\\
X_4 &= x + \mathbf{r}y + \mathbf{s}z + \mathbf{p}t + \mathbf{q}u\\
X_5 &= x + \mathbf{s}y + \mathbf{p}z + \mathbf{q}t + \mathbf{r}u
\end{aligned}$$

formülleri ile verilsinler. Köklerle katsayıların bağıntıları, (381) örneğinde oluğu gibi determinant açılımı ile hesaplanır. Bulunan sonuçlar,

(311) $$a_1 = -5x, \qquad a_2 = 10x^2 - 5(yt + zu),$$
$$a_3 = -5(2x^3 + y^2u + yz^2 + tu^2 + zt^2 - 3xyt - 3xzu),$$

$a_4 = 5[x^4 - 3x^2(yt + zu) + 2x(y^2u + yz^2 + zt^2 + tu^2) + y^2t^2 + z^2u^2 - y^3z - z^3t - t^3u - u^3y - yztu]$,
$a_5 = -[x^5 + y^5 + z^5 + t^5 + u^5 - 5x^3(yt + zu) + 5x^2(yz^2 + y^2u + zt^2 + tu^2) - 5x(y^3z + z^3t + t^3u + u^3y) + 5x(y^2t^2 + z^2u^2) - 5(y^3tu + yz^3u + yzt^3 + ztu^3) + 5(y^2z^2t + y^2u^2z + z^2t^2u + yt^2u^2) - 5xyztu]$
dır. Bu işlemlerin Matlab programı ile yapılması:

```
  f1 = inline('x(1,1)*x(2,2) + x(1,2)*x(2,1)');
 f2 = inline('(x(1,1)*x(2,2)*x(3,3) + x(1,1)*x(2,3)*x(3,2) + x(1,2)*x(2,3)*x(3,1) +
x(1,2)*x(2,1)*x(3,3) + x(1,3)*x(2,1)*x(3,2) + x(1,3)*x(2,2)*x(3,1)');
i = sqrt(–1);p = cos(2*pi/5) + i*sin(2*pi/5); q = cos(4*pi/5) + i*sin(4*pi/5); s = cos(6*pi/5) +
i*sin(6*pi/5); r = cos(8*pi/5) + i*sin(8*pi/5); g1 = [1 1 1 1 1]; g2 = [1 p s r q] ;  g3 = [1 q p s
r]; g4 = [1 r q p s]; g5 = [1 s r q p];  b = [g1;g2;g3;g4;g5;]'; c = [b(:,2)  b(:,4)]; h1 = 0;
for is = 1:4  for j = is +1 : 5  x = [c(i1,:) ; c(j, : )]; h1 = h1 + f1(x); end
end
h1,  c = [b(:,2)  b(:,3)  b(:,4)]; h2 = 0;  for is = 1:3  for j = is +1 : 4   for k = j + 1 :5
x = [c(is,:);c(j, : ); c(k,: )]; h2 = h2 + f2(x); end
      end
end
h2,   d = [b(:,2)  b(:,2)  b(:, 3)  b(:,,4)]; h3 = 0;  for i1 = 1:5  j1 = i1 +1;  k1 = i1+2; m1=i1+ 3;
n1 = i1 + 4;   if k1 > 5  k1 = k1 – 5;  end
if j1 > 5  j1 = j1 – 5;end
if m1 > 5  m1 = m1 – 5;end
if n1 > 5  n1 = n1 – 5;end
c = [d(j1,: )  d(k1,: )  d(m1,: )  d(n1,: )];  for is = 1:4  j = is + 1; k = is + 2; m = is + 3;
if k > 4   k = k – 4 ; end
if j > 4  j = j – 4; end
if m > 4  m = m – 4; end
x = [c(j,:);c(k,:);c(m,:)]; h3 = h3 + f2(x)*c(is,4); end
end
h3,   d = [b(:,2)  b(:,2)  b(:,2)  b(:,2)  b(:,2)];  h4 = 0; for i1 = 1:5  j1 = i1 + 1; k1 = i1 + 2;
m1 = i1 + 3; n1 = i1 + 4; if k1 > 5  k1 = k1 – 5;end
if j1 > 5  j1 = j1 – 5;end
if m1 > 5  m1 = m1 – 5;end
if n1 > 5  n1 = n1 – 5;end
c = [d(j1,:);d(k1,:);d(m1,:);d(n1,:)]; e = [c(:,1)  c(:,2)  c(:,3)];  h3 = 0; for = is = 1:4  j = is + 1;
k = is + 2; m = is + 3;  if k > 4  k = k – 4;end
if j > 4  j = j – 4;end
if m > 4  m = m – 4;end
x = [e(j,:);e(k,:);e(m,:)]; h3 = h3 + f2(x)*c(is,4);end
h4 = h4 + h3*d(i1,5);end
h4,
```

Köklerin çarpımlarının toplamları, determinantların açılım kuralına göre bulunurlar. Ancak tek enversiyonlu terimlerin önüne, negatif işaret konulmaz. f1 fonksiyonu, ikinci mertebeden, f2 fonksiyonu da, üçüncü mertebeden determinant açılımını yapar. Yukarda verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi, b matrisi ile verilmiştir. x, y, z, t, u değişkenleri, sıra ile, b matrisinin sütunlarında çarpandırlar. Örnekte, köklerin çarpımlarının toplamlarında bulunan, yt, yzt, y^2zt, y^5 terimlerinin katsayıları hesaplanmıştır. Bu terimlerde, bilgisayarla bulunan katsayı, kuvveti alınan değişkenlerin kuvvet üssünün faktöryeline bölünmelidir. Üçüncü terim 2! ile, dördüncü terim de, 5! ile bölünür. Köklerin çarpımlarının toplamlarında, aranan denklemin katsayısı, tek indisli ise, bulunan katsayının önüne negatif işaret konulur.

Program, determinantın açılması ile gelen işlemlerin, bilgisayar ortamındaki ifadeleridir.

(312) $$\mathbf{w} = x + \mathbf{p}y + \mathbf{q}z + \mathbf{r}t + \mathbf{s}u$$
$$P(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^5 + a_1\mathbf{w}^4 + a_2\mathbf{w}^3 + a_3\mathbf{w}^2 + a_4\mathbf{w} + a_5 = 0$$
w kökü ile beşinci derece denklemine girelim. 1'in beşinci kökleri, beş tane küme oluşturacaklardır. Bu kümelerin her biri, ayrı, ayrı sıfıra özdeştirler. Bu nedenle bu kümeler, beşinci derece denkleminin bileşenleridirler. Bu bileşenleri bulmak için, (385) kökünün beşinci dereceye kadar Binom açılımları yazılır. P(**w**) denkleminin bileşenleri,
$$\mathbf{w}^n = w_1^n + \mathbf{p}w_2^n + \mathbf{q}w_3^n + \mathbf{r}w_4^n + \mathbf{s}w_5^n$$
$$P_j(\mathbf{w}) = w_j^5 + a_1w_j^4 + a_2w_j^3 + a_3w_j^2 + a_4w_j + a_5 = 0, \quad (n, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$
$$P(\mathbf{w}) = P_1(\mathbf{w}) + \mathbf{p}P_2(\mathbf{w}) + \mathbf{q}P_3(\mathbf{w}) + \mathbf{r}P_4(\mathbf{w}) + \mathbf{s}P_5(\mathbf{w})$$
olsunlar. a_i ler gerçel olup, a_5 yalnız j = 1 için, yani birinci denklem bileşeninde yazılır.

(313) $$\mathbf{w}^2 = x^2 + 2yt + 2zu + \mathbf{p}(u^2 + 2xy + 2zt) + \mathbf{q}(y^2 + 2xz + 2tu) + \mathbf{r}(z^2 + 2xt + 2yu) + \mathbf{s}(t^2 + 2xu + 2yz)$$
$$w_1^2 = x^2 + 2yt + 2zu, \quad w_2^2 = u^2 + 2xy + 2zt, \quad w_3^2 = y^2 + 2xz + 2tu,$$
$$w_4^2 = z^2 + 2xt + 2yu, \quad w_5^2 = t^2 + 2xu + 2yz,$$
Benzer işlemlerle, Binom açılımları,
$$w_1^3 = x^3 + 6(xyt + xzu) + 3(u^2t + yz^2 + y^2u + zt^2),$$
$$w_2^3 = z^3 + 6(yzu + xzt) + 3(x^2y + y^2t + xu^2 + t^2u),$$
$$w_3^3 = t^3 + 6(yzt + xtu) + 3(x^2z + z^2u + u^2y + xy^2),$$
$$w_4^3 = u^3 + 6(ztu + xyu) + 3(x^2t + yt^2 + y^2z + xz^2),$$
$$w_5^3 = y^3 + 6(ytu + xyz) + 3(x^2u + zu^2 + z^2t + xt^2),$$
$$w_1^4 = x^4 + 12(x^2yt + x^2zu + xu^2t + xyz^2 + xy^2u + xzt^2) + 24yztu + 6(y^2t^2 + z^2u^2) + 4(y^3z + z^3t + t^3u + u^3y)$$
$$w_2^4 = t^4 + 12(xy^2t + ytu^2 + yzt^2 + x^2zt + xt^2u + z^2tu) + 24xyzu + 6(y^2z^2 + x^2u^2) + 4(y^3u + xz^3 + x^3y + zu^3)$$
$$w_3^4 = u^4 + 12(xz^2u + ztu^2 + y^2zu + xyu^2 + x^2tu + yt^2u) + 24xyzt + 6(x^2y^2 + z^2t^2) + 4(x^3z + y^3t + yz^3 + xt^3)$$
$$w_4^4 = y^4 + 12(xyt^2 + yz^2t + y^2tu + x^2yu + xy^2z + yzu^2) + 24xztu + 6(u^2t^2 + x^2z^2) + 4(x^3t + z^3u + zt^3 + u^3x)$$
$$w_5^4 = z^4 + 12(xzu^2 + yz^2u + zt^2u + xz^2t + y^2zt + x^2yz) + 24xytu + 6(y^2u^2 + x^2t^2) + 4(x^3u + xy^3 + yt^3 + tu^3)$$
$$w_1^5 = x^5 + y^5 + z^5 + t^5 + u^5 + 20(x^3yt + x^3zu + xy^3z + xz^3t + xt^3u + xu^3y + y^3ut + ztu^3 + yz^3u + yzt^3) + 30(x^2u^2t + x^2yz^2 + x^2y^2u + x^2zt^2 + xy^2t^2 + xz^2u^2 + yt^2u^2 + z^2t^2u + y^2z^2t + y^2zu^2) + 120xyztu$$
$$w_2^5 = 5(x^4y + y^4z + z^4u + xt^4 + tu^4) + 30(x^2y^2t + xy^2z^2 + yz^2u^2 + x^2t^2u + zt^2u^2) + 60(x^2yzu + xytu^2 + xyzt^2 + y^2ztu + xz^2tu) + 20(xy^3u + yt^3u + x^3zt + xzu^3 + yz^3t) + 10(y^3t^2 + y^2u^3 + x^3u^2 + x^2z^3 + z^2t^3)$$
$$w_3^5 = 5(x^4z + y^4u + z^4t + yt^4 + xu^4) + 30(x^2z^2u + xz^2t^2 + y^2zt^2 + y^2tu^2 + x^2yu^2) + 60(x^2yzt + xztu^2 + xyt^2u + xy^2zu + yz^2tu) + 20(xyz^3 + zt^3u + xy^3t + yzu^3 + x^3tu) + 10(z^3u^2 + y^3z^2 + x^3y^2 + x^2t^3 + t^2u^3)$$
$$w_4^5 = 5(x^4t + xy^4 + yz^4 + t^4u + zu^4) + 30(x^2yt^2 + xu^2t^2 + z^2tu^2 + y^2z^2u + x^2y^2z) + 60(x^2ztu + xyz^2t + xy^2tu + yzt^2u + xyzu^2) + 20(xzt^3 + y^3zt + ytu^3 + xz^3u + x^3yu) + 10(y^2t^3 + z^3t^2 + x^3z^2 + x^2u^3 + y^3u^2)$$
$$w_5^5 = 5(x^4u + y^4t + xz^4 + zt^4 + yu^4) + 30(x^2zu^2 + xy^2u^2 + y^2t^2u + yz^2t^2 + x^2z^2t) + 60(x^2ytu + yztu^2 + xzt^2u + xy^2zt + xyz^2u) + 20(xtu^3 + y^3zu + z^3tu + x^3yz + xyt^3) + 10(t^3u^2 + y^2z^3 + x^3t^2 + x^2y^3 + z^2u^3)$$
olur.

Birinci bileşen sıfıra özdeştir.
$$P_1(\mathbf{w}) = w_1^5 + a_1w_1^4 + a_2w_1^3 + a_3w_1^2 + a_4w_1 + a_5 = 0$$

Bu amaçla önce, $a_1w_1^4$, $a_2w_1^3$, $a_3w_1^2$, a_4w_1 çarpımlarını hesaplayalım.

$a_1w_1^4 = -5[x^5 + 12(x^3yt + x^3zu + x^2u^2t + x^2yz^2 + x^2y^2u + x^2zt^2) + 24xyztu + 6(xy^2t^2 +$
$xz^2u^2) + 4(xy^3z + xz^3t + xt^3u + xyu^3)],$

$a_2w_1^3 = 5[2x^2 - yt - zu)]\,[x^3 + 6(xyt + xzu) + 3(y^2u + yz^2 + zt^2 + tu^2)] =$
$5[2x^5 + 12(x^3yt + x^3zu) + 6(x^2y^2u + x^2yz^2 + x^2zt^2 + x^2tu^2) - x^3yt - 6(xy^2t^2 + xyztu)$
$- 3(y^3tu + y^2z^2t + yzt^3 + yt^2u^2) - x^3zu - 6(xyztu + xz^2u^2) - 3(y^2zu^2 + yz^3u + z^2t^2u + ztu^3)]$

$a_3w_1^2 = (x^2 + 2yt + 2zu)\,[-5(2x^3 + y^2u + yz^2 + zt^2 + tu^2 - 3xyt - 3xzu)] =$
$-5[2x^5 + x^2y^2u + x^2yz^2 + x^2zt^2 + x^2tu^2 - 3(x^3yt + x^3zu) + 4x^3yt + 2y^3tu + 2y^2z^2t + 2yzt^3$
$2yt^2u^2 - 6(xy^2t^2 + xyztu) + 4x^3zu + 2y^2zu^2 + 2yz^3u + 2z^2t^2u + 2ztu^3 - 6(xyztu + xz^2u^2)]$

$a_4w_1 = 5[x^5 - 3(x^3yt + x^3zu) + 2(x^2y^2u + x^2yz^2 + x^2zt^2 + x^2tu^2) + xy^2t^2 + xz^2u^2 - xy^3z - xz^3t$
$- xt^3u - xyu^3 - xyztu\,]$

Bu değerler,

$$P_1(\mathbf{w}) = w_1^5 + a_1w_1^4 + a_2w_1^3 + a_3w_1^2 + a_4w_1 + a_5 = 0$$

denkleminde yerine konulacaktır.

$$P_1(\mathbf{w}) = x^5 + y^5 + z^5 + t^5 + u^5 + 20(x^3yt + x^3zu + xy^3z + xz^3t + xt^3u + xu^3y +$$
$$y^3ut + ztu^3 + yz^3u + yzt^3) + 30(x^2u^2t + x^2yz^2 + x^2y^2u + x^2zt^2 + xy^2t^2 + xz^2u^2 + yt^2u^2 +$$
$$z^2t^2u + y^2z^2t + y^2zu^2) + 120\,xyztu +$$
$$-5[x^5 + 12\,(x^3yt + x^3zu + x^2u^2t + x^2yz^2 + x^2y^2u + x^2zt^2) + 24xyztu + 6(xy^2t^2 +$$
$$xz^2u^2) + 4(xy^3z + xz^3t + xt^3u + xu^3y)] +$$
$$5[2x^5 + 12(x^3yt + x^3zu) + 6(x^2u^2t + x^2yz^2 + x^2y^2u + x^2zt^2) - x^3yt - 6(xy^2t^2 + xyztu) +$$
$$-3(yt^2u^2 + y^2z^2t + y^3tu + yzt^3) - x^3zu - 6(xyztu + xz^2u^2) - 3(ztu^3 + yz^3u + y^2zu^2 + z^2t^2u)] +$$
$$-5[2x^5 + x^2y^2u + x^2yz^2 + x^2zt^2 + x^2tu^2 - 3(x^3yt + x^3zu) + 4x^3yt + 2y^3tu + 2y^2z^2t + 2yzt^3 +$$
$$2yt^2u^2 - 6(xy^2t^2 + xyztu) + 4x^3zu + 2y^2zu^2 + 2yz^3u + 2z^2t^2u + 2ztu^3 - 6(xyztu + xz^2u^2)] +$$
$$5[x^5 - 3(x^3yt + x^3zu) + 2(x^2y^2u + x^2yz^2 + x^2zt^2 + x^2tu^2) + xy^2t^2 + xz^2u^2 - xy^3z - xz^3t +$$
$$- xt^3u - xu^3y - xyztu]$$
$$- x^5 - y^5 - z^5 - t^5 - u^5 + 5(x^3yt + x^3zu) - 5(x^2yz^2 + x^2y^2u + x^2zt^2 + x^2tu^2) + 5(xy^3z + xz^3t +$$
$$xt^3u + xu^3y) - 5(xy^2t^2 + xz^2u^2) + 5(y^3tu + yz^3u + yzt^3 + ztu^3) - 5(y^2z^2t + y^2zu^2 + z^2t^2u +$$
$$yt^2u^2) + 5xyztu$$

$$P_1(\mathbf{w}) = x^5(1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1) + y^5\,(1 - 1) + z^5\,(1 - 1) + t^5\,(1 - 1) + u^5\,(1 - 1) +$$
$$x^3yt\,(20 - 60 + 60 - 5 - 20 + 15 - 15 + 5) + x^3zu(20 - 60 + 60 - 5 - 20 + 15 - 15 + 5) +$$
$$xy^3z(20 - 20 - 5 + 5) + xz^3t(20 - 20 - 5 + 5) + xt^3u(20 - 20 - 5 + 5) + xu^3y(20 - 20 - 5 + 5)$$
$$y^3ut(20 - 15 - 10 + 5) + ztu^3(20 - 15 - 10 + 5) + yz^3u(20 - 15 - 10 + 5) + yzt^3(20 - 15 - 10 +$$
$$5) + x^2u^2t(30 - 60 + 30 - 5 + 10 - 5) + x^2yz^2(30 - 60 + 30 - 5 + 10 - 5) + x^2y^2u(30 - 60 - 5$$
$$+10 - 5) + x^2zt^2(30 - 60 + 30 - 5 + 10 - 5) + xy^2t^2(30 - 30 - 30 + 30 + 5 - 5) + xz^2u^2(30 - 30$$
$$- 30 + 30 + 5 - 5) + yt^2u^2(30 - 15 - 10 - 5) + z^2t^2u(30 - 15 - 10 - 5) + y^2z^2t(30 - 15 - 10$$
$$- 5) + y^2zu^2(30 - 15 - 10 - 5) + xyztu(120 - 120 - 30 - 30 + 30 + 30 - 5 + 5) = 0$$

Kısaltmalar yapılırsa, $P_1(\mathbf{w})$'nin sıfıra özdeş olduğu görülür. Benzer işlemlerle, diğer bileşenlerin de, sıfıra özdeş oldukları görülür.

İkinci bileşen sıfıra özdeştir.

(314) $\qquad P_2(\mathbf{w}) = w_2^5 + a_1w_2^4 + a_2w_2^3 + a_3w_2^2 + a_4w_2 = 0,$

Önce $a_1w_2^4$, $a_2w_2^3$, $a_3w_2^2$, a_4w_2 çarpımlarını hesaplayalım.

$a_1w_2^4 = -5\,[xt^4 + 12(x^2y^2t + xytu^2 + xyzt^2 + x^3zt + x^2t^2u + xz^2tu) + 24x^2yzu +$
$6(xy^2z^2 + x^3u^2) + 4(xy^3u + x^2z^3 + x^4y + xzu^3)],$

$a_2w_2^3 = 5[2x^2 - (yt + zu)][z^3 + 6(yzu + xzt) + 3(x^2y + y^2t + xu^2 + t^2u)] = 5[2x^2z^3 + 12(x^2yzu +$
$x^3zt) + 6(x^4y + x^2y^2t + x^3u^2 + x^2t^2u) - yz^3t - 6(y^2ztu + xyzt^2) - 3(x^2y^2t + y^3t^2 + xytu^2 + yt^3u)$
$- z^4u - 6(yz^2u^2 + xz^2tu) - 3(x^2yzu + y^2ztu + xzu^3 + zt^2u^2)],$

$a_3w_2^2 = -5(2x^3 + y^2u + yz^2 + tu^2 + zt^2 - 3xyt - 3xzu)\,(u^2 + 2xy + 2zt) =$
$-5(2x^3u^2 + 4x^4y + 4x^3zt + y^2u^3 + 2xy^3u + 2y^2ztu + yz^2u^2 + 2xy^2z^2 + 2yz^3t + tu^4 + 2xytu^2 +$
$2zt^2u^2 + zt^2u^2 + 2xyzt^2 + 2z^2t^3 - 3xytu^2 - 6x^2y^2t - 6xyzt^2 - 3xzu^3 - 6x^2yzu - 6xz^2tu)$

$a_4w_2 = 5(x^4y - 3x^2y^2t - 3x^2yzu + 2xy^3u + 2xy^2z^2 + 2xyzt^2 + 2xytu^2 + y^3t^2 + yz^2u^2 - y^4z - yz^3t$

$- yt^3u - y^2u^3 - y^2ztu)$

Bu değerleri, (387) denkleminde yerlerine koyalım.

$P_2(\mathbf{w}) = 5[(x^4y + y^4z + z^4u + xt^4 + tu^4) + 6(x^2y^2t + xy^2z^2 + yz^2u^2 + x^2t^2u + zt^2u^2) +$
$12(x^2yzu + xytu^2 + xyzt^2 + y^2ztu + xz^2tu) + 4(xy^3u + yt^3u + x^3zt + xzu^3 + yz^3t) +$
$2(y^3t^2 + y^2u^3 + x^3u^2 + x^2z^3 + z^2t^3)] +$
$- 5 [xt^4 + 12(x^2y^2t + xytu^2 + xyzt^2 + x^3zt + x^2t^2u + xz^2tu) + 24x^2yzu +$
$6(xy^2z^2 + x^3u^2) + 4(xy^3u + x^2z^3 + x^4y + xzu^3)] +$
$5[2x^2 z^3 + 12(x^2yzu + x^3zt) + 6(x^4y + x^2y^2t + x^3u^2 + x^2t^2u) - yz^3t - 6(y^2ztu + xyzt^2)$
$- 3(x^2y^2t + y^3t^2 + xytu^2 + yt^3u) - z^4u - 6(yz^2u^2 + xz^2tu) - 3(x^2yzu + y^2ztu + xzu^3 + zt^2u^2)]$
$- 5(2x^3u^2 + 4x^4y + 4x^3zt + y^2u^3 + 2xy^3u + 2y^2ztu + yz^2u^2 + 2xy^2z^2 + 2yz^3t + tu^4 + 2xytu^2 +$
$2zt^2u^2 + zt^2u^2 + 2xyzt^2 + 2z^2t^3 - 3xytu^2 - 6x^2y^2t - 6xyzt^2 - 3xzu^3 - 6x^2yzu - 6xz^2tu) +$
$5(x^4y - 3x^2y^2t - 3x^2yzu + 2xy^3u + 2xy^2z^2 + 2xyzt^2 + 2xytu^2 + y^3t^2 + yz^2u^2 - y^4z - yz^3t$
$- yt^3u - y^2u^3 - y^2ztu)$

Kısaltmalar yapılırsa,

$P_2(\mathbf{w}) = x^4y(5 - 20 + 30 - 20 + 5) + y^4z(5 - 5) + z^4u(5 - 5) + xt^4(5 - 5) + tu^4(5 - 5) +$
$x^2y^2t(30 - 60 + 30 - 15 + 30 - 15) + xy^2z^2(30 - 30) + yz^2u^2(30 - 30 - 5 + 5) + x^2t^2u(30 - 60 +$
$30) + zt^2u^2(30 - 15 - 5 - 10) + x^2yzu(60 - 120 + 60 - 15 + 30 - 15) + xytu^2(60 - 60 - 15 - 10$
$+ 15 + 10) + xyzt^2(60 - 60 - 30 - 10 + 30 + 10) + y^2ztu(60 - 30 - 15 - 10 - 5) + xz^2tu(60 -$
$60 - 30 + 30) + xy^3u(20 - 20 - 10 + 10) + yt^3u(20 - 15 - 5) + x^3zt(20 - 60 + 60 - 20) +$
$xzu^3(20 - 20 - 15 + 15) + yz^3t(20 - 5 - 10 - 5) + y^3t^2(10 - 15 + 5) + y^2u^3(10 - 5 - 5) +$
$x^3u^2(10 - 30 + 30 - 10) + x^2z^3(10 - 20 + 10) + z^2t^3(10 - 10) = 0$

Üçüncü bileşen sıfıra özdeştir.

$$P_3(\mathbf{w}) = w_3^5 + a_1w_3^4 + a_2w_3^3 + a_3w_3^2 + a_4w_3 = 0$$

Önce $a_1w_3^4$, $a_2w_3^3$, $a_3w_3^2$, a_4w_3 çarpımlarını hesaplayalım

$a_1w_3^4 = - 5 [xu^4 + 12(x^2z^2u + xztu^2 + xy^2zu + x^2yu^2 + x^3tu + xyt^2u) + 24x^2yzt +$
$6(x^3y^2 + xz^2t^2) + 4(x^4z + xy^3t + xyz^3 + x^2t^3)]$

$a_2w_3^3 = [10x^2 - 5(yt + zu)][t^3 + 6(yzt + xtu) + 3(x^2z + z^2u + yu^2 + xy^2)] = 10x^2 t^3 + 60(x^2yzt +$
$x^3tu) + 30(x^4z + x^2z^2u + x^2yu^2 + x^3y^2) - 5yt^4 - 30(y^2zt^2 + xyt^2u) - 15(x^2yzt + yz^2tu + y^2tu^2 +$
$xy^3t) - 5zt^3u - 30(yz^2tu + xztu^2) - 15(x^2z^2u + z^3u^2 + yzu^3 + xy^2zu)$

$a_3w_3^2 = - 5(2x^3 + y^2u + yz^2 + tu^2 + zt^2 - 3xyt - 3xzu) (y^2 + 2xz + 2tu) =$
$- 5(2x^3y^2 + 4x^4z + 4x^3tu + y^4u + 2xy^2zu + 2y^2tu^2 + y^3z^2 + 2xyz^3 + 2yz^2tu + y^2tu^2 + 2xztu^2 +$
$2t^2u^3 + y^2zt^2 + 2xz^2t^2 + 2zt^3u - 3xy^3t - 6x^2yzt - 6xyt^2u - 3xy^2zu - 6x^2z^2u - 6xztu^2)$

$a_4w_3 = 5(x^4z - 3x^2yzt - 3x^2z^2u + 2xy^2zu + 2xyz^3 + 2xz^2t^2 + 2xztu^2 + y^2zt^2 + z^3u^2 - y^3z^2$
$- z^4t - zt^3u - yzu^3 - yz^2tu)$

Bulunan bu değerleri, üçüncü bileşen denkleminde yerlerine koyalım.

$P_3(\mathbf{w}) = 5[(x^4z + y^4u + z^4t + yt^4 + xu^4) + 6(x^2z^2u + xz^2t^2 + y^2zt^2 + y^2tu^2 + x^2yu^2) +$
$12(x^2yzt + xztu^2 + xyt^2u + xy^2zu + yz^2tu) + 4(xyz^3 + zt^3u + xy^3t + yzu^3 + x^3tu) +$
$2(z^3u^2 + y^3z^2 + x^3y^2 + x^2t^3 + t^2u^3)]$
$- 5 [xu^4 + 12(x^2z^2u + xztu^2 + xy^2zu + x^2yu^2 + x^3tu + xyt^2u) + 24x^2yzt +$
$6(x^3y^2 + xz^2t^2) + 4(x^4z + xy^3t + xyz^3 + x^2t^3)] +$
$10x^2 t^3 + 60(x^2yzt + x^3tu) + 30(x^4z + x^2z^2u + x^2yu^2 + x^3y^2) - 5yt^4 - 30(y^2zt^2 + xyt^2u) +$
$-15(x^2yzt + yz^2tu + y^2tu^2 + xy^3t) - 5zt^3u - 30(yz^2tu + xztu^2) - 15(x^2z^2u + z^3u^2 + yzu^3 + xy^2zu)$
$- 5(2x^3y^2 + 4x^4z + 4x^3tu + y^4u + 2xy^2zu + 2y^2tu^2 + y^3z^2 + 2xyz^3 + 2yz^2tu + y^2tu^2 + 2xztu^2 +$
$2t^2u^3 + y^2zt^2 + 2xz^2t^2 + 2zt^3u - 3xy^3t - 6x^2yzt - 6xyt^2u - 3xy^2zu - 6x^2z^2u - 6xztu^2) +$
$5(x^4z - 3x^2yzt - 3x^2z^2u + 2xy^2zu + 2xyz^3 + 2xz^2t^2 + 2xztu^2 + y^2zt^2 + z^3u^2 - y^3z^2 - z^4t - zt^3u$
$- yzu^3 - yz^2tu)$

$P_3(\mathbf{w}) = x^4z(5 - 20 + 30 - 20 + 5) + y^4u(5 - 5) + z^4t(5 - 5) + yt^4(5 - 5) + xu^4(5 - 5) + x^2z^2u(30$
$- 60 + 30 - 15 + 30 - 15) + xz^2t^2(30 - 30 - 10 + 10) + y^2zt^2(30 - 30 - 5 + 5) + y^2tu^2(30 - 15$
$- 10 - 5) + x^2yu^2(30 - 60 + 30) + x^2yzt(60 - 120 + 60 - 15 + 30 - 15) + xztu^2(60 - 60 - 30$
$- 10 + 30 + 10) + xyt^2u(60 - 60 - 30 + 30) + xy^2zu(60 - 60 - 15 - 10 + 15 + 10) + yz^2tu(60$

$– 15 – 30 – 10 – 5) + xyz^3(20 – 20 – 10 + 10) + zt^3u(20 – 5 – 10 – 5) + xy^3t(20 – 20 – 15 + 15) + yzu^3(20 – 15 – 5) + x^3tu(20 – 60 + 60 – 20) + z^3u^2(10 – 15 + 5) + y^3z^2(10 – 5 – 5) + x^3y^2(10 – 30 + 30 – 10) + x^2t^3(10 – 20 + 10) + t^2u^3(10 – 10) = 0$

Dördüncü bileşen sıfıra özdeştir.

$$P_4(\mathbf{w}) = w_4^5 + a_1w_4^4 + a_2w_4^3 + a_3w_4^2 + a_4w_4 = 0$$

Önce $a_1w_4^4$, $a_2w_4^3$, $a_3w_4^2$, a_4w_4 çarpımlarını hesaplayalım

$a_1w_4^4 = – 5 [xy^4 + 12(x^2yt^2 + xyz^2t+ xy^2tu + x^3yu + x^2y^2z + xyzu^2) + 24x^2ztu + 6(xu^2t^2 + x^3z^2) + 4(x^4t + xz^3u + xzt^3 + x^2u^3)]$,

$a_2w_4^3 = 5[2x^2 – (yt + zu)][u^3 + 6(ztu + xyu) + 3(x^2t + yt^2+ y^2z+ xz^2)] = 5[2x^2 u^3 + 12(x^2ztu + x^3yu) + 6(x^4t + x^2yt^2 + x^2y^2z+ x^3z^2) – ytu^3 – 6(yzt^2u + xy^2tu) – 3(x^2yt^2 + y^2t^3 + y^3zt + xyz^2t) – zu^4 – 6(z^2tu^2 + xyzu^2) – 3(x^2ztu + yzt^2u + y^2z^2u + xz^3u)]$,

$a_3w_4^2 = – 5(2x^3 + y^2u + yz^2 + tu^2 + zt^2 – 3xyt – 3xzu) (z^2 + 2xt + 2yu) = – 5(2x^3z^2 + 4x^4t + 4x^3yu + y^2z^2u + 2xy^2tu + 2y^3u^2 + yz^4 + 2xyz^2t + 2y^2z^2u + z^3t^2 + 2xzt^3 + 2yzt^2u + z^2tu^2 + 2xt^2u^2 + 2ytu^3 – 3xyz^2t – 6x^2yt^2 – 6xy^2tu – 3xz^3u – 6x^2ztu – 6xyzu^2)$,

$a_4w_4 = 5(x^4t – 3x^2yt^2 – 3x^2ztu + 2xy^2tu + 2xyz^2t + 2xzt^3 + 2xt^2u^2 + y^2t^3 + z^2tu^2 – y^3zt – z^3t^2 – t^4u – ytu^3 – yzt^2u)$,

$P_4(\mathbf{w}) = 5[(x^4t + xy^4 + yz^4 + t^4u+ zu^4) + 6(x^2yt^2 + xu^2t^2 + z^2tu^2 + y^2z^2u + x^2y^2z) + 12(x^2ztu + xyz^2t+ xy^2tu + yzt^2u + xyzu^2) + 4(xzt^3 + y^3zt + ytu^3 + xz^3u+ x^3yu) + 2(y^2t^3 + z^3t^2 + x^3z^2 + x^2u^3 + y^3u^2)]$
$– 5 [xy^4 + 12(x^2yt^2 + xyz^2t+ xy^2tu + x^3yu + x^2y^2z + xyzu^2) + 24x^2ztu + 6(xu^2t^2 + x^3z^2) + 4(x^4t + xz^3u + xzt^3 + x^2u^3)] +$
$5[2x^2u^3 + 12(x^2ztu + x^3yu) + 6(x^4t + x^2yt^2 + x^2y^2z+ x^3z^2) – ytu^3 – 6(yzt^2u + xy^2tu) – 3(x^2yt^2 + y^2t^3 + y^3zt + xyz^2t) – zu^4 – 6(z^2tu^2 + xyzu^2) – 3(x^2ztu + yzt^2u + y^2z^2u + xz^3u)]$
$– 5(2x^3z^2 + 4x^4t + 4x^3yu + y^2z^2u + 2xy^2tu + 2y^3u^2 + yz^4 + 2xyz^2t+ 2y^2z^2u + z^3t^2 + 2xzt^3 + 2yzt^2u + z^2tu^2 + 2xt^2u^2 + 2ytu^3 – 3xyz^2t – 6x^2yt^2 – 6xy^2tu – 3xz^3u – 6x^2ztu – 6xyzu^2) +$
$5(x^4t – 3x^2yt^2 – 3x^2ztu + 2xy^2tu + 2xyz^2t + 2xzt^3 + 2xt^2u^2 + y^2t^3 + z^2tu^2 – y^3zt – z^3t^2 – t^4u – ytu^3 – yzt^2u)$,

$P_4(\mathbf{w}) = x^4t(5 – 20 + 30 – 20 + 5) + xy^4(5 – 5) + yz^4(5 – 5) + t^4u(5 – 5) + zu^4(5 – 5) + x^2yt^2(30 – 60 + 30 – 15 + 30 – 15) + xu^2t^2(30 – 30 – 10 + 10) + z^2tu^2(30 – 30 – 5 + 5) + y^2z^2u(30 – 15 – 5 – 10) + x^2y^2z(30 – 60 + 30) + x^2ztu(60 – 120 + 60 – 15 + 30 – 15) + xyz^2t(60 – 60 – 15 – 10 + 15 + 10) + xy^2tu(60 – 60 – 30 – 10 + 30 + 10) + yzt^2u(60 – 30 – 15 – 10 – 5) + xyzu^2(60 – 60 – 30 + 30) + xzt^3(20 – 20 – 10 + 10) + y^3zt(20 – 15 – 5) + ytu^3(20 – 5 – 10 – 5) + xz^3u(20 – 20 – 15 + 15) + x^3yu(20 – 60 + 60 – 20) + y^2t^3(10 – 15 + 5) + z^3t^2(10 – 5 – 5) + x^3z^2(10 – 30 + 30 – 10) + x^2u^3(10 – 20 + 10) + y^3u^2(10 – 10) = 0$

Beşinci bileşen sıfıra özdeştir.

$$P_5(\mathbf{w}) = w_5^5 + a_1w_5^4 + a_2w_5^3 + a_3w_5^2 + a_4w_5 = 0,$$

Önce $a_1w_5^4$, $a_2w_5^3$, $a_3w_5^2$, a_4w_5 çarpımlarını hesaplayalım.

$a_1w_5^4 = – 5 [xz^4 + 12(x^2zu^2 + xyz^2u+ xzt^2u + x^2z^2t + xy^2zt + x^3yz) + 24x^2ytu + 6(xy^2u^2 + x^3t^2) + 4(x^4u + x^2y^3 + xyt^3 + xtu^3)]$,

$a_2w_5^3 = 5[2x^2 – yt – zu)][y^3 + 6(ytu + xyz) + 3(x^2u + z^2t+ xt^2 + zu^2)] = 5[2x^2y^3 + 12(x^2ytu + x^3yz) + 6(x^4u + x^2z^2t + x^3t^2 + x^2zu^2) – y^4t – 6(y^2t^2u + xy^2zt) – 3(x^2ytu + yz^2t^2 + xyt^3 + yztu^2) – y^3zu – 6(yztu^2 + xyz^2u) – 3(x^2zu^2 + z^3tu + xzt^2u + z^2u^3)]$,

$a_3w_5^2 = – 5(2x^3 + y^2u + yz^2 + tu^2 + zt^2 – 3xyt – 3xzu) (t^2 + 2xu + 2yz) = – 5(2x^3t^2 + 4x^4u + 4x^3yz + y^2t^2u + 2xy^2u^2 + 2y^3zu + yz^2t^2 + 2xyz^2u + 2y^2z^3 + t^3u^2 + 2xtu^3 + 2yztu^2 + zt^4 + 2xzt^2u + 2yz^2t^2 – 3xyt^3 – 6x^2ytu – 6xy^2zt – 3xzt^2u – 6x^2zu^2 – 6xyz^2u)$,

$a_4w_5 = 5(x^4u – 3x^2ytu – 3x^2zu^2 + 2xy^2u^2 + 2xyz^2u + 2xzt^2u + 2xtu^3 + y^2t^2u + z^2u^3 – y^3zu – z^3tu – t^3u^2 – yu^4 – yztu^2)$,

$P_5(\mathbf{w}) = 5[(x^4u + y^4t + xz^4 + zt^4 + yu^4) + 6(x^2zu^2 + xy^2u^2 + y^2t^2u+ yz^2t^2 + x^2z^2t) + 12(x^2ytu + yztu^2 + xzt^2u+ xy^2zt + xyz^2u) + 4(xtu^3 + y^3zu + z^3tu + x^3yz + xyt^3) + 2(t^3u^2 + y^2z^3 + x^3t^2 + x^2y^3 + z^2u^3)]$

$– 5 [xz^4 + 12(x^2zu^2 + xyz^2u+ xzt^2u + x^2z^2t + xy^2zt + x^3yz) + 24x^2ytu + 6(xy^2u^2 + x^3t^2) + 4(x^4u + x^2y^3 + xyt^3 + xtu^3)] +$
$5[2x^2y^3 + 12(x^2ytu + x^3yz) + 6(x^4u + x^2zu^2 + x^2z^2t+ x^3t^2) – y^4t – 6(y^2t^2u + xy^2zt) – 3(x^2ytu + yztu^2 + yz^2t^2 + xyt^3) – y^3zu – 6(yztu^2 + xyz^2u) – 3(x^2zu^2 + z^2u^3 + z^3tu + xzt^2u)]$
$– 5(2x^3t^2 + 4x^4u + 4x^3yz + y^2t^2u + 2xy^2u^2 + 2y^3zu + yz^2t^2 + 2xyz^2u + 2y^2z^3 + t^3u^2 + 2xtu^3 + 2yztu^2 + zt^4 + 2xzt^2u + 2yz^2t^2 – 3xyt^3 – 6x^2ytu – 6xy^2zt – 3xzt^2u – 6x^2zu^2 – 6xyz^2u) +$
$5(x^4u – 3x^2ytu – 3x^2zu^2 + 2xy^2u^2 + 2xyz^2u + 2xzt^2u + 2xtu^3 + y^2t^2u + z^2u^3 – y^3zu – z^3tu – t^3u^2 – yu^4 – yztu^2),$
$P_5(\mathbf{w}) = x^4u(5 – 20 + 30 – 20 + 5) + y^4t(5 – 5) + xz^4(5 – 5) + zt^4(5 – 5) + yu^4(5 – 5) + x^2zu^2(30 – 60 + 30 – 15 + 30 – 15) + xy^2u^2(30 – 30 – 10 + 10) + y^2t^2u(30 – 30 – 5 + 5) + yz^2t^2(30 – 15 – 5 – 10) + x^2z^2t(30 – 60 + 30) + x^2ytu(60 – 120 + 60 – 15 + 30 – 15) + yztu^2(60 – 15 – 30 – 10 – 5) + xzt^2u(60 – 60 – 15 – 10 + 15 + 10) + xy^2zt(60 – 60 – 30 + 30) + xyz^2u(60 – 60 – 30 – 10 + 30 + 10) + xtu^3(20 – 20 – 10 + 10) + y^3zu(20 – 5 – 10 – 5) + z^3tu(20 – 15 – 5) + x^3yz(20 – 60 + 60 – 20) + xyt^3(20 – 20 – 15 + 15) + t^3u^2(10 – 5 – 5) + y^2z^3(10 – 10) + x^3t^2(10 – 30 + 30 – 10) + x^2y^3(10 – 20 + 10) + z^2u^3(10 – 15 + 5) = 0$

Sıfıra özdeş olduğu görülmektedir. 1'in beşinci kökleri, karmaşık sayılar olup, iki boyutlu uzayı doldururlar. Burada ise, bu karmaşık sayıların, beş boyutlu uzayın baz elemanları oldukları görülmektedir. Çünkü beşinci dereceden denklemi, beş bileşene ayırmışlardır.

III

İKİNCİ SANAL DÜZLEM ve DÜZLEMİN İKİNCİ KARMAŞIK SAYILARI

İkinci Sanal Düzlem

Karmaşık sayılar düzlemi, birinci sanal düzlem olarak adlandırılsın. Bu kavrama benzer olarak ikinci sanal düzlem kavramını tanımlayalım. **g** sayısı $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ sanal sayılarından birine eşit olsun.

(315) $$\mathbf{w} = e^{\mathbf{g}\,\theta} = 1 + \mathbf{g}\theta/1! + \theta^2/2! + \mathbf{g}\theta^3/3! + \theta^4/4! + ... + \mathbf{g}^n\,\theta^n/n!$$
$$\mathbf{w} = \mathrm{Ch}\,\theta + \mathbf{g}\mathrm{Sh}\,\theta$$

fonksiyonunun gösterilimini sağlayan düzleme, **ikinci sanal düzlem** ve ρ**w** sayısına da, **düzlemin ikinci karmaşık sayısı** denilecektir. Böylece gerçel düzlemle beraber, 3 tane düzlem işlem alanına girmişlerdir. Bu düzlemler çakışıktırlar. Ancak ayrım sanaldır (hayalidir). Üç düzlemin üçü de, birbirlerine görünmezler. Ayrım gizlilikleridir. Gerçek anlamda bir ayrım değildir.

İkinci sanal düzlemin karmaşık sayıları arasındaki işlemler şunlardır:

(316) $\mathbf{w}_1 = a_1 + \mathbf{g}b_1, \quad \mathbf{w}_2 = a_2 + \mathbf{g}b_2, \quad \mathbf{w}_1 \pm \mathbf{w}_2 = a_1 \pm a_2 + \mathbf{g}(b_1 \pm b_2)$
$w_1\, w_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + g(a_1b_2 + a_2b_1), \quad w_1/w_2 = (a_1 + gb_1)(a_2 – gb_2)/[(a_2 + gb_2)(a_2 – g\, b_2)]$
$\mathbf{w}_1/\mathbf{w}_2 = [a_1a_2 – b_1b_2 + \mathbf{g}(– a_1b_2 + a_2b_1)]/(a_2^2 – b_2^2), \quad \rho^2 = a^2 – b^2, \quad \theta = \mathrm{argth}\; b/a,$
$\mathbf{w}_1 = \rho_1 e^{\mathbf{g}\,\theta_1}, \quad \mathbf{w}_2 = \rho_2 e^{\mathbf{g}\,\theta_2}, \quad \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 = \rho_1\rho_2\, e^{\mathbf{g}\,(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1\rho_2\,[\mathrm{Ch}(\theta_1 + \theta_2) + \mathbf{g}\,\mathrm{Sh}(\theta_1 + \theta_2)],$
$\mathbf{w}_1/\mathbf{w}_2 = \rho_1/\rho_2\, e^{\mathbf{g}\,(\theta_1 – \theta_2)} = \rho_1/\rho_2\,[\mathrm{Ch}(\theta_1 – \theta_2) + \mathbf{g}\,\mathrm{Sh}(\theta_1 – \theta_2)],$

Moivre formülü geçerlidir.

$\mathbf{w}^n = \rho^n\, e^{\mathbf{g}\, n\theta} = \rho^n\,[\mathrm{Ch}\,(n\theta) + \mathbf{g}\,\mathrm{Sh}(n\theta)], \quad \mathbf{w}^{1/n} = \rho^{1/n}\, e^{\mathbf{g}\,\theta/n} = \rho^{1/n}\,[\mathrm{Ch}\,(\theta/n) + \mathbf{g}\,\mathrm{Sh}(\theta/n)]$

Örnek

$$\mathbf{u} = [\mathrm{Ch}(\varphi) + \mathbf{g}\,\mathrm{Sh}(\varphi)]^2 = \mathrm{Ch}^2(\varphi) + \mathrm{Sh}^2(\varphi) + 2\mathbf{g}\,\mathrm{Ch}(\varphi)\,\mathrm{Sh}(\varphi) = \mathrm{Ch}(2\,\varphi) + \mathbf{g}\,\mathrm{Sh}(2\,\varphi)$$
$$\mathrm{Ch}(2\,\varphi) = \mathrm{Ch}^2(\varphi) + \mathrm{Sh}^2(\varphi), \quad \mathrm{Sh}(2\,\varphi) = 2\,\mathrm{Ch}(\varphi)\,\mathrm{Sh}(\varphi)$$

Formülleri bilinen formüllerdir. İkinci sanal düzlem Öklidseldir.

IV

DÖRT BOYUTLU UZAYDA 1'İN KÖKLERİ ve İZOTROP NOKTALAR

Dört Boyutlu Uzayda 1'in Dördüncü Kökleri

$\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ birim vektörleri 1'in kare kökleridir. Dört boyutlu uzayda, üst karmaşık sayılarda, birim vektörlerin kare köklerini araştıralım.

(317) $$\mathbf{v} = x\mathbf{1} + y\mathbf{g}_1 + z\mathbf{g}_2 + t\mathbf{g}_3,$$
$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{w} = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)\,\mathbf{1} + 2(xy + zt)\mathbf{g}_1 + 2(xz + yt)\mathbf{g}_2 + 2(xt + yz)\mathbf{g}_3$$

Eğer ikinci yanda yalnız $\mathbf{g}_1$ li terim kalırsa ve katsayısı 1 olursa, **v**, $\mathbf{g}_1$‘ in kare kökü olur.

(318) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$, $xy + zt = 1/2$, $xz + yt = 0$, $xt + yz = 0$

Üçüncü ve dördüncü denklemler arasında y'li terimi yok edelim, bulunan değerleri önce üçüncüde, sonra birincide ve ikincide yerlerine koyalım. Önce birinci parantezle üçüncü parantezi birlikte çözelim, sonra ikinci parantezle üçüncü parantezi birlikte çözelim.

(319) $z^2 - t^2 = 0$, $(z = t,\ x = -y)$, $(z = -t,\ x = y)$, $(y = \pm it,\ t = \pm 1/2)$,

$t = 1/2,\ y = i/2,\ x = -i/2,\ z = 1/2,\quad t = 1/2,\ y = -i/2,\ x = i/2,\ z = 1/2$

$t = -1/2,\ y = -i/2,\ x = i/2,\ z = -1/2,\quad t = -1/2,\ y = i/2,\ x = -i/2,\ z = -1/2$

$t = 1/2,\ y = i/2,\ x = i/2,\ z = -1/2,\quad t = 1/2,\ y = -i/2,\ x = -i/2,\ z = -1/2$

$t = -1/2,\ y = -i/2,\ x = -i/2,\ z = 1/2,\quad t = -1/2,\ y = i/2,\ x = i/2,\ z = 1/2$

çözüm kümeleri bulunur. 8 tane çözüm kümesi vardır. $\mathbf{g}_1$'in kare kökleri,

(320) $\mathbf{v}_1 = 1/2(-i + i\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$, $\mathbf{v}_2 = 1/2(i - i\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$,

$\mathbf{v}_3 = 1/2(i + i\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$, $\mathbf{v}_4 = 1/2(i + i\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3)$

dır. Benzer işlemlerle $\mathbf{g}_2$'nin kare kökleri,

(321) $\mathbf{v}_5 = 1/2(-i + \mathbf{g}_1 + i\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$, $\mathbf{v}_6 = 1/2(i + \mathbf{g}_1 - i\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$

$\mathbf{v}_7 = 1/2(i - \mathbf{g}_1 + i\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$ $\mathbf{v}_8 = 1/2(i + \mathbf{g}_1 + i\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3)$

dır. Benzer işlemlerle $\mathbf{g}_3$'ün kare kökleri,

(322) $\mathbf{v}_9 = 1/2(-i + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + i\mathbf{g}_3)$, $\mathbf{v}_{10} = 1/2(i + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 - i\mathbf{g}_3)$

$\mathbf{v}_{11} = 1/2(i - \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + i\mathbf{g}_3)$ $\mathbf{v}_{12} = 1/2(i + \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 + i\mathbf{g}_3)$

dır. Benzer işlemler kareli terimlerin toplamının, 1' e eşit olmasıyla tekrarlanırsa,

(323) $\mathbf{v}_{13} = 1/2(-1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$, $\mathbf{v}_{14} = 1/2(1 - \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$

$\mathbf{v}_{15} = 1/2(1 + \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$, $\mathbf{v}_{16} = 1/2(1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3)$

1'in kare kökleri bulunur. Bu köklerin, ilk 12 tanesinde, karşısındaki kökler, kendisinin küpü olur. İlk dört kök, $\mathbf{g}_1$'in kare kökleri, ikinci dört kök, $\mathbf{g}_2$'nin kare kökleri, üçüncü dört kök de, $\mathbf{g}_3$'ün kare kökleridir. 16 tane 1'in dördüncü kökü vardır. Ters işaret gelenler yazılmamıştır. – 1 ve i sayılarının dördüncü kuvveti 1 olduklarından, bu köklerin –1, i ve – i ile çarpımları da, 1'in dördüncü kökleridirler. 64 tane 1'in dördüncü kökü vardır. Diğer yandan, ilk 12 sinde $-\mathbf{g}_1, -\mathbf{g}_2, -\mathbf{g}_3$ vektörlerinin kare kökleri de, 1'in dördüncü kökleridir. Toplam olarak 12.4. 8 + 16 = 400 tane kök vardır.

Dört Boyutlu Uzayda 1'in Üçüncü Kökleri

$$\mathbf{v} = x\mathbf{1} + y\mathbf{g}_1 + z\mathbf{g}_2 + t\mathbf{g}_3$$

Vektörü 1'in üçüncü kökü olsun. Küpü 1 olacaktır.

. $\mathbf{v}^3 = x^3 + y^3\mathbf{g}_1 + z^3\mathbf{g}_2 + t^3\mathbf{g}_3 + 3x^2y\mathbf{g}_1 + 3x^2z\mathbf{g}_2 + 3x^2t\mathbf{g}_3 + 3xy^2 + 3y^2g\mathbf{e}_2 + 3y^2t\mathbf{g}_3 + 3xz^2 + 3yz^2\mathbf{g}_1 + 3z^2t\mathbf{g}_3 + 3xt^2 + 3yt^2\mathbf{g}_1 + 3zt^2\mathbf{g}_2 + 6xyz\mathbf{g}_3 + 6xyt\mathbf{g}_2 + 6xzt\mathbf{g}_1 + 6yzt$

Gerçel bileşen 1, sanal bileşenler 0 olmalıdırlar.

(324) 1) $x^3 + 3xy^2 + 3xz^2 + 3xt^2 + 6yzt = 1$, 2) $y^3 + 3x^2y + 3yz^2 + 3yt^2 + 6xzt = 0$

3) $z^3 + 3x^2z + 3y^2z + 3zt^2 + 6xyt = 0$ 4) $t^3 + 3x^2t + 3y^2t + 3z^2t + 6xyz = 0$

2, 3, 4 numaralı denklemleri, sıra ile y, z, t ile bölüp, taraf tarafa çıkaralım.

$$(yz + 3xt)(z^2 - y^2) = 0, \qquad (yt + 3xz)(t^2 - y^2) = 0$$

Birinci denklemden birinci çarpanı, ikinci denklemden ikinci çarpanı, 2, 3, 4 numaralı denklemlerden de, bir tanesini alıp, üç denklemden üç y, z, t bilinmeyenlerini çözelim. x cinsinden bulunacak değerleri, gerçel bileşende yerine koyalım.

$yz + 3xt = 0$, 6) $t^2 - y^2 = 0$, 7) $y^3 + 3x^2y + 3yz^2 + 3yt^2 + 6xzt = 0$

(325) $(t = y,\ z = -3x)$, $(t = -y,\ z = 3x)$, $y^2 + 3x^2 = 0$, $y = \pm\sqrt{3}\,ix$

Parentez içindeki ifadeler, ayrı, ayrı son ifade ile birlikte alınacak ve bu değerler gerçel, denklemde yerlerine konulacaktır.

$x^3 + 3xy^2 + 3xz^2 + 3xt^2 + 6yzt = 1$, $x^3 - 9x^3 + 27x^3 - 9x^3 + 54x^3 = 1$, $x = 1/\sqrt[3]{64}$

$x = 1/4$, $y = \pm\sqrt{3}\,i/4$, $z = -3/4$, $t = \pm\sqrt{3}\,i/4$

(320) de birinci parantezin, son terimle oluşturduğu çözümleri önce, öbür parantezlinin oluşturduğu çözümü, sonra yazalım.

$\mathbf{t}_1 = 1/4(1 + \sqrt{3}i\mathbf{g}_1 - 3\mathbf{g}_2 + \sqrt{3}i\mathbf{g}_3)$, $\mathbf{t}_2 = 1/4(1 - \sqrt{3}i\mathbf{g}_1 - 3\mathbf{g}_2 - \sqrt{3}i\mathbf{g}_3)$
$\mathbf{t}_3 = 1/4(1 + \sqrt{3}i\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2 - \sqrt{3}i\mathbf{g}_3)$ $\mathbf{t}_4 = 1/4(1 - \sqrt{3}i\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2 + \sqrt{3}i\mathbf{g}_3)$

x sayısı, küp kökle bulunduğundan, 1'in küp kökleriyle beraber 1/4, j/4, k/4 değerlerini alacaktır. Çözüm sayısı 12 olur. $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ vektörleri simetrik durumda olduklarından, üçüncü terim, ikinci veya dördüncü terimle yer değiştirirse, bir kökten yeni bir kök daha bulunur. Bu üç vektöre, iki defa dairesel permütasyon uygulanırsa, bir kökten, 2 kök daha bulunur. Böylece köklerin sayısı 4.3.2.3 = 72 olur.

Dört Boyutlu Uzayda – 1'in Üçüncü Kökleri

1'in üçüncü köklerinin bulunması için yapılan işlemler, tekrarlanacak, yalnız birinci denklemde,1 konulan yere, – 1 konulacaktır.

$x^3 + 3xy^2 + 3xz^2 + 3xt^2 + 6yzt = -1$, $x^3 - 9x^3 + 27x^3 - 9x^3 + 54x^3 = -1$, $x = -1/\sqrt[3]{64}$

(326) $x = -1/4$, $y = \pm\sqrt{3}\,i/4$, $z = 3/4$, $t = \pm\sqrt{3}\,i/4$

$\mathbf{t}_1 = 1/4(-1 - \sqrt{3}i\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2 - \sqrt{3}i\mathbf{g}_3)$, $\mathbf{t}_2 = 1/4(-1 + \sqrt{3}i\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2 + \sqrt{3}i\mathbf{g}_3)$
$\mathbf{t}_3 = 1/4(-1 - \sqrt{3}i\mathbf{g}_1 - 3\mathbf{g}_2 + \sqrt{3}i\mathbf{g}_3)$ $\mathbf{t}_4 = 1/4(-1 + \sqrt{3}i\mathbf{g}_1 - 3\mathbf{g}_2 - \sqrt{3}i\mathbf{g}_3)$

$\mathbf{t}_1^2 = -\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_2^2 = -\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 := 1$, $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 = (-1 + 3\mathbf{g}_2)/2$

Dört Boyutlu Uzayda – 1'in Dördüncü Kökleri

(313) denklemlerinden birincisini – 1'e eşitlersek, – 1'in kare köklerini buluruz.

(327) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = -1$, $xy + zt = 0$, $xz + yt = 0$, $xt + yz = 0$

Sıfıra eşit olanları ikişer, ikişer yok etme yöntemi ile çözelim. İkinci ve üçüncüden,

$(y = z,\ x = -t)$, $(y = -z,\ x = t)$

üçüncü ve dördüncüden,

$(y = t,\ x = -z)$, $(y = -t,\ x = z)$

Birinci parantezler göz önüne alınır, birincide yerine konulursa,

$-x = y = z = t$, $x = \pm i/2$

bulunur. Bu parantezler ikişer, ikişer dört türlü alınabilir. Böylece dört tane, –1'in kare kökü bulunur.

$\mathbf{u}_1 = i/2(-1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$, $\mathbf{u}_2 = i/2(1 - \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$,
$\mathbf{u}_3 = i/2(1 + \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$, $\mathbf{u}_4 = i/2(1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3)$,

Negatifler yazılmamıştır. Bu köklerden birincisine, yeniden kök alma işlemi uygulayalım.

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = -i/2$, $xy + zt = i/4$, $xz + yt = i/4$, $xt + yz = i/4$

$(x = t,\ x = z)$, $(y = z,\ y = t)$

Birinci parantez dördüncü denklemde yerine konulursa,

$x^2 + xy = i/4$, $y = i/(4x) - x$

Bilinmeyenlerin bu değerleri, birinci denklemde yerlerine konulursa,

$64x^4 = 1$, $x = \pm 1/(2\sqrt{2})$, $x = \pm i/(2\sqrt{2})$, $y = (2i - 1)/(2\sqrt{2})$, $z = t = 1/(2\sqrt{2})$

olur. Benzer olarak çözülürse,

(328) $\mathbf{v}_1 = 1/(2\sqrt{2})[(2i - 1) + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3]$, $\mathbf{v}_2 = 1/(2\sqrt{2})[1 + (2i - 1)\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3]$,
$\mathbf{v}_3 = 1/(2\sqrt{2})[1 + \mathbf{g}_1 + (2i - 1)\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3]$, $\mathbf{v}_4 = 1/(2\sqrt{2})[1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + (2i - 1)\mathbf{g}_3]$,

4 kök bulunur. x'in farklı 4 değeri ve $i\mathbf{g}_1$, $i\mathbf{g}_2$, $i\mathbf{g}_3$'ün köklerinin de, – 1'in kökleri olduğu göz önüne alınırsa, 4.2.4.8 = 256 tane kök bulunur.

(329) $\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_3^2 = \mathbf{v}_4^2 = i/2\,(-1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) = \mathbf{u}_1$

$\mathbf{v}_1^3 = 1/(2\sqrt{2})[(2i + 1) - \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3]$, $\mathbf{v}_2^3 = 1/(2\sqrt{2})[-1 + (2i + 1)\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3]$,
$\mathbf{v}_3^3 = 1/(2\sqrt{2})[-1 - \mathbf{g}_1 + (2i + 1)\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3]$, $\mathbf{v}_4^3 = 1/(2\sqrt{2})[-1 - \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 + (2i + 1)\mathbf{g}_3]$,

Üçüncü kuvvetler de, dördüncü köktürler.

$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = i/2\,(1 - \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 = i/2\,(1 + \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) = \mathbf{u}_3$,
$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4 = i/2\,(1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3) = \mathbf{u}_4$, $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = i/2\,(1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3) = \mathbf{u}_4$,
$\mathbf{v}_2\mathbf{v}_4 = i/2\,(1 + \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) = \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4 = i/2\,(1 - \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) = \mathbf{u}_2$,

Çarpımları ve kareleri, –1'in kare kökküdürler.

Dört Boyutlu Uzayda 1'in Basit Dördüncü Kökleri

(330) $\mathbf{f}_1 = \{-a_{1112},\ a_{1222},\ a_{2221},\ a_{2111}\}$, $\mathbf{f}_2 = \{a_{1121},\ -a_{1211},\ a_{2212},\ a_{2221}\}$,

$$\mathbf{f}_3 = \{a_{1122},\ a_{1212},\ a_{2211},\ -a_{2121}\},\quad \mathbf{f}_1^2 = g_1 = \{-a_{1111},\ a_{1221},\ a_{2222},\ -a_{2112}\},$$
$$\mathbf{f}_1^3 = h_1 = \{a_{1112},\ a_{1222},\ a_{2221},\ -a_{2111}\},\quad \mathbf{f}_1^4 = g_1^2 = \{a_{1111},\ a_{1221},\ a_{2222},\ a_{2112}\} = 1,$$
$$\mathbf{f}_2^2 = g_2 = \{-a_{1111},\ -a_{1221},\ a_{2222},\ a_{2112}\},\quad \mathbf{f}_2^3 = h_2 = \{-a_{1121},\ a_{1211},\ a_{2212},\ a_{2122}\},$$
$$\mathbf{f}_2^4 = g_2^2 = \{a_{1111},\ a_{1221},\ a_{2222},\ a_{2112}\} = 1,\quad \mathbf{f}_3^2 = g_3 = \{a_{1111},\ -a_{1221},\ a_{2222},\ -a_{2112}\}$$
$$\mathbf{f}_3^3 = h_3 = \{a_{1122},\ -a_{1212},\ a_{2211},\ a_{2121}\},\quad \mathbf{h}_1^2 = \mathbf{g}_1,\quad \mathbf{h}_2^2 = \mathbf{g}_2,\quad \mathbf{h}_3^2 = \mathbf{g}_3$$
$$\mathbf{f}_3^4 = \mathbf{g}_3^2 = \{a_{1111},\ a_{1221},\ a_{2222},\ a_{2112}\} = 1$$

Bu matrislerin, küme içinde verilen indislerdeki elemanlar a = 1, diğer 12 eleman a = 0 konulacaktır. (291) matris çarpımından, bu sonuçlar kolayca yazılabilir. Birim matris ve $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{h}_1$ matrisleri, dört boyutlu matrisler gurubunun alt gurubudurlar. $\mathbf{f}_1$ ile $\mathbf{h}_1$, **1** ile $\mathbf{g}_1$ ters işaretle eşit değildirler. Bu dört elemanın toplamı sıfır değildir. Bu özelikleri ile, düzlem karmaşık sayılarda, 1'in dördüncü köklerinden ayrılırlar.

Dört Boyutlu Uzayın Görel Uzunluğu

Dört boyutlu uzayda izotrop noktalar (127) ile verildi. Bu noktalar dört boyutlu uzayın, sonsuzdaki uzayı üzerinde alındığından, birinci türdeş koordinatlar 0 alınmışlardır. Bu noktaların üçer, üçer oluşturdukları düzlemlerin koordinatları da, aynı sayılarla gösterilirler. Dört boyutlu uzayın, sonsuzdaki uzayının izotrop düzlemleri, şunlardır.

(331) $J_1(0, 1, \mathbf{i}, -1, -\mathbf{i})$, $J_2(0, 1, \mathbf{g}, 1, \mathbf{g})$, $J_3(0, 1, -\mathbf{i}, -1, \mathbf{i})$, $J_4(0, 1, -\mathbf{g}, 1, -\mathbf{g})$

$$P_1 = x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4 = 0,\qquad P_2 = x_1 + gx_2 + x_3 + gx_4 = 0$$
$$P_3 = x_1 - ix_2 - x_3 + ix_4 = 0,\qquad P_4 = x_1 - gx_2 + x_3 - gx_4 = 0$$
$$P_1P_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2\,x_1x_3 - 2\,x_2x_4$$
$$P_2P_4 = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2\,x_1x_3 - 2\,x_2x_4$$

(332) $$P_1P_2P_3P_4 = x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 - 4\,x_1^2x_3^2 + 4\,x_2^2x_4^2 + 2\,x_1^2x_3^2 - 4\,x_1^2x_2x_4 - 2\,x_2^2x_4^2 + 4\,x_2^2x_1x_3 - 4\,x_3^2x_2x_4 - 4\,x_4^2x_1x_3 = 0$$

(333) $$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 - 2\,x_1^2x_3^2 - 4\,x_1^2x_2x_4 + 2\,x_2^2x_4^2 + 4\,x_2^2x_1x_3 - 4\,x_3^2x_2x_4 + 4\,x_4^2x_1x_3 = 1$$

İzotrop noktaların ifadesinde geçen **g** sayısı, ikinci sanal düzlemin sanal birimidir. $\mathbf{g}^2 = 1$ olup, sanal kare kökün, (290) da tanımı verilen matristir. İzotrop notanın üçünden ve başlangıçtan geçen üst düzleme, **izotrop üst düzlem** denilir. Üst düzlemin koordinatları, geçmediği izotrop noktanın koordinatlarıdır. Bu özelik yalnız izotrop noktalara özgüdür. Bu noktalar da, (129) da verilen diklik koşullarını sağlarlar. Birinci üst yüzeye (332) dört boyutlu uzayda **izotrop üst kuartik yüzey**, ikinci üst yüzeye (328) **üst birim kuartik yüzey** denilecektir. (146) daki işlemler tekrarlanırsa, bir noktanın başlangıca görel uzaklığı

(334) $$d^4 = x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 + 4(-x_1^2x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 - x_2x_3^2x_4 + x_1x_3x_4^2) + 2(-x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2)$$

olarak bulunur. Bu formül uzayda barisantrik koordinatlarda ve dört boyutlu uzayda karteziyen koordinatlarda görel uzaklık formülüdür. Karmaşık Sayılar I, (194) de verildi. P_1, P_2, P_3, P_4 düzlemleri, dört boyutlu uzayın başlangıcından geçen üst düzlemler olarak da yorumlanabilirler. O zaman alttaki yüzeyler, üst yüzey olurlar. İzotrop üst yüzey üzerinde bulunan noktalar, aynı zamanda üst düzlemler üzerinde bulunurlar. Bir nokta hiç bir üst düzlem üzerinde bulunmuyorsa, nokta düzgündür, rangı dörttür. Bir üst düzlem üzerinde bulunuyorsa, düzgün nokta değildir, rangı üçtür. İki hiper düzlemin arakesiti üzerinde ise, rangı iki, üç üst düzlemin arakesiti ise, rangı bir, dört üst düzlemin arakesiti ise, rangı sıfırdır. Bu noktalar karmaşık sayılarla ifade edilemezler.

İzotrop Noktaların Genelleştirilmesi

İzotrop noktalar uzunluk ve açı ölçümleri için, dayanak alınan noktalardır. Her boyut için bunların belirlenmesi gerekir. İzotrop noktaların belirlenmesi konusunda bir kurala gereksinim vardır.

1) $$A = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix},\qquad B = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

iki matrisli küme, ikinci mertebe devresel matrisler gurubunun devresel alt gurubudur. A = 1, B = – 1 olarak alınır ve bu kümeye, K gerçel sayılar cismi de eklenirse, bir boyutlu uzayın bütün elemanları bir gösterilim kazanır.

$$Z = k_1A + k_2B$$

Matrisler ikinci mertebe olduğundan, bu yorumu düzleme de genişletmek mümkündür. B matrisi envolütüf matristir. $B^2 = 1$ dir. Ardışık dönüşümlerle, bir noktayı tekrar kendine dönüştüren matrislere **envolütüf** matrisler denilir. Değişmez noktaları

(335) $BX - \nu\, IX = 0, \qquad |B - \nu\, I| = 0, \qquad \begin{vmatrix} -\nu & 1 \\ 1 & -\nu \end{vmatrix} = 0 \quad X(x_0, x_1)$

$$\nu^2 - 1 = 0, \qquad \nu_1 = 1, \qquad \nu_2 = -1, \quad -\nu\, x_0 + x_1 = 0, \qquad x_0 - \nu\, x_1 = 0$$

işlemleri ve bu değerlerin yerine konularak yapılacak dönüşümlerle, değişmez noktalar, $\mathbf{J}_1(1, 1)$, $\mathbf{J}_2(1, -1)$ olarak, doğru üzerinde, barisantrik koordinatlarla bulunurlar. Karmaşık Sayılar I, (146) daki işlemlerle uzaklık tanımına dayanak olacak, birim hiperbol bulunur. Envolütüf matrislerin değişmez noktalarına **izotrop** noktalar adı verilir. J_1, J_2 noktaları, hiperbolik trigonometriye dayanak olacak izotrop noktalardır. Yorumu düzleme genişletelim ve izotrop noktaları sonsuzdaki doğru üzerinde alalım. P_1, P_2 izotrop doğruların, izotrop eğrinin ve birim hiperbolün denklemleri, noktalar sonsuzda alınırsa,

(336) $P_1 = x_1 + x_2 = 0, \qquad P_2 = x_1 - x_2 = 0, \qquad P_1P_2 = x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad x_1^2 - x_2^2 = 1$

olarak bulunurlar.

$$e^{-\alpha} = 1 - \alpha/1! + \alpha^2/2! - \alpha^3/3! + \alpha^4/4!...$$

Serisinde pozitif ve negatif terimleri ayırarak,

(337) $e^{-\alpha} = \mathrm{Ch}\,\alpha - \mathrm{Sh}\,\alpha, \qquad x_1 = \mathrm{Ch}\,\alpha, \qquad x_2 = \mathrm{Sh}\,\alpha$

ile ifade edelim. Bu değerler birim hiperbolün denklemini sağlarlar. Bu özelik bütün izotrop noktalarda görülecektir. Üstel fonksiyonun bileşenleri, birim daireyi ve buna karşılık gelecek üst boyutlu birim yüzeyleri ve birim üst yüzeyleri sağlarlar. Bu özelik, izotrop noktaların, hem uzunluk ve açı ölçümlerine ve hem de, trigonometriye dayanak olduğunu gösterir. Başka bir deyimle, bu özelik, üstel fonksiyon serilerine dayalı, bir trigonometri kurulması için, gerek ve yeter koşuldur. J_1, J_2 izotrop noktalarına dayalı trigonometri, hiperbolik trigonometridir.

2) $\qquad I = \begin{matrix} 1 & 0, \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$

B matrisi ve kuvvetleri ile beraber dört elemanlı küme, ikinci mertebe devresel matrisler gurubunun, devresel alt gurubudur. B matrisinin değişmez noktaları, yani izotrop noktaları, benzer biçimde, $\mathbf{J}_1(0, 1, \mathbf{i})$, $\mathbf{J}_2(0, 1, -\mathbf{i})$ olarak karteziyen koordinatlarla bulunurlar. Bu noktalar, sonsuzdaki doğru üzerine konularak, uzunluk ve açı ölçümleri için ve dairesel trigonometriye, dayanak olacaklardır. Koordinat üçgeni eşkenar olan, barisantrik koordinatlar sisteminde, izotrop noktaların koordinatları, $\mathbf{J}_1(1, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, $\mathbf{J}_2(1, \mathbf{k}, \mathbf{j})$ dir. B matrisi envolütüf olup, $B^4 = I$ dir. Bu değişmez noktalara, **izotrop noktalar,** bu noktalardan ve başlangıçtan geçen doğrulara da, **izotrop doğrular** denilir. Barisantrik koordinatlarla verilmişlerdir. İzotrop doğruların koordinatları da aynı sayılarla verilirler. Karteziyen koordinatlarla, izotrop doğruların, izotrop eğrinin ve birim dairenin denklemleri,

(338) $P_1 = x_1 + i\, x_2 = 0, \quad P_2 = x_1 - i\, x_2 = 0, \quad P_1P_2 = x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$

dır.

(339) $e^{\mathbf{i}\alpha} = 1 + i\alpha/1! - \alpha^2/2! - \mathbf{i}\alpha^3/3! + \alpha^4/4!.... = \mathrm{Cos}\,\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{Sin}\,\alpha$

dir. Burada da, üstel fonksiyon serileri, gerçel ve sanal bileşenleri ile, birim dairenin denklemini sağlamaktadır. Bu özelik üzerine, dairesel trigonometri kurulmuştur.

3)
(340) $\qquad A = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$

Matrisleri de, birim matrisle beraber, üçüncü mertebe devresel matrisler gurubunun devresel alt gurubudur. Değişmez noktaların eşkenar üçgene dayalı, barisantrik koordinatları

$\mathbf{J}_1(1, 1, 1)$, $\mathbf{J}_2(1, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, $\mathbf{J}_3(1, \mathbf{k}, \mathbf{j})$ dir. Bu matrisler envolütüf matrisler olup, $A^3 = I$, $B^3 = I$ dir. İzotrop doğrular, izotrop eğri ve birim kübik eğri, barisantrik koordinatlarla,

(341) $P_1 = x_0 + x_1 + x_2 = 0$, $P_2 = x_0 + \mathbf{j}x_1 + \mathbf{k}x_2 = 0$, $P_3 = x_0 + \mathbf{k}x_1 + \mathbf{j}x_2 = 0$,

$P_1P_2P_3 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\, x_1x_2x_3 = 0$, $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\, x_1x_2x_3 = 1$

dır.

(342) $e^{\mathbf{j}\alpha} = 1 + \mathbf{j}\alpha/1! + \mathbf{k}\alpha^2/2! + \alpha^3/3! + \mathbf{j}\alpha^4/4!.... = T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha)$

$T_1(\alpha) = 1 + \alpha^3/3! + \alpha^6/6! ...$ $T_2(\alpha) = \alpha/1! + \alpha^4/4! + \alpha^7/7!....$

$T_3(\alpha) = \alpha^2/2! + \alpha^5/5! + \alpha^8/8! + \alpha^{11}/11!....$

$e^{\mathbf{j}\alpha}$ nın bileşenleri, birim kübik eğrinin denklemini sağlar.

Trigonometrik serileri hesaplayan Matlab programı:

```
T(1) = 1;  T(2) = 0; T(3) = 0;  x = 7;   for i=1:50  b = x^i/factorial(i);  n = mod(i, 3);
m = n+1;  T(m) = T(m) +b; end
T, d1 = T(1)^3 + T(2)^3 + T(3)^3 – 3*T(1)*T(2)*T(3);
s = sqrt(3);   i = sqrt(–1);  j = (–1+ s*i)/2;  j = (–1 + s*i)/2;  a = T(!) + T(2) + T(3);
b = T(!) + j*T(2) + k*T(3);  c = T(!) + k*T(2) + j*T(3);   g1 = a*b*c;
```

d1 = g1 = 1 olduğu görülüyor.

Türev kuralları,

$T_1'(x) = T_3(x)$, $T_2'(x) = T_1(x)$, $T_3'(x) = T_2(x)$

Örnek:

$$y''' - y = 0$$

Diferansiyel denklemini çözünüz.

$$y = AT_1(x) + BT_2(x) + CT_3(x)$$

Üstel fonksiyon serisi, üç bileşene ayrılmış olup, bunlar trigonometrik fonksiyonlar olarak, tanımlanmışlardır. Çünkü bileşenler, birim kübik eğrinin denklemini sağlarlar. Barisantrik düzlem, sonsuzdaki düzlem yapılırsa, bu trigonometri de uzayın trigonometrisi olur. Çünkü sonsuzdaki koordinat üçgenine göre bir noktanın barisantrik koordinatları, o noktayı uzayın karteziyen koordinatlarının, başlangıcına birleştiren doğrunun doğrultu bileşenleridir. Uzayın bu trigonometrisine, **uzayın hiperbolik trigonometrisi** denilecektir.

V
İKİNCİ ÖKLİDSEL DÜZLEM

Öklidsel Düzlem

Karmaşık Sayılar I de, (120) ile verilen, ikinci izotrop noktaları göz önüne alalım.

(120) $\mathbf{J}_1(1, -\mathbf{k}, \mathbf{j})$, $\mathbf{J}_2(1, -1, 1)$, $\mathbf{J}_3(1, -\mathbf{j}, \mathbf{k})$

Bu izotrop notalar ikinci göreceli uzayın barisantrik koordinatları ile verilmişlerdir.
İkinci nokta, doğru koordinatlarında da aynı sayılarla geleceğinden, ikinci göreceli uzayın barisantrik koordinatlarla sonsuzdaki noktası olur. İkinci Öklid düzleminde, izotrop noktalara $\mathbf{J}_2$ izotrop noktası da eklenirse, elde edilecek uzaya, **ikinci göreceli uzay** denilecektir. Bu uzayda, 1’in 6’ıncı kökleri ile üçüncü kökleri, vektör olarak kullanılacaktır. Bunlar birim dairenin merkezinden çıkan birim vektörlerdir. **s** 1’in 6’ıncı kökündür.

(343) $\mathbf{s} = (1 + \sqrt{3}\, i)/2$, $\mathbf{j} = (-1 + \sqrt{3}\, i)/2$, $\mathbf{s}^2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{s}^3 = -1$, $\mathbf{s}^4 = -\mathbf{s} = \mathbf{k}$, $\mathbf{s}^5 = -\mathbf{j}$,

$\mathbf{s}^6 = 1$, $\mathbf{s}\,\mathbf{j} = -1$, $\mathbf{s} + \mathbf{j} = \sqrt{3}\, i$, $\mathbf{s} - \mathbf{j} = 1$, $\mathbf{j}^2 = -\mathbf{s}$, $\mathbf{j}^3 = 1$, $\mathbf{j}^4 = \mathbf{j}$, $\mathbf{j}^5 = -\mathbf{s}$, $\mathbf{j}^6 = 1$

İzotrop noktalar, diklik koşulunu basite indirgeyen, uzunluk ve açı ölçümüne dayanak olan noktalardır. Bu noktaların da, aynı işi gördüğü daha önce söylenmişti. Bu bölümde izotrop noktalar, bu noktalar olacaklardır. (120) izotrop noktalarını, 1’in 6’ıncı ve üçüncü kökleri ile ifade edelim. **j** yerine **j**, **k** yerine – **s** koyalım.

(344) $\mathbf{J}_1(1, \mathbf{s}, \mathbf{j})$, $\mathbf{J}_2(1, -1, 1)$, $\mathbf{J}_3(1, -\mathbf{j}, -\mathbf{s})$

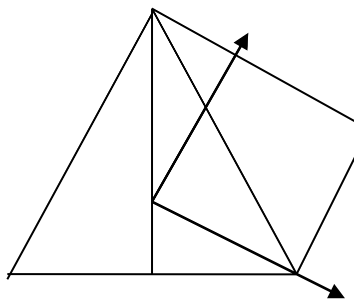
$\mathbf{J}_1$ ve $\mathbf{J}_3$’ün belirlediği doğrunun koordinatları, bu noktaların koordinat matrisi yardımı ile,

(345) 1 **s** **j**

$1 \quad -\mathbf{j} \quad -\mathbf{s} \quad = [-\mathbf{j} - \mathbf{s}, \mathbf{j} + \mathbf{s}, -\mathbf{j} - \mathbf{s}] = [1, -1, 1], \qquad d_\infty = x_0 - x_1 + x_2 = 0$

olur. Bu doğru denklemi, ikinci göreceli uzayın düzleminin, sonsuzdaki doğrusunun, barisantrik koordinatlardaki denklemi olacaktır. İkinci Öklid düzleminde tanımlanan barisantrik koordinatlara, **ikinci barisantrik koordinatla**r denilecektir. İkinci barisantrik koordinat üçgeni, eşkenar olup, ağırlık merkezi B(1, – 1, 1) dir. Birim noktası, bu noktanın d1 kenarına göre simetriğidir. $A_1 A_2$ doğrusunun sonsuzdaki doğruyu kestiği nokta, $B'_0(0, 1, 1)$ dir. Bu noktanın harmonik eşi, $A_1 A_2$ doğru parçasının orta noktası, $B_0(0, -1, 1)$ dir. Diğerleri değişmez. A_0B_0 ve A_1B_1 kenar ortaylarının kesim noktası bulunursa, B noktasının verilen koordinatları sağlanır. Bir noktanın ikinci barisantrik koordinatının işaretleri, birinci barisantrik koordinatının ters işarette, diğerleri aynı işarette alınacaktır.

Karteziyen ve ikinci barisantrik koordinatlar arasında dönüşüm yapalım.



Şekil 8

Üçgenin alt sağ köşesi A_0, üsr köşesi A_1, sol alt köşesi A_2, ağırlık merkezi, O dur. OA_0, x_1 ekseni, buna O dan çıkılan dikme, x_2 eksenidir. Sağ üst köşe birim karenin köşesi olup, karteziyen koordinatların birim B(1, 1, 1) noktasıdır.

x_1 ve x_2 ekseni şekildeki gibi alındıktan sonra, bu eksenlerin sonsuzdaki doğruyu kestiği noktaların, izotrop nokta çiftine göre, harmonik eşlenik olması sağlanacaktır. x_1 ekseninin sonsuzdaki doğruyu kestiği nokta,

$$E(1 + \lambda, -1, 1), \quad x_0 - x_1 + x_2 = 0, \quad 1 + \lambda + 1 + 1 = 0, \quad \lambda = -3, \quad E(-2, -1, 1)$$

dır. x_2 ekseni sonsuzdaki doğruyu D de kessin. Bunların izotrop nokta çiftine göre, harmonik eşlenik olması için,

$$D = \lambda\mathbf{J}_1 + \mu\mathbf{J}_3, \quad E = \lambda\mathbf{J}_1 - \mu\mathbf{J}_3, \quad D = \lambda(1, \mathbf{s}, \mathbf{j}) + \mu(1, -\mathbf{j}, -\mathbf{s}), \ E = \lambda(1, \mathbf{s}, \mathbf{j}) - \mu(1, -\mathbf{j}, -\mathbf{s})$$

$$D(\lambda + \mu, \lambda\mathbf{s} - \mu\mathbf{j}, \lambda\mathbf{j} - \mu\mathbf{s}), \qquad E(\lambda - \mu, \lambda\mathbf{s} + \mu\mathbf{j}, \lambda\mathbf{j} + \mu\mathbf{s})$$

olmalıdır. E noktasının, yukarda bulunan koordinatları alması için, türdeş olmayan koordinatlar eşitlenir. $\lambda = -\mu$, bulunur. Bu değer D de yerine konulursa, D(0, 1, 1) bulunur. İkinci eksenin sonsuzdaki doğruyu kestiği nokta, bu doğrunun A_1A_2 kenarına paralel olmasından da, kolayca bulunur. A_1A_2 doğrusunun orta noktasının harmonik eşidir. Eksenlerin dik olması sağlanmıştır. OA_0 doğru parçası, birim uzunluk ve bu doğru parçası üzerine çizilen karenin sağ üst köşesi, karteziyen koordinatların, B birim noktasıdır. Dönüşüm matrisi ve minörlerin katsayılar determinantına oranı,

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & \sqrt{3} \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \qquad \lambda_1 = 1/\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -1/\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = -1,$$

dır. √3 ile bütün matris elemanları çarpılmış ve √3, ρ ya katılmıştır. Bu sayılarla, sıra ile sütunlar çarpılır ve dönüşüm denklemleri yazılır. Ters matris ile, karteziyen koordinatlar hesaplanır.

(346) $\rho x'_0 = x_0 + 2x_1, \qquad \rho x'_1 = -x_0 + x_1 - \sqrt{3}x_2, \qquad \rho x'_3 = x_0 - x_1 - \sqrt{3}x_2$

$x_1 = (2x'_0 + x'_1 - x'_2)/[2(x'_0 - x'_1 + x'_2)], \qquad x_2 = -\sqrt{3}(x'_1 + x'_2)/[2(x'_0 - x'_1 + x'_2)]$

Üslü harfler, noktanın barisantrik koordinatları, üssüz harfler de, karteziyen koordinatlarıdır. Bu izotrop noktalara dayalı geometri Öklidseldir..Çünkü izotrop noktalar (120) formülü ile verildi. Bu işlemler uzayda da, tasarlanmaktadır. O zaman B(0.1, –1, 1) noktası da, izotrop noktadır. Uzay Öklidsel olmaz. Bir noktanın, başlangıca barisantrik koordinatlarda uzaklığı,

$d^2 = x_1^2 + x_2^2 = (2x'_0 + x'_1 - x'_2)^2/[2(x'_0 - x'_1 + x'_2)]^2 + 3(x'_1 + x'_2)^2/[2(x'_0 - x'_1 + x'_2)]^2$

$$d^2 = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_0x_1 - x_0x_2 + x_1x_2)/(x_0 - x_1 + x_2)^2$$

olur. Bu uzaklık Öklidsel düzlemde uzaklık formülüdür. Karmaşık sayılar I yapıtımda (146) formülü ile verilen özelik, ikinci göreceli uzayda da vardır.

(347) $x_0 = x'_1 - x'_2 + x'_3, \qquad x_1 = x'_1 - \mathbf{j}x'_2 + \mathbf{k}x'_3, \qquad x_2 = x'_1 - \mathbf{k}x'_2 + \mathbf{j}x'_3,$

dır. Bu üç düzlemin ortak denklemi, üçünün çarpımı ile bulunur.

$d^3 = x_0x_1x_2 = x'^3_1 - x'^3_2 + x'^3_3 + 3x'_1x'_2x'_3 = 0, \qquad x'^3_1 - x'^3_2 + x'^3_3 + 3x'_1x'_2x'_3 = 1$

dır.Bu formüller **ikinci göreceli uzayda** bir noktanın başlangıca uzaklık formülüdür. Üslü harfler noktanın ikinci barisantrik koordinatlarını ve üssüz harfler de göreceli uzayın karteziyen koordinatlarını gösterirler. (346) formülleri ile, ikinci barisantrik ve karteziyen koordinatlar arasında, dönüşüm formülleri verildi. Bu formüller ile ikinci barisantrik koordinatlar, Öklidsel düzlemin karteziyen koordinatlarına bağlıdırlar.

$$\begin{array}{ll} \rho' x'_0 = x_0 + 2x_1 + \ * & \rho x_0 = x'_0 - x'_1 + x'_2 \\ \rho' x'_1 = -x_0 + x_1 - \sqrt{3}\,x_2 & \rho x_1 = x'_0 + x'_1/2 - x'_2/2 \\ \rho' x'_2 = x_0 - x_1 - \sqrt{3}\,x_2 & \rho x_2 = * - \sqrt{3}x'_1/2 + 3x'_2/2 \end{array}$$

Ek matris hesap edilerek, ters dönüşümler yazıldı. Üslü harfler barisantrik, üssüz harfler karteziyen koordinatları gösterirler.,

$$d'^2x_0^3 = d^3 = (x_0x_1x_2)_g = x_0(x_1^2 + x_2^2) = x'^3_1 - x'^3_2 + x'^3_3 + 3x'_1x'_2x'_3,$$

Bu formül ile, ikinci barisantrik koordinatlarda başlangıca uzaklık, ikinci göreceli uzayın karteziyen koordinatlarına ve ikinci Öklidsel düzlemin karteziyen koordinatlarına bağlanmıştır. d, göreceli uzayda, d' de, Öklidsel düzlemde başlangıca uzaklığı gösterir.

İkinci Öklidsel Düzlemde Üst Karmaşık Sayıların İşlemleri

Toplama ve çıkarma işlemleri, genel vektör kuralına göre yapılır.

(348) $\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3, \quad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{s}b_2 + \mathbf{j}b_3, \quad \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = a_1 \pm b_1 + \mathbf{s}(a_2 \pm b_2) + \mathbf{j}(a_3 \pm b_3)$

Çarpma ve bölme farklıdır. (338) de verilen işlem özelikleri göz önüne alınırsa,

(349) $\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B} = (a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3)(b_1 + \mathbf{s}b_2 + \mathbf{j}b_3) = a_1b_1 - a_2b_3 - a_3b_2 + \mathbf{s}(a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_3) + \mathbf{j}(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)$, $c_1 = a_1b_1 - a_2b_3 - a_3b_2$, $c_2 = a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_3$, $c_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1$, formülleri ile yapılacağı kolayca görülür.

A sayısının birinci eşleniği,

$$\mathbf{A}^{-} = a_1 - \mathbf{j}a_2 - \mathbf{s}a_3$$

sayısıdır. Bir sayının eşleniği ile çarpımı,

(350) $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \mathbf{s}(-a_1a_3 + a_2a_1 + a_3a_2) + \mathbf{j}(-a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_1)$

(351) $\mathbf{u} = 1 - \mathbf{s} + \mathbf{j} = 0,$

özdeşliği göz önüne alınırsa,

(352) $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 - a_1a_3 + a_2a_3$

çarpımının gerçel olduğu görülür. Bu gerçellik (355) özdeşliğin kullanılması ile gerçekleşmiştir. **A** sayısının ikinci eşleniği,

$$\mathbf{A}^{-} = a_1 - a_2 + a_3$$

sayısıdır. (350), bu eşlenikle de çarpılırsa,

(353) $\mathbf{A}\,\bar{\mathbf{A}}\,\bar{\bar{\mathbf{A}}} = a_1^3 - a_2^3 + a_3^3 + 3a_1a_2a_3 = d^3$

gerçel sayısı bulunur. d noktanın başlangıca görel uzaklığı olup, üst karmaşık sayının **mutlak değeri** adını alacaktır. Sonucun, (351) özdeşliğinden yararlanmadan gerçel olması, dikkate değerdir. (353) özdeşliğinden yararlanarak, bölme işlemi yapılır.

(354) $\mathbf{C} = \mathbf{A}/\mathbf{B} = (a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3)/(b_1 + \mathbf{s}b_2 + \mathbf{j}b_3) =$

$(a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3)(b_1 - \mathbf{j}b_2 - \mathbf{s}b_3)\,(b_1 - b_2 + b_3)/(b_1^3 - b_2^3 + b_3^3 + 3b_1b_2b_3) =$

$(a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3)[b_1^2 + b_2b_3 - \mathbf{s}(b_3^2 + b_1b_2) + \mathbf{j}(b_2^2 - b_1b_3)]\,/(b_1^3 - b_2^3 + b_3^3 + 3b_1b_2b_3)$

$c_1 = (b_1^2 + b_2b_3)/d^3,\quad c_2 = -(b_3^2 + b_1b_2)/d^3,\quad c_3 = (b_2^2 - b_1b_3)/d^3,\quad \mathbf{C} = c_1 + \mathbf{s}c_2 + \mathbf{j}c_3$

Barisantrik Vektör

Barisantrik vektör birinci Öklidsel düzlemde de, tanımlandı. Burada da aynı kavram tekrarlanacaktır. Bir üst karmaşık sayının, birinci ve üçüncü bileşenler aynı işaretle, ikinci bileşen ters işaretle, toplamı 1 veya – 1 ise, üst karmaşık sayı **barisantrik vektör** veya **barisantrik karmaşık sayı** adını alır. Üst karmaşık sayının mutlak değeri içinde, $a_1 - a_2 + a_3$ ifadesi çarpandır. Barisantrik vektörü elde etmek için, üst karmaşık sayı bu toplam ile bölünür.

$$\mathbf{A} = (a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3)/(a_1 - a_2 + a_3)$$

Bu toplamın paydası sıfırsa, üst karmaşık sayı, barisantrik vektör belirsizlik gösterir. Çarpma ve bölme işlemleri yapılamaz. Üst karmaşık sayıların baz elemanları 1'in altıncı kökleridir. (351) gereği olarak, baz elemanları doğrusal bağımlıdırlar. Birinci Öklidsel düzlemde olduğu gibi, üst karmaşık sayıların, ikinci Öklidsel düzlemde de, birim elemanı yoktur. Bu nedenle gurub oluşturmazlar. Fakat barisantrik karmaşık sayılar, ikinci Öklidsel düzlemde de, çarpma işlemine göre, gurub oluştururlar. Toplama işlemine gör gurub oluşturmazlar. İki barisantrik karmaşık sayının çarpımı, gene barisantriktir. Fakat toplamları barisantrik değildir. Çünkü bileşenleri toplamı çarpımda gene 1, toplamada ise, 2 olur. Program 7 de ikinci, üçüncü ve dördüncü derece denklemlerin çözümleri ikinci göreceli uzayın barisantrik karmaşık sayıları ile verilmiştir. Toplama ve çıkarma işlemlerinden sonra, (41) de verilen kuralla, barisantrikliği bozulan karmaşık sayı, yeniden barisantrik konuma getirilmiştir. Barisantrik vektörler sayesinde, düzlemin noktaları ile, barisantrik koordinatlar ve barisantrik vektörler arsında, bire bir, bir dönüşüm vardır. Düzlemin her noktasına bir barisantrik vektör, her barisantrik vektöre de bir nokta karşılık gelir. Bu nedenle, üst karmaşık sayılarla yapılacak işlemler, daima barisantrik karmaşık sayılarla yapılmalıdır.

Barisantrik karmaşık sayıyı, eşleniği ile çarpalım. (356) dan,

$$\mathbf{A} = (a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3)/(a_1 - a_2 + a_3) \qquad \bar{\mathbf{A}} = (a_1 - \mathbf{j}a_2 - \mathbf{s}a_3)/(a_1 - a_2 + a_3)$$

$$\mathbf{A}\,\bar{\mathbf{A}} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 - a_1a_3 + a_2a_3)/(a_1 - a_2 + a_3)^2$$

yazılır. (347) den, bu ifadenin kare kökü, **A** noktasının, barisantrik koordinatlarda, başlangıca uzaklığı olduğu görülür. Bu uzaklığa barisantrik karmaşık sayının **mutlak değeri** denilir. Barisantrik koordinatların dönüşümünde, (120) deki izotrop noktaların, karteziyen koordinatlardaki karşılığının $\mathbf{J}_1(0, 1, \mathbf{i})$, $\mathbf{J}_3(0, 1, -\mathbf{i})$ olduğunu görmüştük. Barisantrik karmaşık sayının birimi olur. Barisantrik karmaşık sayılar, çarpma işlemine göre gurup oluştururlar, fakat cisim değildirler.

İzotrop birim yüzey, başlangıçtan ve B(1, –1, 1) noktasından geçen açıortay doğrusuna asemptottur. Bu doğruyu sonsuzda keser. Birim yüzey üzerindeki noktaların başlangıca uzaklıkları eşit değildir. Bu açıortay üzerinde bulunacak birim noktası, sonsuzda olur. Birim uzunluk, göreceli bir kavramdır. Bu nedenle üst karmaşık sayıların birimi yoktur. Üst karmaşık sayılar, gurup ve cisim oluşturmazlar.

Eğer barisantrik vektör kullanılmazsa, ikinci Öklidsel düzlemde bir üst karmaşık sayının, ters işaretliden başka, iki tane kare kökü vardır.

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{y}^2 = \mathbf{r}, \qquad \mathbf{x} = a + \mathbf{s}b + \mathbf{j}c, \qquad \mathbf{y} = d + \mathbf{s}e + \mathbf{j}f, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{y} + p\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 = [a - d + \mathbf{s}(b - e) + \mathbf{j}(c - f)][a + d + \mathbf{s}(b + e) + \mathbf{j}(c + f)] = 0$$

Bu çarpanlardan biri sıfır olmalıdır. Birinci çarpanın sıfır olması halinde, bu sayılar eşit, ikinci çarpanın sıfır olması halinde, ters işaretle bu sayılar eşit olurlar. Bir karmaşık sayının sıfır olması için, bileşenleri ayrı, ayrı sıfır olmalı kuralı uygulanmıştır. Bu kural üst karmaşık sayılarda geçerli değildir. Çünkü, üst karmaşık sayıların baz elemanları olan 1, **s**, **j** vektörleri ile oluşan (351) bağıntısı vardır veya **u** vektörünün mutlak değeri sıfırdır. Bir çarpanın, (351) özdeşliğinin, gerçel p sayısı ile çarpımına eşit olduğu düşünülürse, çarpım sıfır olur.

(355) $a - d + \mathbf{s}(b - e) + \mathbf{j}(c - f) = p(1 - \mathbf{s} + \mathbf{j}), \quad a - d = p, \quad b - e = -p, \quad c - f = p$

$$a = p + d, \qquad b = -p + e, \qquad c = p + f\,,$$

İki sayının karelerinin eşit olması için, bileşenleri arasında, bu bağıntı bulunmalıdır. x'in karesini, x'in y cinsinden değerini alarak, karelerine eşitleyelim.

(356) $\mathbf{x}^2 = \mathbf{y}^2 = (\mathbf{y} + p\mathbf{u})^2 = \mathbf{y}^2 + 2p\,\mathbf{yu} + p^2\mathbf{u}^2, \quad 2p\,\mathbf{yu} + p^2\mathbf{u}^2 = 0, \quad 2\mathbf{yu} + p\mathbf{u}^2 = 0$

p ile bölüm yapıldı, fakat **u** ile, bölüm yapılmadı. Çünkü **u**'nun mutlak değeri sıfırdır. Son ifadede **u** çarpan olduğundan, mutlak değeri sıfırdır. Başka bir anlatımla, ikinci bileşen ters işaretle, diğer bileşenleri aynı işaretle eşittirler. p'nin hesaplanması için, gerçel bileşenin sıfır olması yeterlidir.

$$\mathbf{u}^2 = 3(1 - \mathbf{s} + \mathbf{j}), \qquad 2\mathbf{yu} + 3p(1 - \mathbf{s} + \mathbf{j}) = 0,$$

$$\mathbf{yu} = (d + \mathbf{s}e + \mathbf{j}f)(1 - \mathbf{s} + \mathbf{j}) = d - e + f + \mathbf{s}(-d + e - f) + \mathbf{j}(d - e + f)$$

Yalnız gerçel kısmın 0'a eşitliği göz önüne alınırsa,

$$3p = -2(d - e + f), \qquad p = -2(d - e + f)/3$$

Karelerinin eşitliği yazılırsa, yalnız gerçel bileşenler için,

$$a^2 - 2bc = (p + d)^2 - 2(-p + e)(p + f) = p^2 + 2pd + d^2 + 2p^2 - 2p(e - f)a - 2ef = d^2 - 2ef$$

$$3p^2 + 2p(d - e + f) = 0, \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = -2(d - e + f)/3$$

bulunur. Kısaltmalar yapılırsa, p için bir kök sıfırdır. Bu değer köklerin eşitliğini gerektirir. Diğer kök, aranılan farklı kare kökü verir. p'nin ters işaretli değerleri, geçişin **x**'den **y** ye veya **y**'den **x**'e olmasına göre düzenlenir. (356) eşitliği p'nin her değeri için sağlanır. Bir üst karmaşık sayının sonsuz tane kare kökü vardır. Bunlardan öyle iki kare kök vardır ki, (356) da bulunan son vektörel ifadenin, bütün bileşenlerini, sıfır yapar. Başka bir anlatımla, **u** vektörünün bileşenleri, doğrusal bağımsızmış gibi işlem yapılır. Aranılan kökler, **u** vektörünün bileşenlerini, doğrusal bağımsız varsayan köklerdir.

Örnek:

Bu koşullar altında, bir ikinci derece denkleminin, iki tane çözüm kümesi vardır. Başka bir anlatımla, toplamları ve çarpımları eşit olan, iki tane sayı çifti vardır.

$$\mathbf{x}_1 = 3 + 2\mathbf{s} - 5\mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_2 = 4 - \mathbf{s} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_1 = -(7 + \mathbf{s} - 3\mathbf{j}), \quad \mathbf{a}_2 = 3 + 15\mathbf{s} - 16\mathbf{j}$$

$$\mathbf{x}^2 + a_1\mathbf{x} + a_2 = 0, \quad \Delta = 43 - 55\mathbf{s} + 23\mathbf{j}, \quad \Delta_1 = 1 - 3\mathbf{s} + 7\mathbf{j}, \quad \Delta_2 = (19 - 13\mathbf{s} + \mathbf{j})/3$$

Δ_1 den formülle, $p = \pm\, 22/3$ ve Δ_2 bulunur. Δ_2 den diğer kökler hesaplanır.

$$\mathbf{x}_3 = (20 - 5\mathbf{s} - 4\mathbf{j})/3, \qquad \mathbf{x}_4 = (1 + 8\mathbf{s} - 5\mathbf{j})/3$$

Barisantrik karmaşık sayılarla bu dallanma olanaksızdır. Bir tane çözüm kümesi vardır.

Üst karmaşık sayıların m = p/q yüncü kuvveti, trigonometrik serilere Moivre formülü uygulanarak hesaplanır. p, sayının kuvvetini, q de kökünü belirler. Bir **A** sayısı verilsin.

(357) $e^{\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta} = V_1(\alpha,\beta) + \mathbf{s}V_2(\alpha,\beta) + \mathbf{j}V_3(\alpha,\beta) \qquad \mathbf{A} = a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3,$

Bu trigonometrik ifadenin ikinci göreceli uzayda, mutlak değeri 1 dir. Öklid düzleminde 1 değildir. Çünkü, birinci yanın, **s** ve **j** vektörlerinin (343) deki karmaşık ifadelerinde, gerçel kısımlar da vardır. Bu gerçel kısımlar, mutlak değeri, 1 den farklı kılarlar. Bu birim vektör, ρ ile çarpılırsa, uzayın bir noktası belirlenir

(358) $\mathbf{w} = \rho e^{\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta} = \rho[V_1(\alpha,\beta) + \mathbf{s}V_2(\alpha,\beta) + \mathbf{j}V_3(\alpha,\beta)]$

A sayısını sonsuzdaki düzlem üzerinde alıp, üstel yazılımını verelim.

$$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3 = \rho e^{\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta}, \qquad \rho^3 = a_1^3 - a_2^3 + a_3^3 + 3a_1a_2a_3$$

A sayısının bileşenleri, sonsuzdaki düzlemi deldiği noktanın, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre, barisantrik koordinatlarıdır.

$$\mathbf{A}_\infty = \mathbf{A}/\rho = a_1/\rho + \mathbf{s}a_2/\rho + \mathbf{j}a_3/\rho, \qquad a_1 = a_1/\rho, \quad a_2 = a_2/\rho, \quad a_3 = a_3/\rho$$

(359) $\mathbf{A}_\infty = a_1 + \mathbf{s}a_2 + \mathbf{j}a_3 = a_1 + (1 + \sqrt{3}\, i)/2\ a_2 + (-1 + \sqrt{3}i)/2\ a_3 =$
$a_1 + a_2/2 - a_3/2 + \sqrt{3}(a_2 + a_3)i\ /2$

Sonsuzdaki Öklid düzleminde, karmaşık sayısından, üstel ifadesi yazılır.

$$r^2 = (2a_1 + a_2 - a_3)^2/4 + 3(a_2 + a_3)^2/4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 - a_1a_3 + a_2a_3$$

$$Tg(\varphi) = \sqrt{3}(a_2 + a_3)/(2a_1 + a_2 - a_3), \quad e^{s\,\alpha - j\,\beta} = r\, e^{i\varphi}$$

Bu formüller, (346) de verilen koordinat dönüşüm formülleri ile uygun düşer.

$$\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta = \mathrm{Ln}\, r + i\varphi + 2k\pi i = (1 + \sqrt{3}\, i)/2\ \alpha - (-1 + \sqrt{3}\, i)/2\ \beta = (\alpha + \beta)/2 + \sqrt{3}(\alpha - \beta)i\ /2$$

$$\varphi + 2k\pi = \sqrt{3}(\alpha - \beta)/2, \quad \mathrm{Ln}\, r = (\alpha + \beta)/2, \quad \alpha = \varphi/\sqrt{3} + \mathrm{Ln}\, r, \quad \beta = -\varphi/\sqrt{3} + \mathrm{Ln}\, r$$

$\mathbf{A}_\infty$ sayısının üstel fonksiyonu, α ve β argümanlarına bağlı olarak yazılır.

$$\mathbf{A}_\infty = e^{\,s\,\alpha - j\,\beta}, \quad \mathbf{A} = \rho e^{\,s\,\alpha - j\,\beta}, \quad \mathbf{A}^m = \rho^m\, e^{(s\,\alpha - j\,\beta)\,m}$$

Kuvvet işlemi tamamlandıktan sonra, $e^{(s\,\alpha - j\,\beta)\,m}$ ifadesi, e serisine açılarak, bileşenleri bulunur.

$$\mathbf{A}_\infty{}^m = 1 + (\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta)m + [(\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta)m]^2/2! + [(\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta)m]^3/3! + [(\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta)m]^4/4!....... =$$

$$V_1(\alpha, \beta) + \mathbf{s}V_2(\alpha, \beta) + \mathbf{j}V_3(\alpha, \beta), \quad \mathbf{A}^m = \rho[V_1(\alpha, \beta) + \mathbf{s}V_2(\alpha, \beta) + \mathbf{j}V_3(\alpha, \beta)]$$

VI
UZAYIN DAİRESEL TRİGONOMETRİSİ ve BİRİNCİ ÜST KARMAŞIK SAYILARI

Uzayda Dairesel Trigonometri

Uzayda karmaşık sayılar ve trigonometri tanımları daha önce yapılmıştı. Bunların uygulama alanı oldukça dar olmuştur. Uygulama alanı daha geniş olan bir trigonometri tanımı getirilecektir.

4)
$$A = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Uzayda alınan izotrop noktalar üç tane olmuştur. Öklidsel izotrop noktalara birinci göreceli uzayda B(0, 1, 1, 1) noktası, ikinci göreceli uzayda B'(0,1, – 1, 1) noktası eklenmiştir Artık uzay Öklidsel olmaktan çıkmış ve göreceli uzay olmuştur. Bundan sonraki konularda, eğer B veya B' noktaları, izotrop nokta olarak alınmışsa, uzay görecelidir, bu izotrop noktalar alınmamışsa, uzay Öklidseldir. Matrisler, I birim matrisinin, altıncı kökleridirler. Bu matrisler, birim matris ve kuvvetleri ile birlikte, altı elemanlı matrisler kümesi, üçüncü mertebe devresel matrisler gurubunun devresel alt gurubunu oluştururlar. A ve B matrisleri, envolütüf olup, . $A^6 = I$, $B^6 = I$ dır. Değişmez noktalar, $\mathbf{J}_1(0, 1, -\mathbf{j}, \mathbf{k})$, $\mathbf{J}_2(0, 1, -1, 1)$, $\mathbf{J}_3(0,1, -\mathbf{k}, \mathbf{j})$ dır. Yukarda olduğu gibi, 1'in üçüncü ve altıncı kökleri ile ifade edilirse, $\mathbf{J}_1(0, 1, -\mathbf{j}, -\mathbf{s})$, $\mathbf{J}_2(0, 1, -1, 1)$, $\mathbf{J}_3(0,1, \mathbf{s}, \mathbf{j})$, olur. **s**, 1'in altıncı kökü olup, – **k** dır. **j**, 1'in üçüncü köküdür. İzotrop noktalar sonsuzdaki düzlem üzerinde alınırsa, koordinat sistemi uzayda olur. İzotrop nokta, izotrop doğru ve izotrop düzlemlerin koordinatları, aynı sayılarla verilirler. Uzayda izotrop noktalardan ve başlangıçtan geçen düzlemler, izotrop yüzey (üç düzlemin çarpımı) ve birim kübik yüzey,

(360) $P_1 = x_1 - x_2 + x_3 = 0, \quad P_2 = x_1 - \mathbf{j}x_2 - \mathbf{s}x_3 = 0, \quad P_3 = x_1 + \mathbf{s}x_2 + \mathbf{j}x_3 = 0$

$$P_1P_2P_3 = x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 + 3\, x_1x_2x_3 = 0, \quad x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 + 3\, x_1x_2x_3 = 1$$

dır.

(361) $e^{-j\alpha} = 1 - \mathbf{j}\alpha - \mathbf{s}\alpha^2/2! - \alpha^3/3! + \mathbf{j}\alpha^4/4! + \mathbf{s}\alpha^5/5! + \alpha^6/6! - \mathbf{j}\alpha^7/7!....$

$$V_1(\alpha) = 1 - \alpha^3/3! + \alpha^6/6! - \alpha^9/9! + \alpha^{12}/12! .. \quad + (-1)^n\, \alpha^{3n}\, /(3n)!$$

$$V_2(\alpha) = \alpha/1! - \alpha^4/4! + \alpha^7/7! - \alpha^{10}/10!.... \quad + (-1)^n\, \alpha^{(3n+1)}\, /(3n+1)!$$

$$V_3(\alpha) = \alpha^2/2! - \alpha^5/5! + \alpha^8/8! - \alpha^{11}/11!.... \quad + (-1)^n\, \alpha^{(3n+2)}\, /(3n+2)!$$

. $e^{s\,\alpha} = 1 + \mathbf{s}\alpha + \mathbf{j}\alpha^2/2! - \alpha^3/3! - \mathbf{s}\alpha^4/4!a - \mathbf{j}\alpha^5/5! + \alpha^6/6! + \mathbf{s}\alpha^7/7!....$

$$e^{-j\,\alpha} = V_1(\alpha) - \mathbf{j}V_2(\alpha) - \mathbf{s}V_3(\alpha), \quad e^{s\,\alpha} = V_1(\alpha) + \mathbf{s}V_2(\alpha) + \mathbf{j}V_3(\alpha)$$

Daha önce olduğu gibi, üstel fonksiyonun serisi, üç bileşene ayılmıştır. Bu bileşenler (360) birim kübik yüzeyi sağlarlar. Barisantrik koordinatlarla verilen izotrop noktalar düzlemi, sonsuzdaki düzlem olarak alınırsa, uzayın dairesel trigonometrisi elde edilir. Bulunan izotrop noktalar daha önce (120) nin birinci şıkkında verilmişti. Sonsuzdaki düzlem üzerinde, genel olarak iki parametreye bağlı olan envolüsyon üçlüsü, $\mu = \lambda^2$ koşulu ile, dik üçlü envolüsyon oluşturmuştu. Bu dik üçlü envolüsyonda, $\lambda = 1$ için, üçlü envolüsyonun noktaları, karteziyen koordinatların sonsuzdaki noktaları olduğu gösterilmişti. Bu izotrop noktalara dayalı koordinat sistemi ortogonaldir. Birim yüzeyin B(1,1,1) noktası sonsuzda, diğer noktaları sonludadır. Bir çok terimlinin, en yüksek dereceli terimini, sıfır yapan nokta, sonsuzdadır. Uzunlukların görel olmasının nedeni budur.

(362) $$a^3 = x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 + 3\, x_1x_2x_3$$

Ortogonal koordinatlarıyla verilmiş $M(x_1, x_2, x_3)$ noktasında ,

$$V_1(\alpha) = x_1/a, \qquad V_2(\alpha) := x_2/a, \qquad V_3(\alpha) = x_3/a$$

fonksiyonları (343) de verilen birim kübik yüzeyi sağlarlar. Bu fonksiyonlara **uzayın dairesel trigonometrik fonksiyonları** denilecektir. Dairesel sözcüğü, serilerin alterne olmasından gelir.

Üstel fonksiyonlarla, trigonometrik oranların ilgisi:

(363) $$e^{-\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2/2! - \alpha^3/3! + \alpha^4/4! - \alpha^5/5! + \alpha^6/6! - \alpha^7/7!....$$

$$e^{-\mathbf{j}\alpha} = 1 - \mathbf{j}\alpha - \mathbf{s}\alpha^2/2! - \alpha^3/3! + \mathbf{j}\alpha^4/4! + \mathbf{s}\alpha^5/5! + \alpha^6/6! - \mathbf{j}\alpha^7/7!....$$

$$e^{\mathbf{s}\alpha} = 1 + \mathbf{s}\alpha + \mathbf{j}\alpha^2/2! - \alpha^3/3! - \mathbf{s}\alpha^4/4! - \mathbf{j}\alpha^5/5! + \alpha^6/6! + \mathbf{s}\alpha^7/7!....$$

(344) de verilen serilerin tanımından,

(364) $$e^{-\alpha} = V_1(\alpha) - V_2(\alpha) + V_3(\alpha), \qquad e^{-\mathbf{j}\alpha} = V_1(\alpha) - \mathbf{j}V_2(\alpha) - \mathbf{s}V_3(\alpha),$$

$$e^{\mathbf{s}\alpha} = V_1(\alpha) + \mathbf{s}V_2(\alpha) + \mathbf{j}V_3(\alpha),$$

(346) da verilen serilerin tanımından,

$$V_1(\alpha) = (e^{-\alpha} + e^{-\mathbf{j}\alpha} + e^{\mathbf{s}\alpha})/3, \qquad V_2(\alpha) = (-e^{-\alpha} + \mathbf{s}e^{-\mathbf{j}\alpha} - \mathbf{j}e^{\mathbf{s}\alpha})/3,$$

$$V_3(\alpha) = (e^{-\alpha} + \mathbf{j}e^{-\mathbf{j}\alpha} - \mathbf{s}e^{\mathbf{s}\alpha})/3,$$

(161) ve (162) den,

$$V_1(-\alpha) = (e^{\alpha} + e^{\mathbf{j}\alpha} + e^{\mathbf{k}\alpha})/3 = T_1(\alpha), \qquad V_2(-\alpha) = -(e^{\alpha} + \mathbf{k}e^{\mathbf{j}\alpha} + \mathbf{j}e^{\mathbf{k}\alpha})/3 = -T_2(\alpha),$$

$$V_3(-\alpha) = (e^{\alpha} + \mathbf{j}e^{\mathbf{j}\alpha} + \mathbf{k}e^{\mathbf{k}\alpha})/3 = T_3(\alpha),$$

yazılır. Alterne serilere dayalı trigonometriye, **uzayın dairesel trigonometrisi** ve

$$\mathbf{v} = \rho[V_1(\alpha) + \mathbf{j}V_2(\alpha) + \mathbf{s}V_3(\alpha)]$$

sayısına da, **uzayın birinci üst karmaşık sayısı** veya **uzayın dairesel üst karmaşık sayısı** denilecektir.

Türevlerini alalım.

$$V_1'(\alpha) = -V_3(\alpha), \qquad V_2'(\alpha) = V_1(\alpha), \qquad V_3'(\alpha) = V_2(\alpha)$$

Örnek:

$$y''' + y = 0$$

Diferansiyel denklemlerini çözünüz.

$$y = AV_1(x) + BV_2(x) + CV_3(x)$$

Trigonometrik serilerin Matlab programı ile bulunması

: Trigonometrik seriler (344) formülü ile verildiler.

```
x = 4; V(1) = 1; V(2) = x;  V(3) = x^2/2;  for i = 1:25  p = 3*i;  q = (– 1)^i;
V(1) = V(1) + q*x^p/factorial(p);  V(2) = V(2) +q*x^(p+1)/factorial(p+1);
V(3) = V(3) + q*x^(p+2)/factorial(p+2); end
V,  d2 = V(1)^3 – V(2)^3 + V(3)^3 + 3*V(1)*V(2)*V(3); = 1,
s = sqrt(3);   i = sqrt(–1);  j = (–1+ s*i)/2;  j = (–1 + s*i)/2;  a = V(!) – V(2) + V(3);
b = V(!) – j*V(2) + k*V(3);  c = V(!) – k*V(2) + j*V(3);   g2 = a*b*c;
```

d2 = g2 = 1 olduğu görülüyor. Son iki satır (342) formülü ile verildi. V(1), V(2), V(3) trigonometrik fonksiyonları ile verilen seriler, ikinci göreceli uzayın, ikinci kübik yüzey üzerinde bulunan noktaların ikinci barisantrik koordinatlarıdır. Karmaşık Sayılar I yapıtımın (36) numaralı formülü ile aynıdır. a, b, c sayıları da, ikinci göreceli uzayda, birim kübik yüzeys üzerindeki noktaların, sanal koordinatlarıdır. Buradaki sanal koordinatlar, ikinci göreceli uzayın izotrop noktaları ile oluşturulmuştur. g2 ile verilen ifade, ikinci göreceli uzayın, sanal koordinatlarında, bir noktanın başlangıca uzaklık formülüdür.

$$d^3 = x_1.x_2.x_3 = a.b.c = V(1)^3 - V(2)^3 + V(3)^3 + 3.V(1).V(2).V(3)$$

Birinci Karmaşık Sayılar yapıtımın (167) ve (168) numaralı formüllerinde açıklandı.

Açıların toplam ve farkının trigonometrik oranları:

(365) $$e^{-\mathbf{j}(\alpha+\beta)} = V_1(\alpha+\beta) - \mathbf{j}V_2(\alpha+\beta) - \mathbf{s}V_3(\alpha+\beta)$$

$$e^{-\mathbf{j}(\alpha+\beta)} = [V_1(\alpha) - \mathbf{j}V_2(\alpha) - \mathbf{s}V_3(\alpha)]\,[V_1(\beta) - \mathbf{j}V_2(\beta) - \mathbf{s}V_3(\beta)] =$$
$$V_1(\alpha+\beta) - \mathbf{j}V_2(\alpha+\beta) - \mathbf{s}V_3(\alpha+\beta)$$
$$V_1(\alpha+\beta) = V_1(\alpha)V_1(\beta) - V_2(\alpha)V_3(\beta) - V_3(\alpha)V_2(\beta)$$
$$V_2(\alpha+\beta) = V_1(\alpha)V_2(\beta) + V_2(\alpha)V_1(\beta) - V_3(\alpha)V_3(\beta)$$
$$V_3(\alpha+\beta) = V_1(\alpha)V_3(\beta) + V_2(\alpha)V_2(\beta) + V_3(\alpha)V_1(\beta)$$
$$e^{\mathbf{s}(\alpha-\beta)} = [V_1(\alpha) + \mathbf{s}V_2(\alpha) + \mathbf{j}V_3(\alpha)]\,[T_1(\beta) + \mathbf{j}T_2(\beta) - \mathbf{s}T_3(\beta)] =$$
$$V_1(\alpha-\beta) + \mathbf{s}\,V_2(\alpha-\beta) + \mathbf{j}V_3(\alpha-\beta)$$
$$V_1(\alpha-\beta) = V_1(\alpha)T_1(\beta) + V_2(\alpha)T_2(\beta) + V_3(\alpha)T_3(\beta)$$
$$V_2(\alpha-\beta) = -V_1(\alpha)T_3\beta) + V_2(\alpha)T_1(\beta) - V_3(\alpha)T_2(\beta)$$
$$V_3(\alpha-\beta) = V_1(\alpha)T_2\beta) - V_2(\alpha)T_3(\beta) + V_3(\alpha)T_1(\beta)$$

olur. $\alpha = \beta$ olursa,

$$V_1(2\alpha) = V_1^2(\alpha) - 2V_2(\alpha)V_3(\alpha), \qquad 1 = V_1(\alpha)T_1(\alpha) + V_2(\alpha)T_2(\alpha) + V_3(\alpha)T_3(\alpha)$$
$$V_2(2\alpha) = 2V_1(\alpha)V_2(\alpha) - V_3^2(\alpha), \qquad 0 = -V_1(\alpha)T_3(\alpha) + V_2(\alpha)T_1(\alpha) - V_3(\alpha)T_2(\alpha)$$
$$V_3(2\alpha) = 2V_1(\alpha)V_3(\alpha) + V_2^2(\alpha), \qquad 0 = V_1(\alpha)T_2(\alpha) - V_2(\alpha)T_3(\alpha) + V_3(\alpha)T_1(\alpha)$$

olur.

Uzayda Çok Değişkenli Dairesel Trigonometri

Kübik yüzey üzerinde herhangi bir nokta, iki açı eğrileri üzerinde alınacak, iki parametre ile belirlenecektir. (363) deki seriler yardımıyla,

(366) $$e^{\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta} = V_1(\alpha,\beta) + \mathbf{s}V_2(\alpha,\beta) + \mathbf{j}V_3(\alpha,\beta)$$

$$e^{\mathbf{s}\alpha} = V_1(\alpha) + \mathbf{s}V_2(\alpha) + \mathbf{j}V_3(\alpha)$$
$$e^{-\mathbf{j}\beta} = V_1(\beta) - \mathbf{j}V_2(\beta) - \mathbf{s}V_3(\beta)$$
$$e^{-\alpha-\beta} = (e^{-\alpha})(e^{-\beta}) = (1 - \alpha/1! + \alpha^2/2! - \alpha^3/3! + \alpha^4/4!....)(1 - \beta/1! + \beta^2/2! - \beta^3/3!...)$$
$$= [V_1(\alpha) - V_2(\alpha) + V_3(\alpha)][V_1(\beta) - V_2(\beta) + V_3(\beta)]$$
$$= V_1(\alpha,\beta) + V_2(\alpha,\beta) + V_3(\alpha,\beta)$$
$$V_1(\alpha,\beta) = V_1(\alpha)V_1(\beta) + V_2(\alpha)V_2(\beta) + V_3(\alpha)V_3(\beta)$$
$$V_2(\alpha,\beta) = -V_1(\alpha)V_3(\beta) + V_2(\alpha)V_1(\beta) + V_3(\alpha)V_2(\beta)$$
$$V_3(\alpha,\beta) = -V_1(\alpha)V_2(\beta) - V_2(\alpha)V_3(\beta) + V_3(\alpha)V_1(\beta)$$
$$e^{\mathbf{s}\alpha-\mathbf{j}\beta} = [V_1(\alpha) + \mathbf{s}V_2(\alpha) + \mathbf{j}V_3(\alpha)][V_1(\beta) - \mathbf{j}V_2(\beta) - \mathbf{s}V_3(\beta)]$$
$$= V_1(\alpha,\beta) + \mathbf{s}V_2(\alpha,\beta) + \mathbf{j}V_3(\alpha,\beta)$$
$$V_1(\alpha,\beta) = V_1(\alpha)V_1(\beta) + V_2(\alpha)V_2(\beta) + V_3(\alpha)V_3(\beta)$$
$$V_2(\alpha,\beta) = -V_1(\alpha)V_3(\beta) + V_2(\alpha)V_1(\beta) + V_3(\alpha)V_2(\beta)$$
$$V_3(\alpha,\beta) = -V_1(\alpha)V_2(\beta) - V_2(\alpha)V_3(\beta) + V_3(\alpha)V_1(\beta)$$
$$e^{\mathbf{s}\beta-\mathbf{j}\alpha} = [V_1(\beta) + \mathbf{s}V_2(\beta) + \mathbf{j}V_3(\beta)]\;[V_1(\alpha) - \mathbf{j}V_2(\alpha) - \mathbf{s}V_3(\alpha)]$$
$$= V_1(\alpha,\beta) - \mathbf{j}V_2(\alpha,\beta) - \mathbf{s}V_3(\alpha,\beta)$$
$$V_1(\alpha,\beta) = V_1(\alpha)V_1(\beta) + V_2(\alpha)V_2(\beta) + V_3(\alpha)V_3(\beta)$$
$$V_3(\alpha,\beta) = -V_1(\alpha)V_2(\beta) - V_2(\alpha)V_3(\beta) + V_3(\alpha)V_1(\beta)$$
$$V_2(\alpha,\beta) = -V_1(\alpha)V_3(\beta) + V_2(\alpha)V_1(\beta) + V_3(\alpha)V_2(\beta)$$

Bu eşitliklerden taraf, tarafa toplamlarla, $\mathbf{s} - \mathbf{j} - 1 = 0$ eşitliği de göz önüne alınırsa, aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$V_1(\alpha,\beta) = (e^{-\alpha-\beta} + e^{\mathbf{s}\alpha-\mathbf{j}\beta} + e^{\mathbf{s}\beta-\mathbf{j}\alpha})/3$$
$$V_2(\alpha,\beta) = (-e^{-\alpha-\beta} - \mathbf{j}e^{\mathbf{s}\alpha-\mathbf{j}\beta} + \mathbf{s}e^{\mathbf{s}\beta-\mathbf{j}\alpha})/3$$
$$V_3(\alpha,\beta) = (e^{-\alpha-\beta} - \mathbf{s}e^{\mathbf{s}\alpha-\mathbf{j}\beta} + \mathbf{j}e^{\mathbf{s}\beta-\mathbf{j}\alpha})/3$$

Türevlerini alalım.

(367) $\partial V_1(\alpha,\beta)/\partial\alpha = -V_3(\alpha,\beta)$, $\qquad \partial V_1(\alpha,\beta)/\partial\beta = V_2(\alpha,\beta)$,

$\partial V_2(\alpha,\beta)/\partial\alpha = V_1(\alpha,\beta)$, $\partial V_2(\alpha,\beta)/\partial\beta = V_3(\alpha,\beta)$,
$\partial V_3(\alpha,\beta)/\partial\alpha = V_2(\alpha,\beta)$, $\partial V_3(\alpha,\beta)/\partial\beta = -V_1(\alpha,\beta)$

Görel uzayda bir $M(x_1, x_2, x_3)$ noktasının başlangıca ρ görel uzaklığı

$$\rho^3 = x_1^3 - x_2^3 + x_3^3 + 3\,x_1x_2x_3$$

formülü ile verilir. Bu nokta, görel açıları yardımı ile,

(368)

$$\mathbf{OM} = \rho\, e^{\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta} = \rho\,[V_1(\alpha,\beta) + \mathbf{s}V_2(\alpha,\beta) + \mathbf{j}V_3(\alpha,\beta)]$$

vektörü ile gösterilecektir.

$$\mathbf{OM} = a + \mathbf{s}b + \mathbf{j}c = \rho\, e^{\mathbf{s}\alpha - \mathbf{j}\beta} = \rho\,[V_1(\alpha,\beta) + \mathbf{s}V_2(\alpha,\beta) + \mathbf{j}V_3(\alpha,\beta)]$$

vektörüne ikinci görel uzayın karmaşık sayısı denilecektir. Bu karmaşık sayılar da, Öklidsel değildir. Çünkü uzayın izotrop koniği ile ilgi kurulmamıştır. Ancak izotrop nokta çifti ile ilgisi vardır. Bu nedenle izotrop koordinatlarda olduğu gibi, ilk iki boyutu Öklidsel, üçüncü boyutu görecelidir.

VII
DÖRT BOYUTLU UZAYDA ÜÇÜNCÜ ÜST KARMAŞIK SAYILAR

Üçüncü Üst Karmaşık Sayılar

1, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ dört boyutlu uzay sayılarının gurup oluşturdukları, (289) da vurgulandı. Bu sayılar baz alınarak üst karmaşık sayılar tanımlanacaktır. Bu üst karmaşık sayıdan başka iki tane daha üst karmaşık sayı tanımlanacaktır. Tanımlanmış ve tanımlanacak olan karmaşık sayıların hepsinde, o karmaşık sayıya özgü, trigonometri tanımı yapılmıştır. Yalnız bu karmaşık sayıda, kendine özgü trigonometri tanımı yoktur. Bu nedenle, **1**, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ birim vektörleri ile oluşturulan karmaşık sayılara, dört boyutlu uzayın **üçüncü üst karmaşık sayıları** denilecektir.

(369) $$w = \mathbf{1}a + \mathbf{g}_1b + \mathbf{g}_2c + \mathbf{g}_3d$$

Üçüncü üst karmaşık sayıların işlemleri:

(370) $$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{g}_1a_2 + \mathbf{g}_2a_3 + \mathbf{g}_3a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{g}_1b_2 + \mathbf{g}_2b_3 + \mathbf{g}_3b_4$$

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = a_1 \pm b_1 + \mathbf{g}_1(a_2 \pm b_2) + \mathbf{g}_2(a_3 \pm b_3) + \mathbf{g}_3(a_4 \pm b_4)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{A.B} = (a_1 + \mathbf{g}_1a_2 + \mathbf{g}_2a_3 + \mathbf{g}_3a_4)\,(b_1 + \mathbf{g}_1b_2 + \mathbf{g}_2b_3 + \mathbf{g}_3b_4)$$

(371)
$$w_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$
$$w_2 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3$$
$$w_3 = a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2$$
$$w_4 = a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1$$
$$\mathbf{W} = w_1 + \mathbf{g}_1w_2 + \mathbf{g}_2w_3 + \mathbf{g}_3w_4$$

Bölüm işlemi için, önce bölenin tersini hesaplayalım. Çarpım tablosundan,

$\mathbf{a} = 1/\mathbf{b}$, $\mathbf{ab} = 1$, $w_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = 1$, $w_2 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3 = 0$

$w_3 = a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2 = 0$, $w_4 = a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 = 0$

yazılır. a'ları bilinmeyen ve b'leri bilinen olarak alırsak, dört bilinmeyen, dört denklemin çözümünden,

$\Delta a_1 = b_1^3 + 2b_2b_3b_4 - b_1(b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)$, $\Delta a_2 = b_2^3 - b_2\,(b_1^2 + b_3^2 + b_4^2) + 2b_1b_3b_4$,

$\Delta a_3 = b_3^3 - b_3(b_1^2 + b_2^2 + b_4^2) + 2b_1b_2b_4$, $\Delta a_4 = b_4^3 - b_4(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 2b_1b_2b_3$

$$\Delta = b_1\Delta a_1 + b_4\Delta a_2 + b_3\Delta a_3 + b_2\Delta a_4,$$

$$\Delta = b_1^4 + b_2^4 + b_3^4 + b_4^4 - 2b_1^2(b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) - 2(b_2^2b_3^2 + b_3^2b_4^2 + b_2^2b_4^2) + 8b_1b_2b_3b_4$$

bulunur.

$$\mathbf{a} = 1/\mathbf{b} = (\Delta a_1 + \mathbf{g}_1\Delta a_2 + \mathbf{g}_2\Delta a_3 + \mathbf{g}_3\Delta a_4)/\Delta\,,$$

(372) $$\mathbf{c}/\mathbf{b} = (c_1 + \mathbf{g}_1c_2 + \mathbf{g}_2c_3 + \mathbf{g}_3c_4)(\Delta a_1 + \mathbf{g}_1\Delta a_2 + \mathbf{g}_2\Delta a_3 + \mathbf{g}_3\Delta a_4)/\Delta$$

Kuvvet Teoremi

$$P_1 = x_1 + \mathbf{g}x_2 - x_3 - \mathbf{g}x_4 = 0, \qquad P_2 = x_1 + \mathbf{g}x_2 + x_3 + \mathbf{g}x_4 = 0$$

g sayısı, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ sayılarından biridir. Bir karmaşık sayının kuvvetini veya kökünü bulmak için, P_1 ve P_2 düzlemlerinden yararlanılacaktır.

Dört boyutlu uzayda, bir üst karmaşık sayının n'ninci kuvveti veya n'ninci kökünün, P_1, P_2 düzlemlerinde aldığı değerler, bu sayının değerinin, n'ninci kuvvetine veya n'ninci köküne eşittir.

$$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{g}_1 a_2 + \mathbf{g}_2 a_3 + \mathbf{g}_3 a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{g}_1 b_2 + \mathbf{g}_2 b_3 + \mathbf{g}_3 b_4, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^n$$

(373) $P_1(\mathbf{A}) = a_1 - a_3 + \mathbf{g}(a_2 - a_4), \qquad P_1(\mathbf{B}) = b_1 - b_3 + \mathbf{g}(b_2 - b_4)$

$$P_2(\mathbf{A}) = a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4), \qquad P_2(\mathbf{B}) = b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4)$$

$P_1(\mathbf{A}) = [P_1(\mathbf{B})]^n, \quad P_2(\mathbf{A}) = [P_2(\mathbf{B})]^n, \quad a_1 - a_3 = \mathrm{Re}[P_1(\mathbf{B})]^n, \quad a_2 - a_4 = \mathrm{İm}[P_1(\mathbf{B})]^n,$

$$a_1 + a_3 = \mathrm{Re}[P_2(\mathbf{B})]^n, \qquad a_2 + a_4 = \mathrm{İm}[P_2(\mathbf{B})]^n,$$

Dört bilinmeyen, dört denklemden oluşan sistem çözülür.

$$a_1 = \{\mathrm{Re}[P_1(\mathbf{B})]^n + \mathrm{Re}[P_2(\mathbf{B})]^n\}/2, \qquad a_3 = \{-\mathrm{Re}[P_1(\mathbf{B})]^n + \mathrm{Re}[P_2(\mathbf{B})]^n\}/2,$$

$$a_2 = \{\mathrm{İm}[P_1(\mathbf{B})]^n + \mathrm{İm}[P_2(\mathbf{B})]^n\}/2, \qquad a_4 = \{-\mathrm{İm}[P_1(\mathbf{B})]^n + \mathrm{İm}[P_2(\mathbf{B})]^n\}/2,$$

Kök almak için n yerine 1/n konulur.

$$a_1 = \{\mathrm{Re}[P_1(\mathbf{B})]^{1/n} + \mathrm{Re}[P_2(\mathbf{B})]^{1/n}\}/2, \qquad a_3 = \{-\mathrm{Re}[P_1(\mathbf{B})]^{1/n} + \mathrm{Re}[P_2(\mathbf{B})]^{1/n}\}/2,$$

$$a_2 = \{\mathrm{İm}[P_1(\mathbf{B})]^{1/n} + \mathrm{İm}[P_2(\mathbf{B})]^{1/n}\}/2, \qquad a_4 = \{-\mathrm{İm}[P_1(\mathbf{B})]^{1/n} + \mathrm{İm}[P_2(\mathbf{B})]^{1/n}\}/2$$

Kanıtlamak için, n = 2 alıp, kanıtlama yöntemini görelim. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ alarak, (366) çarpım tablosundan, $\mathbf{B}^2$ yi hesaplayalım.

$$a_1 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2, \quad a_2 = 2(b_1b_2 + b_3b_4), \quad a_3 = 2(b_1b_3 + b_2b_4), \quad a_4 = 2(b_1b_4 + b_2b_3)$$

$$P_1(\mathbf{A}) = a_1 - a_3 + \mathbf{g}(a_2 - a_4) = (b_1 - b_3)^2 + (b_2 - b_4)^2 + 2\mathbf{g}(b_1b_2 + b_3b_4 - b_1b_4 - b_2b_3),$$

$$P_2(\mathbf{A}) = a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4) = (b_1 + b_3)^2 + (b_2 + b_4)^2 + 2\mathbf{g}(b_1b_2 + b_3b_4 + b_1b_4 + b_2b_3),$$

$$[P_1(\mathbf{B})]^2 = [b_1 - b_3 + \mathbf{g}(b_2 - b_4)]^2 = (b_1 - b_3)^2 + (b_2 - b_4)^2 + 2\mathbf{g}(b_1 - b_3)(b_2 - b_4),$$

$$[P_2(\mathbf{B})]^2 = [b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4)]^2 = (b_1 + b_3)^2 + (b_2 + b_4)^2 + 2\mathbf{g}(b_1 + b_3)(b_2 + b_4),$$

(368) eşitlikleri görülüyor. Bu yöntem genelleştirilir. Teoremi doğrulayan sayısal uygulamalar, istenildiği kadar yapılabilir. Kök işlemi için, bu karmaşık sayıların kökü alınacaktır. Birinci karmaşık sayı, hiperbolik trigonometrinin argth fonksiyonu ile, argümanı bulunur ve Moivre formülü uygulanarak kökü bulunur. Üçüncü üst karmaşık sayı için, aynı işlemler yapılır.

Kök İşlemi

(366) çarpma işleminden

$$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{g}_1 a_2 + \mathbf{g}_2 a_3 + \mathbf{g}_3 a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{g}_1 b_2 + \mathbf{g}_2 b_3 + \mathbf{g}_3 b_4, \qquad \mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{B}}$$

(374) $(a_1 + \mathbf{g}_1 a_2 + \mathbf{g}_2 a_3 + \mathbf{g}_3 a_4)^2 = \mathbf{A}^2, \quad b_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2, \quad b_2 = 2(a_1a_2 + a_3a_4),$

$$b_3 = 2(a_1a_3 + a_2a_4), \quad b_4 = 2(a_1a_4 + a_2a_3), \quad b_1 + b_3 = (a_1 + a_3)^2 + (a_2 + a_4)^2$$

$$b_2 + b_4 = 2(a_1a_2 + a_3a_4 + a_1a_4 + a_2a_3), \qquad b_1 - b_3 = (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2,$$

$$b_2 - b_4 = 2(a_1a_2 + a_3a_4 - a_1a_4 - a_2a_3)$$

yazılır. Bu ifadeleri, hiperbolik karmaşık sayılarla ifade edelim.

(375) $b_1 - b_3 + \mathbf{g}(b_2 - b_4) = [(a_1 - a_3) + \mathbf{g}(a_2 - a_4)]^2,$

$$b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4) = [(a_1 + a_3) + \mathbf{g}(a_2 + a_4)]^2,$$

Moivre formülü ile birinci yanların kare kökleri alınır ve gerçel kısımlar gerçel kısımlara, sanal kısımlar sanal kısımlara eşitlenirse, yukarda olduğu gibi dört bilinmeyen ve dört denklem elde edilir. a_1, a_2, a_3, a_4 bilinmeyenleri bulunur.

Örnek

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^2, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^3, \qquad \mathbf{B} = -2 + 5\,\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + 4\,\mathbf{g}_3,$$

$$\mathbf{B}^2 = 46 - 12\,\mathbf{g}_1 + 36\mathbf{g}_2 - 6\,\mathbf{g}_3,$$

$$\mathbf{B}^3 = -140 + 392\,\mathbf{g}_1 - 104\mathbf{g}_2 + 364\,\mathbf{g}_3, \qquad P_1(\mathbf{A}) = 46 - 36 + \mathbf{g}(-12 + 6) = 10 - 6\mathbf{g}$$

$$P_2(\mathbf{A}) = 46 + 36 + \mathbf{g}(-12 - 6) = 82 - 18\mathbf{g}, \qquad [P_1(\mathbf{B})]^2 = [-2 - 1 + \mathbf{g}(5 - 4)]^2 = 10 - 6\mathbf{g}$$

$$[P_2(\mathbf{B})]^2 = [-2 + 1 + \mathbf{g}(5 + 4)]^2 = 1 - 18\mathbf{g} + 81 = 82 - 18\mathbf{g},$$

$P_1(\mathbf{A}) = -140 + 104 + \mathbf{g}(392 - 364) = -36 + 28\mathbf{g}, \qquad P_2(\mathbf{A}) = -140 - 104 + \mathbf{g}(392 + 364)$
$=$
$-244 + 756\mathbf{g}, \qquad [P_1(\mathbf{B})]^3 = (-3 + \mathbf{g})^3 = -27 + 27\mathbf{g} - 9 + \mathbf{g} = -36 + 28\mathbf{g},$

$$[P_2(\mathbf{B})]^3 = (-1 + 9\mathbf{g})^3 = -1 + 27\mathbf{g} - 243 + 729\mathbf{g} = -244 + 756\mathbf{g}$$

Eşitlikler görülüyor.

Kök almak için Moivre formülü ile, aynı kural uygulanır.

$$\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{B}}$$

$$P_1(\mathbf{B}) = (b_1 - b_3) + \mathbf{g}(b_2 - b_4) \qquad P_2(\mathbf{B}) = (b_1 + b_3) + \mathbf{g}(b_2 + b_4)$$

olsun.

(376) $P_1(\mathbf{A}) = P_1(\sqrt{\mathbf{B}}), \qquad P_2(\mathbf{A}) = P_2(\sqrt{\mathbf{B}}),$

$P_1(\mathbf{A}) = (a_1 - a_3) + \mathbf{g}(a_2 - a_4)$, $P_2(\mathbf{A}) = (a_1 + a_3) + \mathbf{g}(a_2 + a_4)$, $r_1 = \sqrt{[(b_1 - b_3)^2 - (b_2 - b_4)^2]}$,
$r_2 = \sqrt{[(b_1 + b_3)^2 - (b_2 + b_4)^2]}$, $\varphi = \mathrm{Argth}[(b_2 - b_4)/(b_1 - b_3)]$, $\theta = \mathrm{Argth}[(b_2 + b_4)/(b_1 + b_3)]$

$$P_1(\mathbf{B}) = r_1 [\mathrm{Ch}(\varphi) + \mathbf{g}\mathrm{Sh}(\varphi)], \qquad P_2(\mathbf{B}) = r_2 [\mathrm{Ch}(\theta) + \mathbf{g}\mathrm{Sh}(\theta)]$$

(376) eşitliği,

$$(a_1 - a_3) + \mathbf{g}(a_2 - a_4) = \sqrt{r_1} [\mathrm{Ch}(\varphi/2) + \mathbf{g}\mathrm{Sh}(\varphi/2)],$$
$$(a_1 + a_3) + \mathbf{g}(a_2 + a_4) = \sqrt{r_2} [\mathrm{Ch}(\theta/2) + \mathbf{g}\mathrm{Sh}(\theta/2)]$$
$$\mathrm{Re}(P_1(\sqrt{\mathbf{B}})) = \sqrt{r_1} [\mathrm{Ch}(\varphi/2), \qquad \mathrm{\dot{I}m}(P_1(\sqrt{\mathbf{B}})) = \sqrt{r_1}\mathrm{Sh}(\varphi/2)$$
$$\mathrm{Re}(P_2(\sqrt{\mathbf{B}})) = \sqrt{r_2} [\mathrm{Ch}(\theta/2), \qquad \mathrm{\dot{I}m}(P_2(\sqrt{\mathbf{B}})) = \sqrt{r_2}\mathrm{Sh}(\theta/2)$$
$$a_1 = [\mathrm{Re}(P_1(\sqrt{\mathbf{B}})) + \mathrm{Re}(P_2(\sqrt{\mathbf{B}}))]/2, \qquad a_3 = [- \mathrm{Re}(P_1(\sqrt{\mathbf{B}})) + \mathrm{Re}(P_2(\sqrt{\mathbf{B}}))]/2$$
$$a_2 = [\mathrm{\dot{I}m}(P_1(\sqrt{\mathbf{B}})) + \mathrm{\dot{I}m}(P_2(\sqrt{\mathbf{B}}))]/2, \qquad a_4 = [- \mathrm{\dot{I}m}(P_1(\sqrt{\mathbf{B}})) + \mathrm{\dot{I}m}(P_2(\sqrt{\mathbf{B}}))]/2$$

olur.

Üçüncü.üst karmaşık sayılar, kare kök işleminde, dört kümeye ayrılırlar. Üst karmaşık sayının birinci bileşeni gerçel, diğerleri sanal bileşenlerdir. Birinci kümenin kökleri, yukarda verilen teoremle bulunurlar. İkinci küme üst karmaşık sayılarının, aynı yöntemle kare kökü bulunursa, kare kökünün karesi alındığı zaman, a_1 ile a_3, a_2 ile a_4 yerlerini ve işaretlerini değiştirirler. Bunun anlamı, kare kökü ya sanaldır, ya da argümandan π çıkarılacak demektir. Böylece üst karmaşık sayıların kare kökleri, dört kümede toplanır. Birinci küme, yukarda yapılan işlemler ile, kökü bulunan kümedir. İkinci küme kare kökü sanal olan kümedir. Yukarda yapılan işlemlerle bulunan kök, **i** ile çarpılır. Üçüncü küme, hem yukarda verilen teorem uygulanmasını ve hem de, argümanın π radyan veya $\pi\mathbf{i}$ sanal açı kadar döndürülmesini gerektiren kümedir. Dördüncü küme ise, hem sanal kökleri olan ve hem de, π radyan veya $\pi\mathbf{i}$ sanal açı kadar döndürülmeyi gerektiren kümedir. Küp kökte, kök negatif ise, – 1 ile, dördüncü kökte, kök – 1'in dördüncü kökünü çarpan alıyorsa, – 1'in dördüncü kökü ile çarpılır. Kare kökteki **i** yerine –1 gelir. Bu işlemler ikinci ve dördüncü döngüde gerçekleştirilir. Bu işlemler dörtlü döngü ile otomatik olarak yapılır. Döngünün her birinde, bir kümenin işlemleri yapılır. Bulunan kökün karesi, küp kökte küpü, dördüncü kökte dördüncü kuvveti alınarak, kökü alınan sayıdan çıkarılır. Bu fark bir tanesinde en küçüktür. En küçük olan bizim aradığımız köktür. Bu en küçüğü bulmak için, uygun bir sayı ile karşılaştırma yapılır. Uygun olan döngüde, Matlabta break komutu ile döngüden çıkılır. Uygun olarak seçilen karşılaştırma sayısının, kökü alınan sayının büyüklüğüne göre değiştirilmesi gerekir. Eğer bu denetim yapılmazsa, döngüden çıkılması, istenilen döngüde olmaz.

i konulan yere dördüncü kökte, $\mathbf{j} = \sqrt[4]{-1}$ konulur. **j** sayısı, üst karmaşık sayılar cisminin, iki kat sanal sayısıdır.

Kuvvet Teoreminin Genel Kanıtı

$$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{g}_1a_2 + \mathbf{g}_2a_3 + \mathbf{g}_3a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{g}_1b_2 + \mathbf{g}_2b_3 + \mathbf{g}_3b_4, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^2$$

Kök işlemi için, **A** bilinen, **B** bilinmeyen alınır.(366) çarpım formülünden,

$$a_1 - a_3 + \mathbf{g}(a_2 - a_4) = [b_1 - b_3 + \mathbf{g}(b_2 - b_4)]^2$$
$$a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4) = [b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4)]^2$$
$$a_1 = b_1^2 + + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2, \quad a_2 = 2(b_1b_2 + b_3b_4), \quad a_3 = 2(b_1b_3 + b_2b_4), \quad a_4 = 2(b_1b_4 + b_2b_3)$$

yazılır. İkinci tarafın köşeli parantezleri açılır ve a_i lerin değerleri birinci tarafta yerlerine konulursa, eşitliklerin sağlandıkları görülür. Benzer işlemler üçüncü ve dördüncü kökler için de yapılır.

$$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{g}_1a_2 + \mathbf{g}_2a_3 + \mathbf{g}_3a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{g}_1b_2 + \mathbf{g}_2b_3 + \mathbf{g}_3b_4, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^3$$

(371) çarpım formülünden,

$$a_1 = b_1^3 + 6b_2b_3b_4 + 3b_1b_2^2 + 3b_1b_3^2 + 3b_1b_4^2$$
$$a_2 = 3b_1^2b_2 + 6b_1b_3b_4 + 3b_2b_3^2 + 3\,b_2b_4^2 + b_2^3,$$
$$a_3 = 3b_1^2b_3 + 3b_2^2\,b_3 + 6b_1b_2b_4 + 3b_3b_4^2 + b_3^3$$
$$a_4 = 3b_1^2b_4 + 3b_2^2\,b_4 + 3b_3^2b_4 + 6b_1b_2b_3 + b_4^3$$
$$a_1 - a_3 + \mathbf{g}(a_2 - a_4) = [b_1 - b_3 + \mathbf{g}(b_2 - b_4)]^3,$$
$$a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4) = [b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4)]^3$$

yazılır. Köşeli parentezler açılır, a_i lerin değerleri yerlerine konulursa, bu eşitliklerin sağlandıkları görülür.

(371) çarpım formülünden,

(377) $\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{g}_1a_2 + \mathbf{g}_2a_3 + \mathbf{g}_3a_4,\qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{g}_1b_2 + \mathbf{g}_2b_3 + \mathbf{g}_3b_4,\qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^4$

$$a_1 = b_1^4 + 6b_1^2b_2^2 + 6b_1^2b_3^2 + 6b_1^2b_4^2 + 24b_1b_2b_3b_4 + 6b_2^2b_3^2 + 6b_2^2b_4^2 + 6b_3^2b_4^2 + b_2^4 + b_4^4 + b_3^4,$$
$$a_2 = 4b_1^3b_2 + 4b_1b_2^3 + 12b_1b_2\,b_3^2 + 12b_1b_2b_4^2 + 12b_2^2\,b_3b_4 + 12b_1^2b_3b_4 + 4b_3b_4^3 + 4b_3^3b_4$$
$$a_3 = 4b_1^3b_3 + 4b_1b_3^3 + 12b_1b_2^2b_3 + 12b_1b_3b_4^2 + 12b_2b_3^2b_4 + 12b_1^2b_2b_4 + 4b_2b_4^3 + 4b_2^3b_4$$
$$a_4 = 4b_1^3b_4 + 4b_1b_4^3 + 12b_1b_2^2b_4 + 12b_1b_3^2b_4 + 12b_2b_3b_4^2 + 12b_1^2b_2b_3 + 4b_2^3b_3 + 4b_2b_3^3$$
$$a_1 - a_3 + \mathbf{g}(a_2 - a_4) = [b_1 - b_3 + \mathbf{g}(b_2 - b_4)]^4\,,\qquad a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4) = [b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4)]^4$$

yazılır. Köşeli parantezler açılır, a_i lerin değerleri yerlerine konulursa, bu eşitliklerin sağlandıkları görülür.

Dört Boyutlu Üçüncü Üst Karmaşık Sayılarda Köklerin Çok Değerliliği

Üç boyutlu karmaşık sayıların köklerinin, çok değerliliğinden yukarda söz edilmişti. Burada dört boyutlu bir üst karmaşık sayının, kare kök, küp kök ve dördüncü köklerin çok değerliliği üzerinde durulacaktır.

Teorem

(378) $\mathbf{x} = x_1 + \mathbf{g}_1x_2 + \mathbf{g}_2\,x_3 + \mathbf{g}_3\,x_4,$

sayısının iki tane kare kökü vardır. Ters işaretli olanlar da eklenirse, dört tane kare kökü olur. Bu teorem, dört boyutlu uzayda, üst karmaşık sayıların birim vektörlerinin, çarpma işlemi özeliklerinden kaynaklanır.

Kare Kökün Çok Değerliliği

Bir kare kökün her bileşenine, sabit bir sayı (gerçel veya karmaşık) ekleyerek, yeni bir kök araştırması yapalım. (373) sayısı bir kare kök olsun.

(379) $\mathbf{x}^2 = (x_1 + \mathbf{g}_1x_2 + \mathbf{g}_2\,x_3 + \mathbf{g}_3\,x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\,\mathbf{g}_1(x_1x_2 + x_3\,x_4) + 2\,\mathbf{g}_2(x_1\,x_3 + x_2\,x_4) + 2\,\mathbf{g}_3(x_1x_4 + x_2\,x_3)$

$$\mathbf{x}^2 = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^2 = [(x_1 + \lambda + \mathbf{g}_1(x_2 + \lambda) + \mathbf{g}_2(x_3 + \lambda) + \mathbf{g}_3(x_4 + \lambda)]^2$$

λ ekleyerek yeni bir kök bulalım. Önce birinci bileşenlerini eşitleyelim ve kısaltalım.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + \lambda)^2 + (x_2 + \lambda)^2 + (x_3 + \lambda)^2 + (x_4 + \lambda)^2,$$

Parantezler açılır, kısaltmalar yapılırsa,

$$2\,x_1\lambda + 2\,x_2\lambda + 2\,x_3\,\lambda + 2\,x_4\lambda + 4\,\lambda^2 = 0$$

bulunur. λ'nın sıfır değeri birinci kökü verir.

$$\lambda_1 = 0,\qquad \lambda_2 = -(\,x_1 + x_3 + x_2 + x_4)/2$$

değerinin, her köke eklenmesi ile, yeni bir kare kök bulunur. Her bileşende işlemler yinelenirse, λ için aynı değer bulunur.

Örnek:

$\mathbf{x} = 150 - 68\mathbf{g}_1 + 100\,\mathbf{g}_2 - 82\mathbf{g}_3,\quad \mathbf{u} = 3 - 4\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2 - 11\mathbf{g}_3\,,\quad \mathbf{v} = 8 + \mathbf{g}_1 + 7\mathbf{g}_2 - 6\mathbf{g}_3,$

u ve **v**, **x**'in kare kökleridirler.

Üçüncü üst karmaşık sayıların kare köklerini bulan Matlab programı:

```
f = inline('[x(1,1)*x(2,1) + x(1,2)*x(2,2) + x(1,3)*x(2,3) + x(1,4)*x(2,4)   x(1,1)*x(2,2) +
x(1,2)*x(2,1) + x(1,3)*x(2,4) + x(1,4)*x(2,3)   x(1,1)*x(2,3) + x(1,2)*x(2,4) + x(1,3)*x(2,1)
+ x(1,4)*x(2,2)   x(1,1)*x(2,4) + x(1,2)*x(2,3) + x(1,3)*x(2,2) + x(1,4)*x(2,1)]');
b = [-4+2*i  –2 –9,i  –5 + 3*i  7 –12*i];  v = b(1) – b(3);  w = b(2) – b(4);  c3 = b(1) + b(3);
c4 = b(2) + b(4);  i = sqrt(–1);  r1 = (v^2 – w^2)^(1/4); r2 = (c3^2 – c4^2)^(1/4);
```

```
if  v == 0  & w > 0 p = i*pi/2;  elseif  v == 0  &  w< 0  p = – i*pi/2;  else p = atanh(w/v);  end
if  c3 == 0  &  c4 > 0  d = i*pi/2; elseif  c3 == 0  & c4 <0  d = – pi/2; else  d = atanh(c4/c3);
end
n1= [1  i  1  i];  n2 = [0  0  1  1]; pp=p; for  n = 1:4    p=pp;p = p + n2(n)*pi*i;
s(1) = r1*cosh(p/2); s(2) = r1*sinh(p/2); s(3) = r2*cosh(d/2); s(4) = r2*sinh(d/2);
t(1) = (s(1) + s(3))/2; t(2) = (s(2) + s(4))/2; t(3) = (–s(1) + s(3))/2; t(4) = (–s(2) + s(4))/2;
t = t*n1(n); x = [t;t]; u = f(x);  g1 = –(t(1) + t(2) + t(3) + t(4))/2; t1 = (t + g1); x = [t1;t1];
u1= f(x);  y = (b – u); m(1) = abs(y(1));  m(2) = abs(y(2)); m(3) = abs(y(3));
 m(4) = abs(y(4)); mt = 1.0e–003; if  m(1) < mt  &  m(2) < mt  &  m(3) < mt  & m(4) < mt
break
end
end
   end
t, u, t1, u1, b, n,
```

İnline komutuyla başlayan ilk üç satır, birinci üst karmaşık sayıların, (366) da verilen çarpım kuralıdır. Bilgisayarda hepsi bir satıra yazılmalıdır. b, kare kökü alınacak birinci üst karmaşık sayıdır. r1 ve r2 ikinci Öklidsel düzlemde karmaşık sayıların kutupsal yarıçaplarıdır. n üzerinden dörtlü döngü, dört kümenin ayrı, ayrı işlemlerini yapar. Birinci küme, kare kökü düzgün olan küme, ikinci küme, kare kökü sanal olan küme, üçüncü küme, π radyan veya π*i sanal açsıı kadar dönmesi gereken küme, dördüncü küme de, hem π radyan kadar ve hem de, π*i sanal açısı kadar, dönmesi gereken kümedir. if'li cümleler argth fonksiyonunun çeşitli durumlarını inceler. s dizisi, yukarda sözü geçen Moivre formülünün sonuçlarının toplamlarıdır. g1 çok değerliliği sağlar.

Küp Kökün Çok Değerliliği

Küp kök için benzer işlemler yinelenecektir.

$$\mathbf{x}^3 = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^3 = [(x_1 + \lambda) + \mathbf{g}_1(x_2 + \lambda) + \mathbf{g}_2(x_3 + \lambda) + \mathbf{g}_3(x_4 + \lambda)]^3$$

olacak biçimde, bir λ (gerçel veya karmaşık) sayısı arayalım. Önce birinci bileşen için işlem yapalım.

$$(\mathbf{x}^3)_1 = x_1^3 + 3x_1x_2^2 + 6\, x_2 x_3 x_4 + 3\, x_1 x_3^2 + 3x_1 x_4^2 = (x_1 + \lambda)^3 + 3\, (x_1 + \lambda)(x_2 + \lambda)^2 + 6\, (x_2 + \lambda)(x_3 + \lambda)(x_4 + \lambda)+ 3(x_1 + \lambda)(x_3 + \lambda)^2 + 3(x_1 + \lambda)\, (x_4 + \lambda)^2$$

Parantezler açılır, kısaltmalar yapılırsa,

$$3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\lambda + 6(x_1x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4)\lambda + 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\, \lambda^2 + 16\, \lambda^3 = 0$$

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\lambda + 16\, \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(-3 + \sqrt{3}i)/8, \quad \lambda_3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(- 3 - \sqrt{3}i)/8$$

$$x_1 = x_1 + \lambda_i, \quad x_2 = x_2 + \lambda_i\, , \quad x_3 = x_3 + \lambda_i\, , \quad x_4 = x_4 + \lambda_i\, , \quad i = 1, 2, 3$$

ile iki küp kök daha elde edilir.

Üçüncü üst karmaşık sayıların, küp köklerini bulan Matlab programı:

```
   f = inline('[x(1,1)*x(2,1) + x(1,2)*x(2,2) + x(1,3)*x(2,3) + x(1,4)*x(2,4)   x(1,1)*x(2,2) +
x(1,2)*x(2,1) + x(1,3)*x(2,4) + x(1,4)*x(2,3)   (x(1,1)*x(2,3) + x(1,2)*x(2,4) + x(1,3)*x(2,1)
+ x(1,4)*x(2,2)    x(1,1)*x(2,4) + x(1,2)*x(2,3) + x(1,3)*x(2,2) + x(1,4)*x(2,1)]');
b = [-4+2*i   –2 –9,i   –5 + 3*i   7 –12*i];  v = b(1) – b(3);  w = b(2) – b(4);  c3 = b(1) + b(3);
c4 = b(2) + b(4);   i = sqrt(–1);  r1 = (v^2 – w^2)^(1/6); r2 = (c3^2 – c4^2)^(1/6);  if  v == 0 &
w > 0 p = i*pi/2;  elseif  v == 0  &  w< 0  p = – i*pi/2;  else p = atanh(w/v);  end
if  c3 == 0 & c4 > 0  d = i*pi/2; elseif  c3 == 0  & c4 <0  d = – pi/2; else  d = atanh(c4/c3);
end
    n1 = [1  –1  1  –1];  n2 = [0  0  1  1];  pp=p;for  n = 1:4   p=pp;p = p + n2(n)*pi*i;
s(1) = r1*cosh(p/3); s(2) = r1*sinh(p/3); s(3) = r2*cosh(d/3); s(4) = r2*sinh(d/3);
t(1) = (s(1) + s(3))/2; t(2) = (s(2) + s(4))/2; t(3) = (–s(1) + s(3))/2; t(4) = (–s(2) + s(4))/2;
t = t*n1(n); x = [t;t]; u = f(x);  x = [t;u]; u = f(x); g1 = (t(1) + t(2) + t(3) + t(4))*( – 3 +
sqrt(3)*i)/8;   t1 = (t + g1); x = [t1; t1]; u1= f(x); x = [t1; u1]; u1 = f(x);
```

```
g2 = (t(1) + t(2) + t(3) + t(4))*( – 3 – sqrt(3)*i)/8;  t2 = (t + g2); x = [t2; t2]; u2 = f(x);
x = [t2; u2]; u2 = f(x);  y = (b – u); m(1) = abs(y(1));  m(2) = abs(y(2));  m(3) = abs(y(3));
m(4) = abs(y(4));  mt = 1.0e–003; if  m(1) < mt  &  m(2) < mt  &  m(3) < mt  & m(4) < mt
break
end
   end
t, u, t1, u1, t2, u2, b, n,
```

İşlemler kare kökle aynıdır. Moivre formülünde argüman 3'e bölünmüş, kutupsal yarıçapın 6'ıncı kökü alınmıştır. Kare kökte i gelen yere, burada, –1 gelmiştir. g1 ve g2, çok değerlilik nedeni ile, gelecek küp kökleri belirler. t1 ve t2, çok değerlilik özeliği ile gelen köklerdir.

Dördüncü Kökün Çok Değerliliği

Küp kök ve kare kökte olduğu gibi, dördüncü kök için de, 4 tane kök değeri bulunur. Üst karmaşık sayının her bileşenine λ ekleyip, dördüncü kuvvetin her bileşenini sıfır yapalım.

$$\mathbf{x}^4 = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})^4 = [(x_1 + \lambda) + \mathbf{g}_1(x_2 + \lambda) + \mathbf{g}_2(x_3 + \lambda) + \mathbf{g}_3(x_4 + \lambda)]^4$$

(373) vektöründen dördüncü kuvvetin gerçel kısmı,

$$(\mathbf{x}^4)_1 = x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_3^2 + 6x_1^2x_4^2 + 24x_1x_2x_3x_4 + 6x_2^2x_3^2 + 6x_2^2x_4^2 + 6x_3^2x_4^2 + x_2^4 + x_4^4 + x_3^4,$$

dır. İkinci yan,

(380) $$(\mathbf{x}^4)_1 = \{[\mathbf{x} + \lambda(1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)]^4\}_1 = (x_1 + \lambda)^4 + (x_2 + \lambda)^4 + (x_3 + \lambda)^4 + (x_4 + \lambda)^4 + 6 (x_1 + \lambda)^2 (x_2 + \lambda)^2 + 6(x_1 + \lambda)^2 (x_3 + \lambda)^2 + 6(x_1 + \lambda)^2 (x_4 + \lambda)^2 + 24(x_1 + \lambda)(x_2 + \lambda) (x_3 + \lambda)(x_4 + \lambda) + 6(x_2 + \lambda)^2 (x_3 + \lambda)^2 + 6(x_2 + \lambda)^2 (x_4 + \lambda)^2 + 6(x_3 + \lambda)^2 (x_4 + \lambda)^2$$

dır. Eşitliği sağlanacak biçimde λ belirlenmelidir. Kısaltmalardan sonra, λ ile bölünürse,

$$4(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3)\lambda + 12(x_1^2x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_4 + x_2x_4^2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_4 + x_3^2x_2 + x_3^2x_4 + x_1x_4^2 + x_3x_4^2 + x_1x_2^2 + x_3x_2^2)\lambda + 24(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\lambda^2 + 64(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\lambda^3 + 48(x_1x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4)\lambda^2 + 24(x_1x_2 x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4)\lambda + 64\lambda^4 = 0,$$

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 + 24(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \lambda + 64(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\lambda^2 + 64\lambda^3 = 0$$

bulunur. Bu üçüncü derece denkleminin çözümü için, $a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ ifadesi işleme konulmayacaktır. Çünkü, 4 ile kısaltma yapılır ve $\lambda = \mu a$, çözümü ile denkleme girilirse,

$$a^3 + 6 a^3\mu + 16 a^3\mu^2 + 16 a^3 \mu^3 = 0$$

denkleminde, çözüm için, a'ya gerek olmadığı görülmektedir.Denklemin çözümü,

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2,$$

$$\lambda_3 = (-1 + \mathbf{i})(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4, \qquad \lambda_4 = (-1 - \mathbf{i})(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$$

dır. Bulunan bu köklerden, λ_1 ve λ_2 diğer bileşenlerin de köküdürler. Fakat λ_3 ve λ_4 diğer bileşenlerin kökü değildirler. Bilinen bir köke, λ_2'nin eklenmesi ile, bir kök daha bulunur. İki tane dördüncü kök vardır.

Üçüncü üst karmaşık sayıların, dördüncü köklerini bulan Matlab Programı:

```
   f = inline('[x(1,1)*x(2,1) + x(1,2)*x(2,2) + x(1,3)*x(2,3) + x(1,4)*x(2,4)   x(1,1)*x(2,2) +
x(1,2)*x(2,1) + x(1,3)*x(2,4) + x(1,4)*x(2,3)   (x(1,1)*x(2,3) + x(1,2)*x(2,4) + x(1,3)*x(2,1)
+ x(1,4)*x(2,2)    x(1,1)*x(2,4) + x(1,2)*x(2,3) + x(1,3)*x(2,2) + x(1,4)*x(2,1)]');
b = [-4+2*i   –2 –9,i   –5 + 3*i   7 –12*i];  v = b(1) – b(3);  w = b(2) – b(4);  c3 = b(1) + b(3);
c4 = b(2) + b(4);   i = sqrt(–1); j = (1 + i)/sqrt(2);  r1 = (v^2 – w^2)^(1/8); r2 = (c3^2 –
c4^2)^(1/8);   if  v == 0 & w > 0 p = i*pi/2;  elseif  v == 0  &  w< 0  p = – i*pi/2;  else p =
atanh(w/v);  end
if  c3 == 0 & c4 > 0  d = i*pi/2; elseif  c3 == 0  & c4 <0  d = – pi/2; else  d = atanh(c4/c3);
end
     n1 = [1  j  1  j];  n2 = [0  0  1  1]; pp=p; for  n = 1:4    p=pp; p = p + n2(n)*pi*i;
s(1) = r1*cosh(p/4); s(2) = r1*sinh(p/4); s(3) = r2*cosh(d/4); s(4) = r2*sinh(d/4);
t(1) = (s(1) + s(3))/2; t(2) = (s(2) + s(4))/2; t(3) = (–s(1) + s(3))/2; t(4) = (–s(2) + s(4))/2;
```

```
t = t*n1(n); x = [t; t]; u = f(x);  x = [u; u]; u = f(x); g1 = – (t(1) + t(2) + t(3) + t(4))/2;
 t1 = (t + g1); x = [t1; t1]; u1= f(x); x = [u1; u1]; u1 = f(x); g2 = (t(1) + t(2) + t(3) + t(4))*( – 1
+ i)/4;    t2 = (t + g2); x = [t2; t2]; u2 = f(x); x = [u2; u2]; u1 = f(x); g3 = (t(1) + t(2) + t(3) +
t(4))*( – 1 – i)/4;  t3 = (t + g3); x = [t3; t3]; u3 = f(x); x = [u3; u3]; u3 = f(x);
y = (b – u); m(1) = abs(y(1));  m(2) = abs(y(2));  m(3) = abs(y(3));  m(4) = abs(y(4));
mt = 1.0e–003; if  m(1) < mt  &  m(2) < mt  &  m(3) < mt  & m(4) < mt  break
end
    end
t, u, t1, u1, t2, u2, t3, u3, b, n,
```

Dördüncü kök için de yapılan işlemler aynıdır. Argüman 4'e bölünmüş, mutlak değerin 8'inci kökü alınmıştır. t, t1, t2, t3 dördüncü kökler, u, u1, u2, u3 de, bunların dördüncü kuvvetleridir. b'ye eşit oldukları görülmektedir. Kare kökte i gelen yere, 1'in sekizinci kökü, $j = \sqrt[4]{-1}$, sayısı konulmuştur.

Dört Boyutlu Uzayda Üçüncü Üst Karmaşık Sayılarla Dördüncü Derece Denkleminin Dördüncü Kök Altında Çözümü

Kitabın başında denklem çözümleri verildi. Bir kare kök, ikinci derece denkleminin çözümünde, iki küp kök, üçüncü derece denkleminin çözümünde, iki kare kök de, dördünce derece denkleminin çözümünde gelmiştir. İkinci derece denkleminin kökleri, kare kök içinde, üçüncü derece denklemin kökleri, üçüncü kök içinde, dördüncü derece için, dördüncü kök altında gelmesi beklenirken, kare kök altında gelmişlerdir. Dördüncü kök altında gelecek, dördüncü derece denkleminin çözümünü araştıralım.

(381) $X_1 = x + \mathbf{g}_1 y + \mathbf{g}_2 z + \mathbf{g}_3 t$, $\quad X_2 = x - \mathbf{g}_1 y + \mathbf{g}_2 z - \mathbf{g}_3 t$,
$X_3 = x - \mathbf{g}_1 y - \mathbf{g}_2 z + \mathbf{g}_3 t$, $\quad X_4 = x + \mathbf{g}_1 y - \mathbf{g}_2 z - \mathbf{g}_3 t$,

Köklerle katsayıların bağıntılarından, bu sayıları kök kabul eden denklemin katsayılarını bulalım. Determinantın açılım işleminde olduğu gibi, determinantlar açılacak, fakat tek enversiyonda eksi işareti konulmayacaktır. Yalnız buradaki işaretler konulacaktır. İkili çarpımların toplamında, ikinci mertebe determinantların, üçlü çarpımların toplamında, üçüncü mertebe determinantların, dörtlü çarpımda, dördüncü mertebe determinantın açılımı uygulanacaktır. Bir değişkenin kuvvet üssü, birden büyükse, üs kadar sütun üzerinde, değişik sıralamalarda terim alınacaktır. Örnek olarak köklerin ikili çarpımlarının toplamlarında, xy'li, ve y^2'li terimlerini, üçlü çarpimlarının toplamında, z^2t'li terimi hesaplayalım. Birinci ve ikinci sütunlardan, altı tane ikinci mertebe determinant yazılabilir.

$$\sum\sum X_iX_j = ... + \mathbf{g}_1\, xy\,(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31} + a_{11}a_{42}+ a_{12}a_{41}+ a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31} + a_{21}a_{42} + a_{22}a_{41} + a_{31}a_{42} + a_{32}a_{41}) + \mathbf{g}_1^2\, y^2(a_{12}a_{22} + a_{12}a_{32} + a_{12}a_{42} + a_{22}a_{32} + a_{22}a_{42} + a_{32}a_{42})....$$
$$= .... \mathbf{g}_1 xy(- 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1) + \mathbf{g}_1^2\, y^2(- 1 - 1 + 1 + 1- 1 - 1)...$$
$$= .... \mathbf{g}_1\, xy(0) - 2\, \mathbf{g}_1^2 y^2 ....$$

$$\sum\sum\sum X_iX_jX_k = ... \mathbf{g}_2^2\, \mathbf{g}_3\, z^2t[a_{13}a_{23}(a_{34} + a_{44}) + a_{13}a_{33}(a_{24} + a_{44}) + a_{13}a_{43}(a_{24} + a_{34}) + a_{23}a_{33}(a_{14} + a_{44}) + a_{23}a_{43}(a_{14} + a_{34}) + a_{33}a_{43}(a_{14} + a_{24})...] = ... \mathbf{g}_2^2\, \mathbf{g}_3\, z^2t(1 - 1 + 1 +1 +1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 +1 - 1) .... = ... \mathbf{g}_2^2\, \mathbf{g}_3\, z^2t(0) ....$$

Parantez içindeki sayı toplamın değeridir. Bu işlemlerle,

(382) $a_1 = -\sum X_i = -4x$, $\quad a_2 = \sum\sum X_iX_j = 6x^2 - 2\,\mathbf{g}_1^2\, y^2 - 2\,\mathbf{g}_2^2 z^2 - 2\,\mathbf{g}_3^2\, t^2$,
$a_2 = \sum\sum X_iX_j = 6x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 2t^2$,
$a_3 = -\sum\sum\sum X_i\, X_j\, X_k = -4(x^3 - \mathbf{g}_1^2\, xy^2 - \mathbf{g}_2^2 xz^2 - \mathbf{g}_3^2\, xt^2 + 2\, \mathbf{g}_1\, \mathbf{g}_2\, \mathbf{g}_3\, yzt)$,
$a_3 = -\sum\sum\sum X_i\, X_j\, X_k = -4(x^3 - xy^2 - xz^2 - xt^2 + 2yzt)$,
$a_4 = X_1X_2\, X_3X_4 = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 2x^2(\mathbf{g}_1^2\, y^2 + \mathbf{g}_2^2 z^2 + \mathbf{g}_3^2\, t^2) - 2(\mathbf{g}_1^2\, \mathbf{g}_2^2\, y^2z^2 + \mathbf{g}_1^2\, \mathbf{g}_3^2 y^2t^2 + \mathbf{g}_1^2\, \mathbf{g}_3^2\, z^2t^2) + 8\, \mathbf{g}_1\, \mathbf{g}_2\, \mathbf{g}_3\, xyzt$
$a_4 = X_1X_2\, X_3X_4 = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 2x^2(y^2 + z^2 + t^2) - 2(y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + 8\, xyzt$
değerleri bulunur. İşlemleri basitleştirmek için, yeni fonksiyonlar tanımlayalım.

(383) $p = y^2 + z^2 + t^2$, $\quad q = yzt$, $\quad r = y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2$

Dördüncü derece denkleminden, üçüncü dereceye indirgenmiş denklemin katsayıları,

(384) $b_1 = -(y^4 + z^4 + t^4)$, $b_2 = y^4 z^4 + z^4 t^4 + y^4 t^4$, $b_3 = - y^4 z^4 t^4$
olmalıdır. İndirgenmiş üçüncü derece denkleminin kökleri, y^4, z^4, t^4 dür. p'nin ve r'nin karelerini alalım.
(385) $p^2 = y^4 + z^4 + t^4 + 2(y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) = - b_1 + 2r$,
$r^2 = y^4 z^4 + z^4 t^4 + y^4 t^4 + 2(y^4z^2t^2 + y^2z^2t^4 + y^2z^4t^2) = b_2 + 2q^2 p$,
Bu değerler (382) de yerlerine konulursa,
(386) $a_1 = - 4x$, $a_2 = 3a_1^2/8 - 2p$, $a_3 = - 4(- a_1^3/64 + a_1p/4 + 2q)$
$a_4 = a_1^4/256 - b_1 - a_1^2 p/8 - 2 r - 2a_1q$,
(387) $q = (- a_3 + a_1^3/16 - a_1 p)/8$, $p = 3a_1^2/16 - a_2/2$,
bulunur. a_4 ile p^2 'nin toplamı,.
$a_4 + p^2 = a_1^4/256 - 2b_1 - a_1^2 p/8 - 2a_1q$,
$b_1 = - a_4/2 - p^2/2 + a_1^4/512 - a_1^2 p/16 - a_1q$,
olur. (385)'in birincisinden r, ikincisinden b_2 hesaplanır.
$r = (p^2 + b_1)/2$, $b_3 = - q^4$, $b_2 = r^2 - 2q^2p$,
p, q, r yardımcı fonksiyonlarla, b_1, b_2 , b_3 indirgenmiş, üçüncü derece denkleminin katsayıları hesaplanmıştır. Bundan sonraki işlemler, baştaki anlatılanlarla aynıdır. Çünkü ikinci ve üçüncü derece denklemlerinin, ikinci üst karmaşık sayılarla çözümünde, bir sorun yoktur.

Üçüncü derece denkleminin çözümü ile y^4, z^4, t^4 bulunur. Bunların dördüncü kökleri arasında hangilerinin alınacağı, ancak deneme ile bulunur. Çünkü hepsi denklemi sağlamaz. Dördüncü kuvvetlerin, ikisinde dördüncü kök alalım. Bulunan değerler y ve z olsunlar. t'yi (378) de q değerinden bölüm yaparak buluruz. İkinci olarak, üçüncü derece denklemin çözümü, bu sayıların hangi sırada alınıp, kök oluşturulacağı konusunda, bilgi vermez. Üç sayının altı türlü sıralanışı vardır. Bunların hepsi de, denklemin köküdürler. Üçüncü olarak, üçüncü derece denklemin dördüncü kökleri, i, – i, – 1 sayıları ile çarpılarak kökler çoğaltılır. Bu çoğalan köklerden, hangilerinin dördüncü derece denklemini sağlayacağı, deneme ile bulunur. Dördüncü derece denkleminin dördüncü kök altında çözümü, düzlemin birinci karmaşık sayısı ile de yapılır.

Matlab programı ile dördüncü kök altında, denklem çözümü:

```
   n = 4;
s1 = sqrt(3); i = sqrt(–1); e1 = 3/2; e2 = –9/2; e3 = –5/2; e4 = 5;  h1 = 5 + 2*i;  h2 = 2 + 7*i;
h3 = 9 + 8*i;  g1 = 6 – 5*i; g2 = 4 + 11*i;  a1 =  – (e1 + e2 + e3 + e4);  a2 = e1*e2 + e1*e3 +
    e1*e4 + e2*e3 + e2*e4 + e3*e4;  a3 = – (e1*e2*e3 +e1*e2*e4 +e1*e3 e4 + e2*e3*e4);
a4 = e1*e2*e3*e4;  b1 = – (h1 + h2 + h3)¸b2 = h1*h2 + h1*h3 + h2*h3;  b3 = – h1*h2*h3;
c1 = – (g1 + g2);  c2 = g1*g2;  a1 = 3/5; a2 = -7;  a3 = 4/3;  a4 = 8;
 if n == 4
 p = – a2/2 + 3*a1^2/16;  q = (– a3 + a1^3/16 – a1*p)/8;  b1 = – a4/2 + a1^4/512 – p^2/2 –
a1^2*p/16 – a1*q;  r = (p^2 + b1)/2; b2 = r^2 – 2*q^2*p;  b3 = – q^4;  end
 if  n>2
c1 = b3 + 2*b1^3/27 – b1*b2/3; yz = b1^2/9 – b2/3; c2 = yz^3; end
dis = c1^2 – 4*c2;  diskok = sqrt(dis); ax1 = (– c1 + diskok)/2;  ax2 = (– c1 – diskok)/2;
ax12 = ax1^2;  ax1c1 = ax1*c1; saglama = ax12 + ax1c1 + c2;
ax1, ax2, saglama,
y = ax1^(1/3);  z = yz/y; j = (–1 +i*s1)/2;  k = (–1 – i*s1)/2; ax = – b1/3;  y1 = ax + y + z;
y2 = ax + j*y + k*z;  y3 = ax + k*y + j*z;   saglama = y1^3 + b1*y1^2 + b2*y1 + b3;
y1, y2, y3, saglama,
if n == 4
y = y1^(1/4);  z = y2^(1/4); u1 = y*z;  t = q/u1; ax = – a1/4;  z1 = ax + y + z + t;
z2 = ax – y + z – t;    z3 = ax + y – z  – t;  z4 = ax – y – z + t;
saglama = z1^4 + a1*z1^3 + a2*z1^2 + a3*z1 + a4;  z1, z2, z3, z4, saglama,
```

Birinci satırda bulunan n değişkeni, kökü bulunacak denklemin derecesini gösterir. e_i,h_i ve

g_i değişkenleri, önceden tasarlanan kökleri gösterirler. Bu kökler, yeniden hesap edilerek bulunacaktır. Bir çeşit sağlamadır. Sonra gelen a dizisi, dördüncü derece denkleminin, en büyük dereceli terimin katsayısı, 1'e indirgendikten sonra, baştan itibaren katsayıları gösterir. b dizisi, üçüncü, c dizisi de, ikinci derece denklemlerinin katsayılarını gösterirler.

Çözülecek denklemin derecesi, n'ye, katsayıları da a dizisine atanmalıdır. İşlemler yukarda hesabı yapılan işlemlerdir. Bazan sağlama sıfırdan farklı olabilir. Bu durumda, 15'inci satırda, y = ax1^(1/3); ifadesinde ax1 = 0 olabilir. Bu kök çözüme yarar sağlamaz. Öbür kök denenmelidir. 19'uncu satırdaki atamalarda da, aynı durum olabilir. Onlar da, diğer kökle değiştirilmelidir. İkinci bir sorun 21'inci satırda yaşanır. Bu satırda, üçüncü derece denkleminin dördüncü kökü alınmaktadır. Bu dördüncü köklerden hepsi de denklemin kökü olmazlar. Deneme yapılmalıdır. ..

VIII
DÖRT BOYUTLU UZAYIN HİPERBOLİK TRİGONOMETRİSİ ve İKİNCİ ÜST KARMAŞIK SAYILARI

Dört Boyutlu Uzayda Hiperbolik Trigonometri

1'in dördüncü kök vektörleri daha önce Uzayda Dönme Formülü paragrafında verildi.

$$\mathbf{1} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0, \quad \mathbf{1} + \mathbf{e}_2 \neq 0, \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \neq 0$$

Özelikleri, üç boyutlu uzayın sanallık özelikleri olduğu vurgulanmıştı. Bu vektörler, üç boyutlu uzayda, düzgün dörtyüzlünün merkezini köşelere birleştiren vektörler olduğu için, yalnız toplamları sıfırdır. İkişer, ikişer doğrusal bağımsızdırlar. Dört vektörün bileşenlerinin matrisinin rangı üçtür.

Bu vektörlerin uzantıları, sonsuzdaki karmaşık düzlemde, sıra ile 1, **i**, – 1, – **i** noktalarından geçer. Sonsuzdaki karmaşık düzlemin koordinat eksenleri ile, bu vektörlerin uzantıları sonsuzda kesişirler. Bu nedenle bu doğrular paraleldir ve 1'in dördüncü kökleridir. Çarpımları değişmez, toplamları değişir. Çünkü daha önce ifade edildiği gibi, toplam kuralında değer, vektör sisteminin sonsuzuna göre belirlenir. Bu vektör sistemlerinin sonsuzları farklıdır. Uzaydaki noktalar için sonsuz, sonsuzdaki düzlemdir, sonsuzdaki noktalar için sonsuz, sonsuzdaki düzlemin, sonsuzdaki doğrusudur.

(388) $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1^3 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1^4 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_2,$

$$\mathbf{e}_3^3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \neq 0, \quad \mathbf{e}_2 + \mathbf{1} \neq 0, \quad \mathbf{1} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0,$$

Dört boyutlu uzayın sonsuzundaki üst düzlemine, düzgün barisantrik koordinat dörtyüzlüsünü koyalım. Dört boyutlu uzayın başlangıcını, bu dörtyüzlünün köşelerine birleştirelim. Barisantrik koordinat dörtyüzlüsünün köşelerinin koordinatları, $A_0(1, 0, 0, 0)$, $A_1(0, 1, 0, 0)$, $A_2(0, 0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 0, 1)$ dir. Bir vektörün bileşenleri, bu vektörün sonsuzdaki noktasının, sonsuzdaki koordinat dörtyüzlüsüne göre, barisantrik koordinatlarıdır. Köşelerin koordinatları, başlangıcı bu noktalara birleştiren doğruların birim vektörlerinin bileşenleri olunca, bu doğrular, dört boyutlu uzayın karteziyen koordinat sistemi olarak alınabilirler. Koordinat sisteminin birim vektörlerinin uzantıları, sonsuzdaki $\mathbf{e}_i$ vektörlerini, sonsuzdaki uzayda keserler. Bu birim vektörler, $\mathbf{e}_i$ vektörlerine paraleldirler. Dört boyutlu uzayın birim vektörleri de, 1'in dördüncü kökleridirler. Bunlar da, $\mathbf{e}_i$ kalın harfleriyle gösterilecekler, yalnız toplamları sıfır olmayacaktır. Dört boyutlu uzayın baz elemanları,

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1^3 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1^4 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_3^3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \neq 0, \quad \mathbf{e}_2 + \mathbf{1} \neq 0, \quad \mathbf{1} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \neq 0,$$

dır. (290) da 1'in üst karmaşık sayılarla, dördüncü kökleri verildi.

$$\mathbf{v}_1 = 1/2(-\,i + i\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3), \quad \mathbf{v}_1^2 = \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{v}_1^3 = 1/2(\,i - i\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{g} = \mathbf{v}_1^2, \quad \mathbf{h} = \mathbf{v}_1^3, \quad \mathbf{f}^2 = \mathbf{g}, \quad \mathbf{f}^3 = \mathbf{h}, \quad \mathbf{f}^4 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{f}\,\mathbf{g} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{f}\,\mathbf{h} = \mathbf{1},$$

$$\mathbf{g}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{h}^2 = \mathbf{g}, \quad \mathbf{h}^3 = \mathbf{f}, \quad \mathbf{g}\,\mathbf{h} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} + \mathbf{h} \neq 0, \quad \mathbf{g} + \mathbf{1} \neq 0, \quad \mathbf{1} + \mathbf{f} + \mathbf{g} + \mathbf{h} \neq 0,$$

İki vektör sisteminin özdeş olduğu görülmektedir. Daha önce Uzayda Karmaşık Sayılar ve Uzayda Dönme Formülü paragraflarında ayrıntılı olarak açıklandı. $\mathbf{e}_i$ üst karmaşık sayıların yerine, dört boyutlu uzayın üst karmaşık sayıları kullanılacaktır.

İzotrop Noktalar

İzotrop noktalar, dördüncü mertebe birim matrisin, dördüncü köklerinin değişmez noktalarıdır.

(389) $A = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad C = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$

Matrisleri, I birim matrisin dördüncü kökleridir. $A^2 = C$, $B^2 = C$, $A^4 = B^4 = C^2 = I$ dir. Bu matrisler, dördüncü mertebe devresel matrisler gurubunda, birim matris ve kuvvetleri ile birlikte, devresel alt gurup oluştururlar. B matrisinin değişmez noktaları bulunacaktır

$-\nu x_1 + x_2 + 0 + 0 = 0, \quad 0 - \nu x_2 + x_3 + 0 = 0, \quad 0 + 0 - \nu x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 + 0 + 0 - \nu x_4 = 0$

Türdeşlik koordinatı keyfi alınır.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \nu, \quad x_3 = \nu^2, \quad x_4 = \nu^3, \qquad |B - \nu I| = 0, \quad \nu^4 - 1 = 0,$$

bulunur. ν karakteristik denklemin kökü olup, 1'in dördüncü köküdür. Üst karmaşık sayılarda kökler, çok değerlidirler. Burada uygun olan dört kök alınacaktır. Sıra ile yerlerine konulursa,

$$\nu_1 = f, \quad \nu_2 = -f, \quad \nu_3 = ih, \quad \nu_4 = -ih,$$

$$J_1 = (0, 1, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}), \quad J_2 = (0, 1, -\mathbf{f}, \mathbf{g}, -\mathbf{h}), \quad J_3 = (0, 1, \mathbf{ih}, -\mathbf{g}, -\mathbf{if}), \quad J_4 = (0, 1, -\mathbf{ih}, -\mathbf{g}, \mathbf{if})$$

B matrisinin değişmez noktaları, yani izotrop noktalar bulunmuş olur. Burada üst karmaşık sayılar kullanılmıştır. Karmaşık sayılarla da, aynı sonuçları verecek, izotrop noktalar düzenlenebilir. Üst karmaşık sayıların kullanılması, zorunlu değildir. Bu matrislerin değişmez noktaları,yani izotrop noktalar, izotrop düzlemler, kuartik yüzey ve birim kuartik yüzey sıra ile,

(390) $J_1' = [0, 1, -\mathbf{h}, \mathbf{g}, -\mathbf{f}], \quad J_2' = [0, 1, \mathbf{if}, -\mathbf{g}, -\mathbf{ih}], \quad J_3' = [0, 1, \mathbf{h}, \mathbf{g}, \mathbf{f}],$

$$J_4' = [0, 1, -\mathbf{if}, -\mathbf{g}, \mathbf{ih}]$$

$$P_1 = x_1 - \mathbf{h}x_2 + \mathbf{g}x_3 - \mathbf{f}x_4 = 0, \qquad P_2 = x_1 + \mathbf{if}x_2 - \mathbf{g}x_3 - \mathbf{i}hx_4 = 0$$

$$P_3 = x_1 + \mathbf{h}x_2 + \mathbf{g}x_3 + \mathbf{f}x_4 = 0, \qquad P_4 = x_1 - \mathbf{if}x_2 - \mathbf{g}x_3 + \mathbf{ih}x_4 = 0$$

$$P_1P_3 = x_1^2 - \mathbf{g}x_2^2 + x_3^2 - \mathbf{g}x_4^2 + 2\,\mathbf{g}x_1x_3 - 2\,x_2x_4$$

$$P_2P_4 = x_1^2 + \mathbf{g}x_2^2 + x_3^2 + \mathbf{g}x_4^2 - 2\mathbf{g}x_1x_3 - 2\,x_2x_4$$

$$P_1P_2P_3P_4 = x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 - 4\,x_1^2x_3^2 + 4\,x_2^2x_4^2 + 2\,x_1^2x_3^2 - 4\,x_1^2x_2x_4 - 2\,x_2^2x_4^2 +$$
$$4\,x_2^2x_1x_3 - 4\,x_3^2x_2x_4 + 4\,x_4^2x_1x_3 = 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 - 2\,x_1^2x_3^2 - 4\,x_1^2x_2x_4 + 2\,x_2^2x_4^2 +$$
$$4\,x_2^2x_1x_3 - 4\,x_3^2x_2x_4 + 4\,x_4^2x_1x_3 = 1$$

olarak bulunur.

Dört Boyutlu Uzayda Kuvvet Serileri

İki ve üç boyutlu uzaylarda olduğu gibi, dört boyutlu uzayda da üstel fonksiyon seriye açılabilir ve trigonometri tanımı yapılabilir. Yukarda verilen işlem özelikleri ile, seriye açılacak bir üstel fonksiyon, dört bileşene ayrılacaktır. Dört bileşenin gelmesi, ancak üst karmaşık sayılarla mümkündür. Bu işlemde, üst karmaşık sayıların kullanılması zorunludur.

$$e^{\mathbf{f}\,\alpha} = 1 + \mathbf{f}\alpha/1! + \mathbf{g}\alpha^2/2! + \mathbf{h}\alpha^3/3! + \alpha^4/4! + \mathbf{f}\alpha^5/5! + \mathbf{g}\alpha^6/6! + \mathbf{h}\alpha^7/7!...$$

Serisinin açılımında gelen dört bileşen, yukarda verilen üst kuartik birim yüzeyi sağlar. Bu bileşenlerle ifade edilen değerler, dört boyutlu uzayın hiperbolik trigonometrisi olarak tanımlanacaktır.

Dört boyutlu uzayda, $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ noktasını başlangıca birleştirelim.

(391) $s^4 = x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 + 4(-x_1^2x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 - x_2x_3^2x_4 + x_1x_3x_4^2)$

$$+ 2(-x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2)$$

s noktanın başlangıca görel uzaklığı olmak üzere,

(392) $S_1(\alpha) = x_1/s, \quad S_2(\alpha) = x_2/s, \quad S_3(\alpha) = x_3/s, \quad S_4(\alpha) = x_4/s$

oranlarına, dört boyutlu uzayın **hiperbolik tririgonometrik oranları**,

$$\mathbf{a} = x_1 + \mathbf{h}x_2 + \mathbf{g}x_3 + \mathbf{f}x_4,$$

üst karmaşık sayısına da, dört boyutlu uzayın **ikinci üst karmaşık sayısı** veya dört boyutlu uzayın **hiperbolik üst karmaşık sayısı** denilecektir. Bu oranlar, pozitif kuvvet serilerine dayanırlar ve üst kuartik birim yüzeyin denklemini sağlarlar.
Üst kuartik birim yüzey, dört boyutlu uzayın, görel uzaklığına göre birim yüzeydir.

$e^{\mathbf{f}\alpha}$ fonksiyonunu seriye açalım. Bulunan fonksiyonları trigonometrik fonksiyonlarla gösterelim. İşlem kuralları şunlardır.

$$e^{\mathbf{f}\alpha} = 1 + \mathbf{f}x/1! + \mathbf{g}x^2/2! + \mathbf{h}x^3/3! + x^4/4! + \mathbf{f}x^5/! + \mathbf{g}x^6/6! + \mathbf{h}x^7/7! + x^8/8!.....$$

(393) $S_1(x) = 1 + x^4/4! + x^8/8!... \quad + x^{4n}/(4n)!,$

$S_2(x) = x/1! + x^5/5! + x^9/9! .... \quad + x^{4n+1}/(4n + 1)!$

$S_3(x) = x^2/2! + x^6/6! + x^{10}/10!.... + x^{4n+2}/(4n + 2)!$

$S_4(x) = x^3/3! + x^7/7! + x^{11}/11! ... \quad + x^{4n+3}/(4n + 3)!$

$$e^{\mathbf{f}\alpha} = \mathbf{1}S_1(x) + \mathbf{f}S_2(x) + \mathbf{g}S_3(x) + \mathbf{h}S_4(x), \qquad e^{\mathbf{g}2x} = \mathbf{1}S_1(x) + \mathbf{g}S_2(x) + \mathbf{1}S_3(x) + \mathbf{g}S_4(x),$$

$$e^{\mathbf{h}x} = \mathbf{1}S_1(x) + \mathbf{h}S_2(x) + \mathbf{g}S_3(x) + \mathbf{f}S_4(x),$$

$S_i(x)$ fonksiyonları, üst kuartik birim yüzeyin denklemini sağlarlar. Bu koşul, bu fonksiyonların trigonometrik fonksiyon olarak, tanımlanması için, gerek ve yeter koşuldur. x değiştiği zaman, $e^{\mathbf{f}x}$, $e^{\mathbf{g}x}$, $e^{\mathbf{h}x}$ birim vektörler olup, üst kuartik birim yüzey üzerinde, başlangıca görel uzaklığı birim olan, bir eğri üzerinde hareket ederler. Bu eğri üç tane olup, **birinci**, **ikinci** ve **üçüncü açı eğrisi** adlarını alacaklardır. Bu serilerden,

(394) $Ch(x) = S_1(x) + S_3(x), \qquad Sh(x) = S_2(x) + S_4(x)$

$Cos(x) = S_1(x) – S_3(x), \qquad Sin(x) = S_2/x) – S_4(x)$

eşitlikleri yazılır.

Trigonometrik serilerin Matlab programı ile bulunması:

```
x = 4; S(1) = 1; S(2) = 0; S(3) = 0; S(4) = 0; for i = 1:25  b = x^i/factorial(i); n = mod(i, 4);
m = n+1;  S(m) = S(m) + b; end
 dd = S(1)^4 – S(2)^4 + S(3)^4 – S(4)^4 – 2*S(1)^2*S(3)^2 – 4*S(1)^2*S(2)*S(4) +
2*S(2)^2*S(4)^2 + 4*S(2)^2*S(1)*S(3) – 4*S(3)^2*S(2)*S(4) + 4*S(4)^2*S(1)*S(3);
a = S(1) + S(2) + S(3) + S(4); b = (3*S(1) – S(2) – S(3) – S(4))/3;  t = sqrt(3); i = sqrt(– 1);
 j = (– 1 + t*i);  k = (– 1 – t*i)/2;  c = ((– 1 + t)*S(2) + 2*S(3) – (1 + t)*S(4) )/3;
 d = (–(1 + t)*S(2)+ 2*S(3) + (–1 + t)*S(4))/3;  g3 = a*(b + c + d)*(b + j*c + k*d)*(b + k*c +
j*d),
```

İşlemler, yukarda verilen serilerin uygulamasıdır. Görel uzaklığın, 1'e eşit olduğu görülüyosr. Son üç satır, Öklidsel uzayda barisantrik koordinatlarla, karteziyen koordinatlar arasındaki koordinat dönüşüm formülüdür. Karmaşık sayılar I yapıtımın (183) formülü ile verildi Aynı yapıtta (190) ve (196) numaralı formüller arasındaki işlemlerle, g3 ile verilen uzaklık ifadesi, açıklandı. Barisantrik koordinatlarla ilgisi gösterildi. g3 dört boyutlu göreceli uzayın sanal koordinatlarında, bir noktanın başlangıca uzaklık formülüdür.

$$g_3 = a(b + c + d)*(b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d)*(b + \mathbf{k}c + \mathbf{j}d),$$

$$a_1 = a, \quad b_1 = b + c + d, \quad c_1 = b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d,$$

$$d_1 = b + \mathbf{k}c + \mathbf{j}d, \quad g_3 = d^3 = a_1.b_1.c_1.d_1,$$

Sanal koordinat sistemi, dört boyutlu göreceli uzayın (390) ile verilen izotrop noktalarının dörtyüzlüsü ile oluşan koordinat sistemidir. Dört boyutlu uzayda, dörtyüzlü koordinat dörtyüzlüsü olarak alınmıştır. Bu konuya biraz açıklık getirelim. Düzlemde,

$$\mathbf{u} = (x_0 + \mathbf{j}x_1 + \mathbf{k}x_2)/(x_0 + x_1 + x_2), \quad \mathbf{v} = (x_0 + \mathbf{k}x_1 + \mathbf{j}x_2)/(x_0 + x_1 + x_2),$$

ifadeleri ile barisantrik vektör tanımı yapıldı ve örnekleri verildi. x_i'ler noktanın türdeş barisantrik koordinatlarıdır Sonra düzlemin izotrop noktalarına B(0, 1, 1, 1) noktası, üçüncü izotrop nokta olarak eklendi. Göreceli uzay elde edildi.

$$a_1 = x_0 + x_1 + x_2 \qquad a_2 = x_0 + \mathbf{j}x_1 + \mathbf{k}x_2, \qquad a_3 = x_0 + \mathbf{k}x_1 + \mathbf{j}x_2,$$

Vektörler, göreceli uzayın vektörleri oldular, **j**, **k** vektörleri de karteziyen koordinatların birim vektörleri oldular. Aynı zamanda bunlar, uzayın sanal koordinatları oldular. x_i'değişkenleri barisantrik koordinatlar iken göreceli uzayın karteziyen koordinatları oldular.. Bu oluşum, düzlemdeki barisantrik eşkenar koordinat üçgeninin, sonsuzdaki düzlem üzerine gitmesi ve üçgenin köşelerinin sabit kalan başlangıç noktasına, doğrularla bağlı kalması biçiminde yorumlanacaktır. Bir çeşit koordinat üçgenini söndürmedir. Uzayda karteziyen koordinatlarda, bir vektörün bileşenleri, sonsuzdaki noktasının, sonsuzdaki koorddinat üçgenine göre barisantrik koordinatları olduğu Karmaşık Sayılar I yapıtımda, (115) de kanıtlandı. Gerçekten noktanın bir karteziyen koordinatıı, bu oluşumla, sonsuzdaki barisantrik koordinatla, noktanın aynı düzleme uzaklığını gösterirler. Bunlar Öklidsel düzlemde tanımlanmış vektörlerdir. Burada, uzayın karteziyen koordinatlarının vektörleridir. x_i değişkenleri, noktanın karteziyen koordinatları olmuşlardır. **u** ve **v** vektörleri ise, uzayın sanal koordinatlarıdır. Uzayın sanal koordinatları, $J_1(1, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, $J_2(1, 1, 1)$, $J_3(1, \mathbf{k}, \mathbf{j})$, izotrop noktaları üzerine kurulan koordinat sistemidir..Benzer düşünce dört boyutlu uzay için de geçerlidir. Dört boyutlu uzayın izotrop noktaları, (390) da verildi. Bu dörtyüzlü üzerine kurulan koordinat sistemi, dört boyutlu birinci göreceli uzayın, sanal koordinat sistemidir.

S(1), S(2), S(3), S(4) trigonometrik fonksiyonlarıyla verilen seriler, göreceli dört boyutlu uzayda, birim kuartik üst yüzey üzerinde bulunan noktaların, barisantrik koordinatlarıdır.. dd ile verilen ifade, dört boyutlu göreceli uzayda, sanal koordinatlarla, bir noktanın başlangıca uzaklık formülüdür ve. birim kuartik üst yüzeyin denklemidir..Birim izotrop üst yüzeydir.

$a = x_1, - \mathbf{h}x_2 + \mathbf{g}\, x_3 - \mathbf{f}\, x_4$, $b = x_1, - \mathbf{if}\, x_2 - \mathbf{g}\, x_3 - \mathbf{ih}\, x_{4s}$, $c = x_1, + \mathbf{h}x_2 + \mathbf{g}\, x_3 + \mathbf{f}\, x_4$,

$d = x_1, - \mathbf{if}\, x_2 - \mathbf{g}\, x_3 + \mathbf{ih}\, x_4$, $dd^4 = g3 = a.b.c.d$

a, b, c, d dört boyutlu birinci göreceli uzayda, noktanın sanal koordinatlarıdır. g3.dört boyutlu birinci göreceli uzayın sanal koordinatlarında, bir noktanın başlangıca uzaklık formülüdür.

Trigonometrik İşlemler

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{f}(\alpha+\beta)} &= [\mathbf{1}S_1(\alpha) + \mathbf{f}S_2(\alpha) + \mathbf{g}S_3(\alpha) + \mathbf{h}S_4(\alpha)][\mathbf{1}S_1(\beta) + \mathbf{f}S_2(\beta) + \mathbf{g}S_3(\beta) + \mathbf{h}S_4(\beta)] \\
&= \mathbf{1}[S_1(\alpha)S_1(\beta) + S_2(\alpha)S_4(\beta) + S_3(\alpha)S_3(\beta) + S_4(\alpha)S_2(\beta)] + \\
&\quad \mathbf{f}[S_1(\alpha)S_2(\beta) + S_2(\alpha)S_1(\beta) + S_3(\alpha)S_4(\beta) + S_4(\alpha)S_3(\beta)] + \\
&\quad \mathbf{g}[S_1(\alpha)S_3(\beta) + S_2(\alpha)S_2(\beta) + S_3(\alpha)S_1(\beta) + S_4(\alpha)S_4(\beta)] + \\
&\quad \mathbf{h}\,[S_1(\alpha)S_4(\beta) + S_2(\alpha)S_3(\beta) + S_3(\alpha)S_2(\beta) + S_4(\alpha)S_1(\beta)]
\end{aligned}
$$

(395)
$$
\begin{aligned}
S_1(\alpha + \beta) &= S_1(\alpha)S_1(\beta) + S_2(\alpha)S_4(\beta) + S_3(\alpha)S_3(\beta) + S_4(\alpha)S_2(\beta) \\
S_2(\alpha + \beta) &= S_1(\alpha)S_2(\beta) + S_2(\alpha)S_1(\beta) + S_3(\alpha)S_4(\beta) + S_4(\alpha)S_3(\beta) \\
S_3(\alpha + \beta) &= S_1(\alpha)S_3(\beta) + S_2(\alpha)S_2(\beta) + S_3(\alpha)S_1(\beta) + S_4(\alpha)S_4(\beta) \\
S_4(\alpha + \beta) &= S_1(\alpha)S_4(\beta) + S_2(\alpha)S_3(\beta) + S_3(\alpha)S_2(\beta) + S_4(\alpha\,)S_1(\beta)
\end{aligned}
$$

Toplam formülleri bulunur. Türev Formülleri:

(396) $dS_1(\alpha)/d\alpha = S_4(\alpha)$, $dS_2(\alpha)/d\alpha = S_1(\alpha)$,

$dS_3(\alpha)/d\alpha = S_2(\alpha)$, $dS_4(\alpha)/d\alpha = S_3(\alpha)$, $\alpha = Ln[S_1(\alpha) + S_2(\alpha) + S_3(\alpha) + S_4(\alpha)]$

Örnek:

$$y^{(IV)} - y = 0$$

Diferansiyel denklemini çözünüz.

$$y = AS_1(x) + BS_2(x) + CS_3(x) + DS_4(x)$$

1'in üst karmaşık sayılardan, dördüncü kökleri ile, trigonometrik fonksiyonlar ve serileri, üstel fonksiyonlardan doğrusal toplamlarla, elde edilebilirler.

Üstel fonksiyonlarla trigonometrik oranların ilgisi :

(397) $e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4!$ ...., $e^{\mathbf{f}x} = 1 + \mathbf{f}x/1! + \mathbf{g}x^2/2! + \mathbf{h}x^3/3! + x^4/4!$ ....,

$e^{\mathbf{g}x} = 1 + \mathbf{g}x/1! + x^2/2! + \mathbf{g}x^3/3! + x^4/4!$..., $e^{\mathbf{h}x} = 1 + \mathbf{h}x/1! + \mathbf{g}x^2/2! + \mathbf{f}x^3/3! + x^4/4!$ ....,

$S_1(x) = (e^x + e^{\mathbf{f}x} + e^{\mathbf{g}x} + e^{\mathbf{h}x})/4$, $S_2(x) = (e^x + \mathbf{h}e^{\mathbf{f}x} + \mathbf{g}e^{\mathbf{g}x} + \mathbf{f}e^{\mathbf{h}x})/4$,

$S_3(x) = (e^x + \mathbf{g}e^{\mathbf{f}x} + e^{\mathbf{g}x} + \mathbf{g}e^{\mathbf{h}x})/4$, $S_4(x) = (e^x + \mathbf{f}e^{\mathbf{f}x} + \mathbf{g}e^{\mathbf{g}x} + \mathbf{h}e^{\mathbf{h}x})/4$,

$e^x = S_1(x) + S_2(x) + S_3(x) + S_4(x)$, $e^{\mathbf{f}x} = S_1(x) + \mathbf{f}S_2(x) + \mathbf{g}S_3(x) + \mathbf{h}S_4(x)$,

$e^{\mathbf{g}x} = S_1(x) + \mathbf{g}S_2(x) + S_3(x) + \mathbf{g}S_4(x)$, $e^{\mathbf{h}x} = S_1(x) + \mathbf{h}S_2(x) + \mathbf{g}S_3(x) + \mathbf{f}S_4(x)$,

eşitlikleri yazılır.

İki açının farkı: Bu problemin çözümü ancak üst karmaşık sayılarla mümkün olur. Önce verilen bir üst karmaşık sayının tersini bulalım. M(a, b, c, d), noktası ile $\bar{M}$ (x, y, z, t), noktası biri diğerinin tersi olsun. (388) işlem kurallarını göz önüne alalım.

$$(a + \mathbf{f}b + \mathbf{g}c + \mathbf{h}d)(x + \mathbf{f}y + \mathbf{g}z + \mathbf{h}t) = ax + dy + cz + bt + \mathbf{f}(bx + ay + dz + ct) + \mathbf{g}(cx + by + az + dt) + \mathbf{h}(dx + cy + bz + at) = 1$$

Bu sonucun 1 olması için, birinci (gerçel) bileşen 1, diğerleri sıfır olmalıdır. Dört bilinmeyenli dört denklem çözülecektir. Katsayılar determinantı $\Delta = s^4$ olup, (391) ile verilen görel uzunluktur. Katsayılar determinantı ve minörler sıra ile,

$$\Delta = s^4 = a^4 - b^4 + c^4 - d^4 + 4(-a^2bd + ab^2c - bc^2d + acd^2) + 2(-a^2c^2 + b^2d^2)$$

$$\Delta x = a^3 - 2abd + cd^2 + b^2c - ac^2, \qquad \Delta y = -(a^2b - b^2d + d^3 - 2acd + bc^2)$$

$$\Delta z = ab^2 - 2bcd + ad^2 - a^2c + c^3, \qquad \Delta t = -(b^3 - 2abc + a^2d + c^2d - bd^2)$$

$$x = \Delta x/\Delta, \qquad y = \Delta y/\Delta, \qquad z = \Delta z/\Delta, \qquad t = \Delta t/\Delta$$

bulunur. β dört boyutlu açısal argümanının üst karmaşık tersi,

$$\mathbf{OB} = e^{\mathbf{f}\beta} = \mathbf{1}S_1(\beta) + \mathbf{f}S_2(\beta) + \mathbf{g}S_3(\beta) + \mathbf{h}S_4(\beta), \qquad \bar{\mathbf{OB}} = \mathbf{1}x(\beta) + \mathbf{f}y(\beta) + \mathbf{g}z(\beta) + \mathbf{h}t(\beta)$$

olsun.

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{f}(\alpha-\beta)} &= [\mathbf{1}S_1(\alpha) + \mathbf{f}S_2(\alpha) + \mathbf{g}S_3(\alpha) + \mathbf{h}S_4(\alpha)][\mathbf{1}x(\beta) + \mathbf{f}y(\beta) + \mathbf{g}z(\beta) + \mathbf{h}t(\beta)] \\ &= \mathbf{1}[S_1(\alpha)\,x(\beta) + S_2(\alpha)\,t(\beta) + S_3(\alpha)\,z(\beta) + S_4(\alpha)\,y(\beta)] + \\ &\quad \mathbf{f}[S_1(\alpha)\,y(\beta) + S_2(\alpha)\,x(\beta) + S_3(\alpha)\,t(\beta) + S_4(\alpha)\,z(\beta)] + \\ &\quad \mathbf{g}[S_1(\alpha)\,z(\beta) + S_2(\alpha)\,y(\beta) + S_3(\alpha)\,x(\beta) + S_4(\alpha)\,t(\beta)] + \\ &\quad \mathbf{h}[S_1(\alpha)\,t(\beta) + S_2(\alpha)\,z(\beta) + S_3(\alpha)\,y(\beta) + S_4(\alpha)\,x(\beta)] \end{aligned}$$

(398)
$$\begin{aligned} S_1(\alpha-\beta) &= S_1(\alpha)\,x(\beta) + S_2(\alpha)\,t(\beta) + S_3(\alpha)\,z(\beta) + S_4(\alpha)\,y(\beta) \\ S_2(\alpha-\beta) &= S_1(\alpha)\,y(\beta) + S_2(\alpha)\,x(\beta) + S_3(\alpha)\,t(\beta) + S_4(\alpha)\,z(\beta) \\ S_3(\alpha-\beta) &= S_1(\alpha)\,z(\beta) + S_2(\alpha)\,y(\beta) + S_3(\alpha)\,x(\beta) + S_4(\alpha)\,t(\beta) \\ S_4(\alpha-\beta) &= S_1(\alpha)\,t(\beta) + S_2(\alpha)\,z(\beta) + S_3(\alpha)\,y(\beta) + S_4(\alpha)\,x(\beta) \end{aligned}$$

formülleri bulunur. Açıların toplam ve fark formülleri, işlemlerin doğru sonuçlar verip, vermediğini anlamak için, denetimi kolaydır.

Dört Boyutlu Uzayda Çok Değişkenli Hiperbolik Trigonometri

Dört boyulu uzayın sonsuzundaki üst düzlemde, bir nokta, üç parametre ile belirlenir. Bu noktayı dört boyutlu uzayın başlangıcına birleştiren doğrunun doğrultu bileşenleri, bu noktanın dört barisantrik koordinatı olur. Sonsuzdaki uzayda alınan üç parametre α, β, γ olsunlar.

(399) $\mathbf{OM} = \rho\, e^{\mathbf{f}\alpha + \mathbf{g}\beta + \mathbf{h}\gamma} = \rho[S_1(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{f}S_2(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{g}\,S_3(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{h}S_4(\alpha,\beta,\gamma)]$,

$e^{\mathbf{f}\alpha + \mathbf{g}\beta + \mathbf{h}\gamma} = (e^{\mathbf{f}\alpha})(e^{\mathbf{g}\beta})(e^{\mathbf{h}\gamma}) = [S_1(\alpha) + \mathbf{f}\,S_2(\alpha) + \mathbf{g}\,S_3(\alpha) + \mathbf{h}\,S_4(\alpha)].[\mathrm{Cos}(\beta) + \mathbf{g}\,\mathrm{Sin}(\beta)]$ **.**
$[S_1(\gamma) + \mathbf{f}\,S_2(\gamma) + \mathbf{g}\,S_3(\gamma) + \mathbf{h}\,S_4(\gamma)] = [S_1(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta)S_1(\gamma) + S_2(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_4(\gamma) \ldots\ ] +$
$\mathbf{f}[S_1(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta)S_2(\gamma) + S_2(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_1(\gamma) \ldots.\ ] + \mathbf{g}[S_1(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)S_1(\gamma) + S_2(\alpha)\mathrm{Sin}(\beta)S_4(\gamma) \ldots\ ] +$
$\mathbf{h}[S_3(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)\,S_4(\gamma) + S_2(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)\,S_1(\gamma) \ldots.\ ]$

Sin(β) ve Cos(β) lar yerine (394) den değerleri konulacaktır.

$$\mathrm{Cos}(\beta) = S_1(\beta) - S_3(\beta), \qquad \mathrm{Sin}(\beta) = S_2(\beta) - S_4(\beta),$$

$$\begin{aligned} S_1(\alpha,\beta,\gamma) &= [S_1(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta)S_1(\gamma) + S_1(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)S_3(\gamma) + S_2(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_4(\gamma) + S_2(\alpha)\mathrm{Sin}(\beta)S_2(\gamma) + \\ &\quad S_3(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta)\,S_3(\gamma) + S_3(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)\,S_1(\gamma) + S_4(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_2(\gamma) + S_4(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)S_4(\gamma)], \\ S_2(\alpha,\beta,\gamma) &= S_1(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_2(\gamma) + S_1(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)S_4(\gamma) + S_2(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_1(\gamma) + S_2(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)S_3(\gamma) + \\ &\quad S_3(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_4(\gamma) + S_3(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)S_2(\gamma) + S_4(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_3(\gamma) + S_4(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)\,S_1(\gamma)], \\ S_3(\alpha,\beta,\gamma) &= [S_1(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta)S_3(\gamma) + S_1(\alpha)\mathrm{Sin}(\beta)S_1(\gamma) + S_2(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta)S_2(\gamma) + S_2(\alpha)\mathrm{Sin}(\beta)S_4(\gamma) + \\ &\quad S_3(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta)S_1(\gamma) + S_3(\alpha)\mathrm{Sin}(\beta)S_3(\gamma) + S_4(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta)\,S_4(\gamma) + S_4(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)\,S_2(\gamma)], \\ S_4(\alpha,\beta,\gamma) &= S_1(\alpha)\,\mathrm{Cos}(\beta)\,S_4(\gamma) + S_1(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)S_2(\gamma) + S_2(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_3(\gamma) + S_2(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)S_1(\gamma) + \\ &\quad S_3(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_2(\gamma) + S_3(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)S_4(\gamma) + S_4(\alpha)\mathrm{Cos}(\beta)S_1(\gamma) + S_4(\alpha)\,\mathrm{Sin}(\beta)\,S_3(\gamma)] \end{aligned}$$

Dört boyutlu uzayda bir $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ noktasının başlangıca görel uzaklığı,

$$\rho^4 = x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 - 2\,x_1^2x_3^2 - 4\,x_1^2x_2x_4 + 2\,x_2^2x_4^2 + 4\,x_2^2x_1x_3 - 4\,x_3^2x_2x_4 + 4\,x_4^2x_1x_3$$

dır. Dört boyutlu uzayın karmaşık sayısı ile bu nokta, karteziyen koordinatlarda,

OM = $\rho\, e^{\mathbf{f}\alpha + \mathbf{g}\beta + \mathbf{h}\gamma} = \rho[\mathbf{1}S_1(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{f}S_2(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{g}S_3(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{h}S_4(\alpha,\beta,\gamma)]$
vektörü ile gösterilecektir.

İkinci Üst Karmaşık Sayıların Kuvvet ve Kök İşlemleri

Önce vektörlerin işlemlerini yapalım.

(400) $\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{f}a_2 + \mathbf{g}a_3 + \mathbf{h}a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{f}b_2 + \mathbf{g}b_3 + \mathbf{h}b_4$

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = a_1 \pm b_1 + \mathbf{f}(a_2 \pm b_2) + \mathbf{g}(a_3 \pm b_3) + \mathbf{h}(a_4 \pm b_4)$$
$$\mathbf{W} = \mathbf{A}.\mathbf{B} = (a_1 + \mathbf{f}a_2 + \mathbf{g}a_3 + \mathbf{h}a_4)\,(b_1 + \mathbf{f}b_2 + \mathbf{g}b_3 + \mathbf{h}b_4\,)$$

(401) $w_1 = a_1b_1 + a_2b_4 + a_3b_3 + a_4b_2$

$$w_2 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3$$
$$w_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_4$$
$$w_4 = a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1$$
$$\mathbf{w} = w_1 + \mathbf{f}w_2 + \mathbf{g}w_3 + \mathbf{h}w_4$$

Bölüm işlemi için, önce bölenin tersini hesaplayalım. Çarpım tablosundan,

$\mathbf{a} = 1/\mathbf{b}$, $\mathbf{ab} = 1$, $w_1 = a_1b_1 + a_2b_4 + a_3b_3 + a_4b_2$, $w_2 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3$
$w_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_4$, $w_4 = a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1$

yazılır. **a** bilinmeyen ve **b** bilinen olarak alınırsa, dört bilinmeyenli, dört denklemin çözümü için,

$$w_1 =1, \qquad w_2 = 0, \qquad w_3 = 0, \qquad w_4 = 0$$

olarak alınmalıdır. Katsayılar determinantı ve minörleri,

$\Delta a_1 = b_1^3 - 2b_1b_2b_4 + b_4^2b_3 + b_2^2b_3 - b_1b_3^2$, $\Delta a_2 = - b_1^2b_2 + b_2^2b_4 - b_4^3 - 2b_1b_3b_4 + b_2b_3^2$,
$\Delta a_3 = b_1b_2^2 - 2b_2b_3b_4 + b_1b_4^2 - b_1^2b_3 + b_3^3$, $\Delta a_4 = - b_2^3 + 2b_1b_2b_3 + b_1^2b_4 + b_3^2b_4 - b_2b_4^2$,

(402) $\Delta = b_1\Delta a_1 + b_4\Delta a_2 + b_3\Delta a_3 + b_2\Delta a_4$,

$\Delta = s^4 = b_1^4 - b_2^4 + b_3^4 - b_4^4 + 4(- b_1^2b_2b_4 + b_1b_2^2b_3 - b_2b_3^2b_4 + b_1b_3b_4^2) + 2(- b_1^2b_3^2 + b_2^2b_4^2)$

olarak bulunur.

$$\mathbf{a} = 1/\mathbf{b} = (\Delta a_1 + \mathbf{f}\Delta a_2 + \mathbf{g}\Delta a_3 + \mathbf{h}\Delta a_4)/\Delta\,,$$
$$\mathbf{c}/\mathbf{b} = (c_1 + \mathbf{f}c_2 + \mathbf{g}c_3 + \mathbf{h}c_4)(\Delta a_1 + \mathbf{f}\Delta a_2 + \mathbf{g}\Delta a_3 + \mathbf{h}\Delta a_4)/\Delta$$

Kuvvet Teoremi

$$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{f}a_2 + \mathbf{g}a_3 + \mathbf{h}a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{f}b_2 + \mathbf{g}b_3 + \mathbf{h}b_4, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^2$$

Kök işlemi için, **A** bilinen, **B** bilinmeyen alınır. (401) çarpım formülünden, n = 2 için,

$a_1 = b_1^2 + 2b_2b_4 + b_3^2$, $a_2 = 2b_1b_2 + 2b_3b_4$, $a_3 = 2b_1b_3 + b_2^2 + b_4^2$, $a_4 = 2b_1b_4 + 2b_2b_3$
$a_1 - a_3 + \mathbf{i}(a_2 - a_4) = [b_1 - b_3 + \mathbf{i}(b_2 - b_4)]^2$, $a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4) =$, $[b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4)]^2$

yazılır. İkinci tarafın parantezleri açılır ve a_i lerin değerleri yerlerine konulursa, eşitliklerin sağlandıkları görülür. Kök işlemi için a_i ler bilinen, b_i ler bilinmeyen alınır.

$b_1 - b_3 + \mathbf{i}(b_2 - b_4) = [a_1 - a_3 + \mathbf{i}(a_2 - a_4)]^{1/2}$, $b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4) = [a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4)]^{1/2}$

İkinci yanın, Moivre formülü ile kare kökü alınır, gerçel ve sanal kısımlar ayrı, ayrı eşitlenerek, dört bilinmeyenli dört denklemden b_i ler çözülür. Benzer işlemler üçüncü ve dördüncü kökler için de yapılır.

$$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{f}a_2 + \mathbf{g}a_3 + \mathbf{h}a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{f}b_2 + \mathbf{g}b_3 + \mathbf{h}b_4, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^3$$

$a_1 = b_1^3 - 6b_1b_2b_4 - 3b_1b_3^2 + 3b_3b_4^2 - 3b_2^2b_3$, $a_2 = 3b_1^2b_2 - 6b_1b_3b_4 - 3b_2b_3^2 - 3b_2^2b_4 + b_4^3$,
$a_3 = 3b_1^2b_3 + 3b_1b_2^2 - 6b_2b_3b_4 - 3b_1b_4^2 - b_3^3$, $a_4 = 3b_1^2b_4 - 3b_2b_4^2 - 3b_3^2b_4 + 6b_1b_2b_3 + b_2^3$
$a_1 - a_3 + \mathbf{i}(a_2 - a_4) = [b_1 - b_3 + \mathbf{i}(b_2 - b_4)]^3$, $a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4) = [b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4)]^3$

B'nin küpü alınır, a_i lerin değerleri yerlerine konulursa, bu eşitliklerin sağlandıkları görülür. Kök işlemi için, a_i'ler bilinen, b_i'ler bilinmeyen olarak alınır.

$b_1 - b_3 + \mathbf{i}(b_2 - b_4) = [a_1 - a_3 + \mathbf{i}(a_2 - a_4)]^{1/3}$, $b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4) = [a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4)]^{1/3}$

İkinci yanın, Moivre formülü ile kare kökü alınır, gerçel ve sanal kısımlar ayrı, ayrı eşitlenerek, dört bilinmeyenli dört denklemden b_i'ler çözülür.

$$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{f}a_2 + \mathbf{g}a_3 + \mathbf{h}a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{f}b_2 + \mathbf{g}b_3 + \mathbf{h}b_4, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^4$$

$a_1 = b_1^4 - 12b_1^2b_2b_4 - 6b_1^2b_3^2 + 12b_1b_3b_4^2 - 12b_1b_2^2b_3 + 12b_2b_3^2b_4 + 6b_2^2b_4^2 - b_2^4 + b_3^4 - b_4^4$,
$a_2 = 4b_1^3b_2 - 12b_1b_2^2b_4 - 12b_1b_2b_3^2 + 12b_2b_3b_4^2 - 4b_2^3b_3 - 12b_1^2b_3b_4 + 4b_1b_4^3 + 4b_3^3b_4$
$a_3 = 4b_1^3b_3 - 24b_1b_2b_3b_4 - 4b_1b_3^3 + 6b_3^2\,b_4^2 - 6b_2^2b_3^2 + 6b_1^2b_2^2 - 4b_2^3b_4 + 4b_2b_4^3 - 6b_1^2b_4^2$

$a_4 = 4b_1^3b_4 – 12b_1b_2b_4^2 – 12b_1b_3^2b_4 + 4b_3b_4^3 – 12b_2^2b_3b_4 + 12b_1^2b_2b_3 – 4b_2b_3^3 + 4b_1b_2^3$

$a_1 – a_3 + \mathbf{i}(a_2 – a_4) = [b_1 – b_3 + \mathbf{i}(b_2 – b_4)]^4$, $a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + ia_4) = [b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4)]^4$

B'nin dördüncü kuvveti alınır, a_i'lerin değerleri yerlerine konulursa, bu eşitliklerin sağlandıkları görülür. Kök işlemi için a_i'ler bilinen, b_i'ler bilinmeyen alınır.

$b_1 – b_3 + \mathbf{i}(b_2 – b_4) = [a_1 – a_3 + \mathbf{i}(a_2 – a_4)]^{1/4}$, $b_1 + b_3 + \mathbf{g}(b_2 + b_4) = [a_1 + a_3 + \mathbf{g}(a_2 + a_4)]^{1/4}$

İkinci yanın, Moivre formülü ile kare kökü alınır, gerçel ve sanal kısımlar ayrı, ayrı eşitlenerek, dört bilinmeyenli dört denklemden b_i'ler çözülür.

Üst karmaşık sayıların köklerinin çok değerliliği, trigonometrik oranların vektörlerinde de vardır, aynı sayılarla çok değerlilik sağlanır.

Kare köklerin çok değerliliği,

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = – (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2 ,$$

Küp köklerin çok değerliliği,

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)*(– 3 + \sqrt{3}\, i)/8, \quad \lambda_3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)*(– 3 – \sqrt{3}\, i)/8,$$

Dördüncü köklerin çok değerliliği,

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = – (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2,$$

$$\lambda_3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)*(– 1+ i)/4, \qquad \lambda_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)*(– 1 – i)/4,$$

değerlerinin bilinen bir köke, eklenmesi ile bulunur. λ_3 ve λ_4 birinci üst karmaşık sayılarda diğer bileşenleri sıfırlamaz, fakat burada, bu kökler, bütün bileşenleri sıfırlar. Hiperbolik trigonometri de, Öklidsel değildir. İzotrop nokta çifti ile ilgili, fakat izotrop konikle ilgili değildir. İzotrop koordinatlarda olduğu gibi, ilk iki boyutu Öklidsel, diğer iki boyutu görecelidir.

İkinci üst karmaşık sayıların, kare köklerini bulan Matlab programı:

```
   f = inline('[x(1,1)*x(2,1) + x(1,2)*x(2,4) + x(1,3)*x(2,3) + x(1,4)*x(2,2)   x(1,1)*x(2,2) +
x(1,2)*x(2,1) + x(1,3)*x(2,4) + x(1,4)*x(2,3)   (x(1,1)*x(2,3) + x(1,2)*x(2,2) + x(1,3)*x(2,1)
+ x(1,4)*x(2,4)    x(1,1)*x(2,4) + x(1,2)*x(2,3) + x(1,3)*x(2,2) + x(1,4)*x(2,1)]');
b = [-4+2*i   –2 –9,i   –5 + 3*i   7 –12*i];  v = b(1) – b(3);  w = b(2) – b(4);  c3 = b(1) + b(3);
c4 = b(2) + b(4);   i = sqrt(–1);  r1 = (v^2 + w^2)^(1/4); r2 = (c3^2 – c4^2)^(1/4);
if  v == 0  &  w>0  p =  pi/2;   elseif  v == 0  &  w< 0  p = – pi/2; else  p = atan(w/v);   end
 if  c3 == 0  &  c4 > 0  d = i*pi/2; elseif  c3 == 0  & c4 <0  d = – pi/2; else  d = atanh(c4/c3);
end
n1= [1  1  i  i];  n2 = [0  1  0  1]; pp=p; for  k =1:4   p=pp;p = p + n2(k)*pi*i;
s(1) = r1*cos(p/2); s(2) = r1*sin(p/2); s(3) = r2*cosh(d/2); s(4) = r2*sinh(d/2); t(1) = (s(1) +
s(3))/2; t(2) = (s(2) + s(4))/2; t(3) = (–s(1) + s(3))/2; t(4) = (–s(2) + s(4))/2;  t = t*n1(k); x =
[t';t']; u = f(x);  g1 = –(t(1) + t(2) + t(3) + t(4))/2; t1 = (t + g1); x = [t1';t1'];u1= f(x);
y = (b – u); m(1) = abs(y(1));  m(2) = abs(y(2)); m(3) = abs(y(3));  m(4) = abs(y(4));
mt = 1.0e–003; if  m(1) < mt  &  m(2) < mt  &  m(3) < mt  & m(4) < mt  break
end
   end
t, u, t1, u1, b, k,
```

İlk üç satır (401) formülü ile verilen çarpım işlemidir. Programda hepsi bir satıra yazılmalıdır. Ardından gelen işlemler, arctg ve agth fonksiyonlarının argümanlarının alacağı değerlerin belirlenmesidir. n1 ve n2 dizilerinin terimleri, kümeleri belirler. s ve t dizileri kök işlemlerinde açıklanan Moivre formülünün uygulaması ve bulunan kök dizisidir. t1 çok değerli özeliğinin getirdiği bir köktür.

İkinci üst karmaşık sayıların, küp köklerini bulan Matlab programı:

```
   f = inline('[x(1,1)*x(2,1) + x(1,2)*x(2,4) + x(1,3)*x(2,3) + x(1,4)*x(2,2)   x(1,1)*x(2,2) +
x(1,2)*x(2,1) + x(1,3)*x(2,4) + x(1,4)*x(2,3)   (x(1,1)*x(2,3) + x(1,2)*x(2,2) + x(1,3)*x(2,1)
+ x(1,4)*x(2,4)    x(1,1)*x(2,4) + x(1,2)*x(2,3) + x(1,3)*x(2,2) + x(1,4)*x(2,1)]');
b = [-4+2*i   –2 –9,i   –5 + 3*i   7 –12*i];  v = b(1) – b(3);  w = b(2) – b(4);  c3 = b(1) + b(3);
c4 = b(2) + b(4);   i = sqrt(–1);  r1 = (v^2 + w^2)^(1/6); r2 = (c3^2 – c4^2)^(1/6
```

```
if  v == 0  &  w>0  p =  pi/2;   elseif  v == 0  &  w< 0  p = – pi/2; else  p = atan(w/v);   end
 if  c3 == 0  &  c4 > 0  d = i*pi/2; elseif  c3 == 0  & c4 <0  d = – pi/2; else  d = atanh(c4/c3);
end
n1= [1  1  – 1  –1];  n2 = [0  1  0  1]; pp=p;for  k =1:4   p=pp; p = p + n2(k)*pi*i; s(1) =
r1*cos(p/3);  s(2) = r1*sin(p/3); s(3) = r2*cosh(d/3); s(4) = r2*sinh(d/3); t(1) = (s(1) + s(3))/2;
t(2) = (s(2) + s(4))/2; t(3) = (–s(1) + s(3))/2; t(4) = (–s(2) + s(4))/2;  t = t*n1(k); x = [t';t'];
u = f(x); x = [t'; u];  u = f(x);  g = (t(1) + t(2) + t(3) + t(4))/8; t1 = (t + g*(–3 + sqrt(3)*i);
 x = [t1';t1'];u1= f(x); x = [t1'; u1];  u1 = f(x); t2 = (t – g*(–3 – sqrt(3)*i); x = [t2'; t2');
u2 = f(x);  x = [t2';u2];  u2 = f(x);   y = (b – u);
m(1) = abs(y(1));  m(2) = abs(y(2)); m(3) = abs(y(3));  m(4) = abs(y(4));
mt = 1.0e–003; if  m(1) < mt  &  m(2) < mt  &  m(3) < mt  & m(4) < mt  break
end
   end
t, u, t1, u1, t2, u2, b, k,
```

Küp köklerin bulunmasında değişik bir durum, sanal kök için i gelen yere, burada – 1 gelmiştir. Diğer taraflar aynıdır.

İkinci üst karmaşık sayıların, dördüncü köklerini bulan Matlab programı:

```
   f = inline('[x(1,1)*x(2,1) + x(1,2)*x(2,4) + x(1,3)*x(2,3) + x(1,4)*x(2,2)   x(1,1)*x(2,2) +
x(1,2)*x(2,1) + x(1,3)*x(2,4) + x(1,4)*x(2,3)   (x(1,1)*x(2,3) + x(1,2)*x(2,2) + x(1,3)*x(2,1)
+ x(1,4)*x(2,4)    x(1,1)*x(2,4) + x(1,2)*x(2,3) + x(1,3)*x(2,2) + x(1,4)*x(2,1)]');
b = [-4+2*i   –2 –9,i   –5 + 3*i   7 –12*i];  v = b(1) – b(3);  w = b(2) – b(4);  c3 = b(1) + b(3);
c4 = b(2) + b(4);   i = sqrt(–1);  j = (1 + i)/sqrt(2);  r1 = (v^2 + w^2)^(1/8);
r2 = (c3^2 – c4^2)^(1/8;   if  v == 0  &  w>0  p =  pi/2;   elseif  v == 0  &  w< 0  p = – pi/2;
else  p = atan(w/v);   end
 if  c3 == 0  &  c4 > 0  d = i*pi/2; elseif  c3 == 0  & c4 <0  d = – pi/2; else  d = atanh(c4/c3);
end
n1= [1  j  1  j];   n2 = [0  1  0  1]; pp = p; for  k =1:4  p = pp; p = p + n2(k)*pi*i; s(1) =
r1*cos(p/4);  s(2) = r1*sin(p/4); s(3) = r2*cosh(d/4); s(4) = r2*sinh(d/4); t(1) = (s(1) + s(3))/2;
t(2) = (s(2) + s(4))/2; t(3) = (–s(1) + s(3))/2; t(4) = (–s(2) + s(4))/2;  t = t*n1(k); x = [t';t'];
u = f(x); x = [u; u];  u = f(x);  g = (t(1) + t(2) + t(3) + t(4))/8; t1 = (t – g/2);
 x = [t1';t1'];u1= f(x); x = [u1; u1];  u1 = f(x); t2 = (t + g*(–1 + i)/4); x = [t2'; t2');
u2 = f(x);  x = [u2;u2];  u2 = f(x);   t3 = (t + g*(–1 – i)/4);  x = [t3'; t3']; u3 = f(x);  x[u3; u3];
u3 = f(x);  y = (b – u); m(1) = abs(y(1));  m(2) = abs(y(2)); m(3) = abs(y(3));
m(4) = abs(y(4));  mt = 1.0e–003; if  m(1) < mt  &  m(2) < mt  &  m(3) < mt  & m(4) < mt
break
end
   end
t, u, t1, u1, t2, u2, t3, u3, b, k,
```

Dördüncü kök için de söylenecek değişik durum, yalnız i gelen yere j, 1'in sekizinci kökü gelmiştir.

IX
DÖRT BOYUTLU UZAYDA DAİRESEL TRİGONOMETRİ ve BİRİNCİ ÜST KARMAŞIK SAYILAR

Dört Boyutlu Uzayda Dairesel Trigonometri

$$(403)\qquad A = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad C = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Matrisleri I birim matrisin sekizinci kökleridirler. $A^2 = C$, $B^2 = -C$, $A^8 = B^8 = C^4 = I$ dir. Bu matrisler, dördüncü mertebe devresel matrisler gurubunda, birim matris ve kuvvetleri ile birlikte, devresel alt gurubu oluştururlar. (323) den, –1'in dördüncü kökleri,

(404) $\mathbf{v} = 1/(2\sqrt{2})[(2i-1) + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3] = \mathbf{p}$, $\mathbf{v}^2 = i/2(-1 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) = \mathbf{q}$,
$\mathbf{v}^3 = -1/(2\sqrt{2})[(-2i-1) + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3] = \mathbf{r}$, $\mathbf{v}^4 = -1$, $\mathbf{v}^5 = -\mathbf{p}$, $\mathbf{v}^6 = -\mathbf{q}$, $\mathbf{v}^7 = -\mathbf{r}$,

$$\mathbf{v}^8 = 1,\quad \mathbf{p}^2 = \mathbf{q},\quad \mathbf{q}^2 = -1,\quad \mathbf{p}^3 = \mathbf{r},\quad \mathbf{r}^2 = -\mathbf{q},\quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{p}$$

dir. 1'in sekizinci kökleri içinde uygun olanlar alınmış ve izotrop noktalar oluşturulmuştur.Matrislerin değişmez noktaları, izotrop üst düzlemler, izotrop üst kuartik yüzey ve birim üst kuartik yüzey için, yukarıdaki işlemler yinelenirse,

(405) $J_1(0, 1, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$, $J_2(0, 1, \mathbf{r}, -\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $J_3(0, 1, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{r})$, $J_4(0, 1, -\mathbf{r}, -\mathbf{q}, -\mathbf{p})$

$$P_1 = x_1 + \mathbf{p}\,x_2 + \mathbf{q}\,x_3 + \mathbf{r}\,x_4 = 0,\qquad P_2 = x_1 + \mathbf{r}\,x_2 - \mathbf{q}\,x_3 + \mathbf{p}\,x_4 = 0$$
$$P_3 = x_1 - \mathbf{p}\,x_2 + \mathbf{q}\,x_3 - \mathbf{r}\,x_4 = 0,\qquad P_4 = x_1 - \mathbf{r}\,x_2 - \mathbf{q}\,x_3 - \mathbf{p}\,x_4 = 0$$
$$P_1P_3 = x_1^2 - q\,x_2^2 - x_3^2 + q\,x_4^2 + 2\,q\,x_1x_3 + 2\,x_2x_4$$
$$P_2P_4 = x_1^2 + q\,x_2^2 - x_3^2 - q\,x_4^2 - 2\,q\,x_1x_3 + 2\,x_2x_4$$
$$P_1P_2P_3P_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 4\,x_1^2x_3^2 + 4\,x_2^2x_4^2 - 2\,x_1^2x_3^2 + 4\,x_1^2x_2x_4 - 2\,x_2^2x_4^2 + $$
$$- 4\,x_2^2x_1x_3 - 4\,x_3^2x_2x_4 + 4\,x_4^2x_1x_3 = 0$$
$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2\,x_1^2x_3^2 + 4\,x_1^2x_2x_4 + 2\,x_2^2x_4^2$$
$$- 4\,x_2^2x_1x_3 - 4\,x_3^2x_2x_4 + 4\,x_4^2x_1x_3 = 1$$

formülleri bulunur.

(406) $e^{\mathbf{p}\,\alpha} = 1 + \mathbf{p}\alpha/1! + \mathbf{q}\alpha^2/2! + \mathbf{r}\alpha^3/3! - \alpha^4/4! - \mathbf{p}\alpha^5/5! - \mathbf{q}\alpha^6/6! - \mathbf{r}\alpha^7/7! + \alpha^8/8!$

Serisinden elde edilen dört bileşen, (405) de verilen, birim üst kuartik yüzeyin denklemini sağlarlar. Bu işlemde, üst karmaşık sayıların kullanılması zorunlu değildir. Karmaşık sayıların 1'in sekizinci köklerinden ilk dördü, doğrusal bağımsız, diğerleri bunların ters işaretlisidirler. Karmaşık sayılarda sekizinci kökler, dört bağımsız bileşene sahiptirler.

(407) $e^{\mathbf{p}\,x} = 1 + \mathbf{p}x/1! + \mathbf{q}x^2/2! + \mathbf{r}x^3/3! - x^4/4! - \mathbf{p}x^5/5! - \mathbf{q}x^6/6! - \mathbf{r}x^7/7! + x^8/8!$

$$U_1(x) = 1 - x^4/4! + x^8/8! - x^{12}/12! \ldots\quad + (-1)^n x^{4n}/(4n)!$$
$$U_2(x) = x/1! - x^5/5! + x^9/9! - x^{13}/13! \ldots\quad + (-1)^n x^{(4n+1)}/(4n+1)!$$
$$U_3(x) = x^2/2! - x^6/6! + x^{10}/10! - x^{14}/14! \ldots\quad + (-1)^n x^{(4n+2)}/(4n+2)!$$
$$U_4(x) = x^3/3! - x^7/7! + x^{11}/11! - x^{15}/15! \ldots\quad + (-1)^n x^{(4n+3)}/(4n+3)!$$

Alterne kuvvet serileri ile tanımlanan fonksiyonlara, dört boyutlu uzayın **dairesel trigonometrik** fonksiyonları denilecektir.

(408) $$d^4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2\,x_1^2x_3^2 + 2\,x_2^2x_4^2 + 4\,x_1^2x_2x_4 + $$
$$- 4\,x_2^2x_1x_3 - 4\,x_3^2x_2x_4 + 4\,x_4^2x_1x_3$$

göreceli uzunluk formülüdür. $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ dört boyutlu uzayın bir noktası olmak üzere,

$$U_1(x) = x_1/d,\qquad U_2(x) = x_2/d,\qquad U_3(x) = x_3/d,\qquad U_4(x) = x_4/d$$

ifadeleri ile tanımlanan fonksiyonlara, dört boyutlu uzayın **dairesel trigonometrik** oranları ve

$$\mathbf{a} = x_1 + \mathbf{p}\,x_2 + \mathbf{q}\,x_3 + \mathbf{r}\,x_4,$$

sayısına da, dört boyutlu uzayın **birinci üst karmaşık sayısı** denilecektir. Dairesel trigonometrik oranlarla koordinatları verilen bir nokta, (408) ile verilen birim kuartik üst yüzey üzerinde bulunur.

Alterne serilerden türev alarak,

(409) $dU_1(x)/dx = -U_4(x)$, $dU_2(x)/dx = U_1(x)$, $dU_3(x)/dx = U_2(x)$, $dU_4(x)/dx = U_3(x)$

formülleri bulunur.

Örnek:

$$y^{(iv)} + y = 0$$

Diferansiyel denklemini çözünüz.

$$y = AU_1(x) + BU_2(x) + CU_3(x) + DU_4(x)$$

Üstel fonksiyonların trigonometrik oranlarla ilgisi:

Alterne serilerin Matlab programı ile bulunması:

```
x = 4; t(1) = 1;  t(2) = x; t(3) = x^2/2; t(4) = x^3/6; for i = 1:30  b = x^i/faktorial(i);
```

p = 4*i; q = (–1)^i; t(1) = t(1) + q*x^p/factorial(p); t(2) = t(2) + q*x^(p+1)/factorial(p + 1); t(3) = t(3) + q*x^(p + 2)/factorial(p + 2); t(4) = t(4) + q*x^(p+ 3)/factorial(p + 3);
t, d4 = t(1)^4 + t(2)^4 + t(3)^4 + t(3)^4 + 2*t(1)^2*t(3)^2 + 4*t(1)^2*t(2)*t(4) + 2*t(2)^2*t(4)^2 – 4*t(2)^2*t(1)*t(3) – 4*t(3)^2*t(2)*t(4) + 4*t(4)^2*t(1)*t(3) ,
d4 =1 olduğu görülmektedir. $d4 = d^4$,ifadesindeki kuartik üst yüzey, dört boyutlu ikinci göreceli uzayın kuartik birim üst yüzeyidir. Dört boyutlu ikinci göreceli uzayın izotrop noktalarına dayalı dörtyüzlü, bu uzayın sanal koordinat sistemidir. Bu uzayda tanımlanan,

$$\mathbf{a} = x_1 + \mathbf{p}\, x_2 + \mathbf{q}\, x_3 + \mathbf{r}\, x_4, \qquad \mathbf{b} = x_1 + \mathbf{r}\, x_2 - \mathbf{q}\, x_3 + \mathbf{p}\, x_4,$$
$$\mathbf{c} = x_1 - \mathbf{p}\, x_2 + \mathbf{q}\, x_3 - \mathbf{r}\, x_4, \qquad \mathbf{d} = x_1 - \mathbf{r}\, x_2 - \mathbf{q}\, x_3 - \mathbf{p}\, x_4,$$

ifadelerinde x_i değişkenleri, noktanın dört boyutlu ikinci göreceli uzayda, karteziyen koordinatları ve **a, b, c, d** değerleri de, noktanın sanal koordinatlarıdır. $d4 = d^4 = \mathbf{a.b.c.d}$ formülü, bu noktanın başlangıca uzaklık formülüdür. (405) formüllerinde görülür.

Seri İşlemleri

(410) $e^{\mathbf{p}x} = 1 + \mathbf{p}x/1! + \mathbf{q}x^2/2! + \mathbf{r}x^3/3! - x^4/4! - \mathbf{p}\, x^5/5! - \mathbf{q}x^6/6! - \mathbf{r}x^7/7! + x^8/8!...$

$e^{\mathbf{r}\,x} = 1 + \mathbf{r}x/1! - \mathbf{q}x^2/2! + \mathbf{p}x^3/3! - x^4/4! - \mathbf{r}x^5/5! + \mathbf{r}x^6/6! - \mathbf{p}x^7/7! + x^8/8!...$

$e^{-\mathbf{p}x} = 1 - \mathbf{p}x/1! + \mathbf{q}x^2/2! - \mathbf{r}x^3/3! - x^4/4! + \mathbf{p}x^5/5! - \mathbf{q}x^6/6! + \mathbf{r}x^7/7! + x^8/8!....$

$e^{-\mathbf{r}\,x} = 1 - \mathbf{r}x/1! - \mathbf{q}x^2/2! - \mathbf{p}x^3/3! - x^4/4! + \mathbf{r}x^5/5! + \mathbf{q}x^6/6! + \mathbf{p}x^7/7! + x^8/8!....$

serilerinden çeşitli doğrusal toplamlar alarak,

(411) $U_1(x) = (e^{\mathbf{p}\,x} + e^{\mathbf{r}\,x} + e^{-\mathbf{p}\,x} + e^{-\mathbf{r}\,x})/4, \qquad U_2(x) = -(\mathbf{r}e^{\mathbf{p}\,x} + \mathbf{p}e^{\mathbf{r}\,x} - \mathbf{r}e^{-\mathbf{p}\,x} - \mathbf{p}e^{-\mathbf{r}\,x})/4,$

$U_3(x) = -(\mathbf{q}e^{\mathbf{p}\,x} - \mathbf{q}e^{\mathbf{r}\,x} + \mathbf{q}e^{-\mathbf{p}\,x} - \mathbf{q}e^{-\mathbf{h}\,x})/4, \qquad U_4(x) = -(\mathbf{p}e^{\mathbf{p}\,x} + \mathbf{r}e^{\mathbf{r}\,x} - \mathbf{p}e^{-\mathbf{p}\,x} - \mathbf{r}e^{-\mathbf{r}\,x})/4$

formülleri elde edilir.

Açıların toplam ve fark formülleri:

(412) $e^{\mathbf{p}\,x} = U_1(x) + \mathbf{p}U_2(x) + \mathbf{q}U_3(x) + \mathbf{r}U_4(x), \qquad e^{\mathbf{r}\,x} = U_1(x) + \mathbf{r}U_2(x) - \mathbf{q}_3(x) + \mathbf{p}U_4(x),$

$e^{-\mathbf{p}\,x} = U_1(x) - \mathbf{p}U_2(x) + \mathbf{q}U_3(x) - \mathbf{r}U_4(x), \qquad e^{-\mathbf{r}\,x} = U_1(x) - \mathbf{r}U_2(x) - \mathbf{q}U_3(x) - \mathbf{p}U_4(x),$

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{p}\,(\alpha+\beta)} &= [U_1(\alpha) + \mathbf{p}U_2(\alpha) + \mathbf{q}U_3(\alpha) + \mathbf{r}U_4(\alpha)][U_1(\beta) + \mathbf{p}U_2(\beta) + \mathbf{q}U_3(\beta) + \mathbf{r}U_4(\beta)]\\
&= [U_1(\alpha)U_1(\beta) - U_2(\alpha)U_4(\beta) - U_3(\alpha)U_3(\beta) - U_4(\alpha)U_2(\beta)] +\\
&\quad \mathbf{p}[U_1(\alpha)U_2(\beta) + U_2(\alpha)U_1(\beta) - U_3(\alpha)U_4(\beta) - U_4(\alpha)U_3(\beta)] +\\
&\quad \mathbf{q}[U_1(\alpha)U_3(\beta) + U_2(\alpha)U_2(\beta) + U_3(\alpha)U_1(\beta) - U_4(\alpha)U_4(\beta)] +\\
&\quad \mathbf{r}[U_1(\alpha)U_4(\beta) + U_2(\alpha)U_3(\beta) + U_3(\alpha)U_2(\beta) + U_4(\alpha)U_1(\beta)]
\end{aligned}$$

(413)
$$\begin{aligned}
U_1(\alpha+\beta) &= U_1(\alpha)U_1(\beta) - U_2(\alpha)U_4(\beta) - U_3(\alpha)U_3(\beta) - U_4(\alpha)U_2(\beta)\\
U_2(\alpha+\beta) &= U_1(\alpha)U_2(\beta) + U_2(\alpha)U_1(\beta) - U_3(\alpha)U_4(\beta) - U_4(\alpha)U_3(\beta)\\
U_3(\alpha+\beta) &= U_1(\alpha)U_3(\beta) + U_2(\alpha)U_2(\beta) + U_3(\alpha)U_1(\beta) - U_4(\alpha)U_4(\beta)\\
U_4(\alpha+\beta) &= U_1(\alpha)U_4(\beta) + U_2(\alpha)U_3(\beta) + U_3(\alpha)U_2(\beta) + U_4(\alpha)U_1(\beta)
\end{aligned}$$

(412) nin üçüncü denkleminden,

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{p}\,(\alpha-\beta)} &= [U_1(\alpha) + \mathbf{p}U_2(\alpha) + \mathbf{q}U_3(\alpha) + \mathbf{r}U_4(\alpha)][U_1(\beta) - \mathbf{p}U_2(\beta) + \mathbf{q}U_3(\beta) - \mathbf{r}U_4(\beta)]\\
&= [U_1(\alpha)U_1(\beta) + U_2(\alpha)U_4(\beta) - U_3(\alpha)U_3(\beta) + U_4(\alpha)U_2(\beta)] +\\
&\quad \mathbf{p}[- U_1(\alpha)U_2(\beta) + U_2(\alpha)U_1(\beta) + U_3(\alpha)U_4(\beta) - U_4(\alpha)U_3(\beta)] +\\
&\quad \mathbf{q}[U_1(\alpha)U_3(\beta) - U_2(\alpha)U_2(\beta) + U_3(\alpha)U_1(\beta) + U_4(\alpha)U_4(\beta)] +\\
&\quad \mathbf{r}[- U_1(\alpha)U_4(\beta) + U_2(\alpha)U_3(\beta) - U_3(\alpha)U_2(\beta) + U_4(\alpha)U_1(\beta)]
\end{aligned}$$

(414)
$$\begin{aligned}
U_1(\alpha-\beta) &= U_1(\alpha)U_1(\beta) + U_2(\alpha)U_4(\beta) - U_3(\alpha)U_3(\beta) + U_4(\alpha)U_2(\beta)\\
U_2(\alpha-\beta) &= - U_1(\alpha)U_2(\beta) + U_2(\alpha)U_1(\beta) + U_3(\alpha)U_4(\beta) - U_4(\alpha)U_3(\beta)\\
U_3(\alpha-\beta) &= U_1(\alpha)U_3(\beta) - U_2(\alpha)U_2(\beta) + U_3(\alpha)U_1(\beta) + U_4(\alpha)U_4(\beta)\\
U_4(\alpha-\beta) &= - U_1(\alpha)U_4(\beta) + U_2(\alpha)U_3(\beta) - U_3(\alpha)U_2(\beta) + U_4(\alpha)U_1(\beta)
\end{aligned}$$

formülleri bulunur.

Dört Boyutlu Uzayda Çok Değişkenli Dairesel Trigonometri

Dört boyutlu uzayın sonsuzundaki uzayında, bir nokta üç koordinat ile belirlenir. Bu koordinatlar α, β, γ açısal koordinatlar olsunlar.

(415) $\mathbf{OM} = \rho\, e^{\mathbf{p}\,\alpha + \mathbf{q}\,\beta + \mathbf{r}\,\gamma} = \rho[U_1(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{p}\, U_2(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{q}\, U_3(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{r}\, U_4(\alpha,\beta,\gamma)] =$

$e^{\mathbf{p}\alpha+\mathbf{q}\beta+\mathbf{r}\gamma} = (e^{\mathbf{p}\alpha})(e^{\mathbf{q}\beta})(e^{\mathbf{r}\gamma}) = [U_1(\alpha) + \mathbf{p}U_2(\alpha) + \mathbf{q}U_3(\alpha) + \mathbf{r}U_4(\alpha)]\,[Cos(\beta) + \mathbf{q}\,Sin(\beta)]\,.$
$[U_1(\gamma) + \mathbf{p}\,U_2(\gamma) + \mathbf{q}\,U_3(\gamma) + \mathbf{r}\,U_4(\gamma)] = [U_1(\alpha)\,Cos(\beta)U_1(\gamma) - U_2(\alpha)Cos(\beta)U_4(\gamma)\,...\,] +$
$\mathbf{f}[U_1(\alpha)\,Cos(\beta)U_2(\gamma) + U_2(\alpha)Cos(\beta)U_1(\gamma)....\,] + \mathbf{g}[U_1(\alpha)\,Sin(\beta)U_1(\gamma) - U_2(\alpha)Sin(\beta)U_4(\gamma)...\,] +$
$\mathbf{h}[-U_3(\alpha)\,Sin(\beta)\,U_4(\gamma) + U_2(\alpha)\,Sin(\beta)\,U_1(\gamma)....\,]$
Sin(β) ve Cos(β) lar yerine (321) den değerleri konulacaktır.

$$Cos(\beta) = S_1(\beta) - S_3(\beta), \qquad Sin(\beta) = S_2(\beta) - S_4(\beta)$$

$U_1(\alpha,\beta,\gamma) = [U_1(\alpha)\,Cos(\beta)U_1(\gamma) - U_1(\alpha)\,Sin(\beta)U_3(\gamma) - U_2(\alpha)Cos(\beta)U_4(\gamma) - U_2(\alpha)Sin(\beta)U_2(\gamma) -$
$U_3(\alpha)\,Cos(\beta)\,U_3(\gamma) - U_3(\alpha)\,Sin(\beta)\,U_1(\gamma) - U_4(\alpha)Cos(\beta)U_2(\gamma) + U_4(\alpha)\,Sin(\beta)U_4(\gamma)]$
$U_2(\alpha,\beta,\gamma) = U_1(\alpha)Cos(\beta)U_2(\gamma) - U_1(\alpha)\,Sin(\beta)U_4(\gamma) + U_2(\alpha)Cos(\beta)U_1(\gamma) - U_2(\alpha)\,Sin(\beta)U_3(\gamma) -$
$U_3(\alpha)Cos(\beta)U_4(\gamma - U_3(\alpha)\,Sin(\beta)U_2(\gamma) - U_4(\alpha)Cos(\beta)U_3(\gamma) - U_4(\alpha)\,Sin(\beta)U_1(\gamma)]$
$U_3(\alpha,\beta,\gamma) = [U_1(\alpha)\,Cos(\beta)U_3(\gamma) + U_1(\alpha)Sin(\beta)U_1(\gamma) + U_2(\alpha)\,Cos(\beta)U_2(\gamma) - U_2(\alpha)Sin(\beta)U_4(\gamma) +$
$U_3(\alpha)\,Cos(\beta)U_1(\gamma) - U_3(\alpha)Sin(\beta)U_3(\gamma) - U_4(\alpha)\,Cos(\beta)U_4(\gamma) - U_4(\alpha)\,Sin(\beta)U_2(\gamma)]$
$U_4(\alpha,\beta,\gamma) = U_1(\alpha)\,Cos(\beta)\,U_4(\gamma) + U_1(\alpha)\,Sin(\beta)U_2(\gamma) + U_2(\alpha)Cos(\beta)U_3(\gamma) + U_2(\alpha)Sin(\beta)U_1(\gamma) +$
$U_3(\alpha)Cos(\beta)U_2(\gamma) - U_3(\alpha)\,Sin(\beta)U_4(\gamma) + U_4(\alpha)Cos(\beta)U_1(\gamma) - U_4(\alpha)\,Sin(\beta)U_3(\gamma)]$

Dört boyutlu uzayda bir $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ noktasının başlangıca görel uzaklığı,

$$\rho^4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2\,x_1^2 x_3^2 + 4\,x_1^2 x_2 x_4 + 2\,x_2^2 x_4^2 +$$
$$-\,4\,x_2^2 x_1 x_3 - 4\,x_3^2 x_2 x_4 + 4\,x_4^2 x_1 x_3$$

olur. Dört boyutlu uzayın karmaşık sayısı ile bir nokta,

$$\mathbf{OM} = \rho\, e^{\mathbf{p}\alpha+\mathbf{q}\beta+\mathbf{r}\gamma} = \rho[\mathbf{1}U_1(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{p}U_2(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{q}U_3(\alpha,\beta,\gamma) + \mathbf{r}U_4(\alpha,\beta,\gamma)]$$

vektörü ile gösterilecektir.

Birinci Üst Karmaşık Sayıların Kuvvet ve Kök İşlemleri

Dört boyutlu uzayda, dairesel trigonometrinin birim vektörleri ile kök işlemleri, hiperbolik trigonometrinin vektörleri ile olana benzer. Önce vektörel işlemler yapalım.

(416) $\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{p}a_2 + \mathbf{q}a_3 + \mathbf{r}a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{p}b_2 + \mathbf{q}b_3 + \mathbf{r}b_4$

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = a_1 \pm b_1 + \mathbf{p}(a_2 \pm b_2) + \mathbf{q}(a_3 \pm b_3) + \mathbf{r}(a_4 \pm b_4)$$
$$\mathbf{W} = \mathbf{A.B} = (a_1 + \mathbf{p}a_2 + \mathbf{q}a_3 + \mathbf{r}a_4)\,(b_1 + \mathbf{p}b_2 + \mathbf{q}b_3 + \mathbf{r}b_4\,)$$

(417) $w_1 = a_1b_1 - a_2b_4 - a_3b_3 - a_4b_2$

$$w_2 = a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 - a_4b_3$$
$$w_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 - a_4b_4$$
$$w_4 = a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1$$
$$\mathbf{t} = t_1 + \mathbf{p}t_2 + \mathbf{q}t_3 + \mathbf{r}t_4$$

Bölüm işlemi için, önce bölenin tersini hesaplayalım. Çarpım tablosundan,

$\mathbf{a} = 1/\mathbf{b}$, $\mathbf{ab} = 1$, $t_1 = a_1b_1 - a_2b_4 - a_3b_3 - a_4b_2$, $t_2 = a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 - a_4b_3$

(418) $t_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 - a_4b_4$, $t_4 = a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1$

yazılır. **a**'yı bilinmeyen ve **b**'yi bilinen olarak alırsak, dört bilinmeyen, dört denklemin çözümü için,

$$t_1 = 1, \qquad t_2 = 0, \qquad t_3 = 0, \qquad t_4 = 0$$

olarak alınır, katsayılar determinantı ve minörleri,

$\Delta a_1 = b_1^3 + 2b_1b_2b_4 + b_4^2b_3 - b_2^2b_3 + b_1b_3^2$, $\Delta a_2 = -b_1^2b_2 - b_2^2b_4 - b_4^3 - 2b_1b_3b_4 + b_3^2b_2$,
$\Delta a_3 = b_2^2b_1 + 2b_2b_3b_4 - b_4^2b_1 - b_1^2b_3 - b_3^3$, $\Delta a_4 = -b_2^3 + 2b_1b_2b_3 - b_1^2b_4 + b_3^2b_4 - b_2b_4^2$,

(420) $\Delta = b_1\Delta a_1 - b_4\Delta a_2 - b_3\Delta a_3 - b_2\Delta a_4$,

$\Delta = s^4 = b_1^4 + b_2^4 + b_3^4 + b_4^4 + 4(\,b_1^2b_2b_4 - b_1b_2^2b_3 - b_2b_3^2b_4 + b_1b_3b_4^2) + 2(\,b_1^2b_3^2 + b^2b_4^2)$
olarak bulunur.

$$\mathbf{a} = 1/\mathbf{b} = (\Delta a_1 + \mathbf{p}\Delta a_2 + \mathbf{q}\Delta a_3 + \mathbf{r}\Delta a_4)/\Delta\,,$$
$$\mathbf{c}/\mathbf{b} = (c_1 + \mathbf{p}c_2 + \mathbf{q}c_3 + \mathbf{r}c_4)(\Delta a_1 + \mathbf{p}\Delta a_2 + \mathbf{q}\Delta a_3 + \mathbf{r}\Delta a_4)/\Delta$$

Kuvvet Teoremi

Kuvvet teoreminde geçen **j** sayısı, 1'in sekizinci kökü olup,

$$\mathbf{j} = Cos(\pi/4) + \mathbf{i}\,Sin(\pi/4) = (1 + \mathbf{i})/\sqrt{2} = \sqrt[4]{-1}$$

dır.

$$\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{p}a_2 + \mathbf{q}a_3 + \mathbf{r}a_4, \qquad \mathbf{B} = b_1 + \mathbf{p}b_2 + \mathbf{q}b_3 + \mathbf{r}b_4, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}^n$$

Kök işlemi için, **A** bilinen, **B** bilinmeyen alınır.(417) çarpım formülünden, n = 2 için,
(421) $a_1 = b_1^2 - 2b_2b_4 - b_3^2$, $a_2 = 2b_1b_2 - 2b_3b_4$, $a_3 = 2b_1b_3 + b_2^2 - b_4^2$, $a_4 = 2b_1b_4 + 2b_2b_3$
(422) $$a_1 - \mathbf{i}a_3 - \mathbf{ij}(a_2 - \mathbf{i}a_4) = [b_1 - \mathbf{i}b_3 - \mathbf{ij}(b_2 - \mathbf{i}b_4)]^2$$
$$a_1 + \mathbf{i}a_3 - \mathbf{j}(a_2 + \mathbf{i}a_4) = [b_1 + \mathbf{i}b_3 - \mathbf{j}(b_2 + \mathbf{i}b_4)]^2$$
yazılır. (422) de, ikinci tarafın parantezleri açılır ve a_i'lerin değerleri yerlerine konulursa, eşitliklerin sağlandıkları görülür.

Kök işlemi için a_i'ler bilinen, b_i'ler bilinmeyen alınır.(422) de **j** yerin değeri konulursa,
$b_1+ b_2/\sqrt{2} - b_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(b_2/\sqrt{2} + b_3 + b_4/\sqrt{2}) = [a_1 + a_2/\sqrt{2} - a_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(a_2/\sqrt{2} + a_3 + a_4/\sqrt{2})]^{1/2}$,
$b_1 - b_2/\sqrt{2} + b_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(b_2/\sqrt{2} - b_3 + b_4/\sqrt{2}) = [a_1- a_2/\sqrt{2} + a_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(a_2/\sqrt{2} - a_3 + a_4/\sqrt{2})]^{1/2}$,
bulunur. İkinci yanın Moivre formülü ile kare kökü alınır, gerçel ve sanal kısımlar ayrı, ayrı eşitlenerek, dört bilinmeyenli denklemden b_i'ler çözülür. Benzer işlemler, üçüncü ve dördüncü kökler için de yapılır.

(423) $\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{p}a_2 + \mathbf{q}a_3 + \mathbf{r}a_4$, $\mathbf{B} = b_1 + \mathbf{p}b_2 + \mathbf{q}b_3 + \mathbf{r}b_4$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}^3$
$a_1 = b_1^3 - 6b_1b_2b_4 - 3b_1b_3^2 + 3b_3b_4^2 - 3b_2^2b_3$, $a_2 = 3b_1^2b_2 - 6b_1b_3b_4 - 3b_2b_3^2 - 3b_2^2b_4 + b_4^3$,
$a_3 = 3b_1^2b_3 + 3b_1b_2^2 - 6b_2b_3b_4 - 3b_1b_4^2 - b_3^3$, $a_4 = 3b_1^2b_4 - 3b_2b_4^2 - 3b_3^2b_4 + 6b_1b_2b_3 + b_2^3$
(424) $$a_1 - \mathbf{i}a_3 - \mathbf{ij}(a_2 - \mathbf{i}a_4) = [b_1 - \mathbf{i}b_3 - \mathbf{ij}(b_2 - \mathbf{i}b_4)]^3,$$
$$a_1 + \mathbf{i}a_3 - \mathbf{j}(a_2 + \mathbf{i}a_4) = [b_1 + \mathbf{i}b_3 - \mathbf{j}(b_2 + \mathbf{i}b_4)]^3$$
B'nin küpü alınır, a_i'lerin değerleri yerlerine konulursa, bu eşitliklerin sağlandıkları görülür. Kök işlemi için a_i'ler bilinen, b_i'ler bilinmeyen alınır.
$b_1+ b_2/\sqrt{2} - b_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(b_2/\sqrt{2} + b_3 + b_4/\sqrt{2}) = [a_1 + a_2/\sqrt{2} - a_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(a_2/\sqrt{2} + a_3 + a_4/\sqrt{2})]^{1/3}$,
$b_1 - b_2/\sqrt{2} + b_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(b_2/\sqrt{2} - b_3 + b_4/\sqrt{2}) = [a_1- a_2/\sqrt{2} + a_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(a_2/\sqrt{2} - a_3 + a_4/\sqrt{2})]^{1/3}$,
İkinci yanın Moivre formülü ile küp kökü alınır, gerçel ve sanal kısımlar ayrı, ayrı eşitlenerek, dört bilinmeyenli denklemden b_i'ler çözülür.

(425) $\mathbf{A} = a_1 + \mathbf{p}a_2 + \mathbf{q}a_3 + \mathbf{r}a_4$, $\mathbf{B} = b_1 + \mathbf{p}b_2 + \mathbf{q}b_3 + \mathbf{r}b_4$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}^4$
$a_1 = b_1^4 - 12b_1^2b_2b_4 - 6b_1^2b_3^2 + 12b_1b_3b_4^2 - 12b_1b_2^2b_3 + 12b_2b_3^2b_4 + 6b_2^2b_4^2 - b_2^4 + b_3^4 - b_4^4$,
$a_2 = 4b_1^3b_2 - 12b_1b_2^2b_4 - 12b_1b_2b_3^2 + 12b_2b_3b_4^2 - 4b_2^3b_3 - 12b_1^2b_3b_4 + 4b_1b_4^3 + 4b_3^3b_4$
$a_3 = 4b_1^3b_3 - 24b_1b_2b_3b_4 - 4b_1b_3^3 + 6b_3^2 b_4^2 - 6b_2^2b_3^2 + 6b_1^2b_2^2 - 4b_2^3b_4 + 4b_2b_4^3 - 6b_1^2b_4^2$
$a_4 = 4b_1^3b_4 - 12b_1b_2b_4^2 - 12b_1b_3^2b_4 + 4b_3b_4^3 - 12b_2^2b_3b_4 + 12b_1^2b_2b_3 - 4b_2b_3^3 + 4b_1b_2^3$
(426) $$a_1 - \mathbf{i}a_3 - \mathbf{ij}(a_2 - \mathbf{i}a_4) = [b_1 - \mathbf{i}b_3 - \mathbf{ij}(b_2 - \mathbf{i}b_4)]^4 ,$$
$$a_1 + \mathbf{i}a_3 - \mathbf{j}(a_2 + \mathbf{i}a_4) = [b_1 + \mathbf{i}b_3 - \mathbf{j}(b_2 + \mathbf{i}b_4)]^4$$
B'nin dördüncü kuvveti alınır, a_i lerin değerleri yerlerine konulursa, bu eşitliklerin sağlandıkları görülür. Kök işlemi için a_i'ler bilinen, b_i'ler bilinmeyen alınır.
$b_1+ b_2/\sqrt{2} - b_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(b_2/\sqrt{2} + b_3 + b_4/\sqrt{2}) = [a_1 + a_2/\sqrt{2} - a_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(a_2/\sqrt{2} + a_3 + a_4/\sqrt{2})]^{1/4}$,
$b_1 - b_2/\sqrt{2} + b_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(b_2/\sqrt{2} - b_3 + b_4/\sqrt{2}) = [a_1- a_2/\sqrt{2} + a_4/\sqrt{2} - \mathbf{i}(a_2/\sqrt{2} - a_3 + a_4/\sqrt{2})]^{1/4}$,
İkinci yanın Moivre formülü ile dördüncü kökü alınır, gerçel ve sanal kısımlar ayrı, ayrı eşitlenerek, dört bilinmeyenli denklemden b_i'ler çözülür.

Birinci Üst karmaşık Sayılarının Köklerinin Çok Değerliliği

Bu vektörler de, üst karmaşık sayı olduklarından, kök işlemlerinde çok değerlilikle karşılaşılır. Bir üst karmaşık sayının kare kökünün çok değerliliği araştırılacaktır. İki üst karmaşık sayının karesi eşit olsun.

$$\mathbf{a} = a_1 + \mathbf{p}a_2 + \mathbf{q}a_3 + \mathbf{r}a_4, \quad \mathbf{b} = b_1 + \mathbf{p}b_2 + \mathbf{q}b_3 + \mathbf{r}b_4, \quad \mathbf{u} = \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2$$
$$\mathbf{u} = (b_1 + \mathbf{p}b_2 + \mathbf{q}b_3 + \mathbf{r}b_4)^2, \quad u_1 = b_1^2 - 2b_2b_4 - b_3^2, \quad u_2 = 2(b_1b_2 - b_3b_4),$$
$$u_3 = b_2^2 + 2b_1b_3 - b_4^2, \quad u_4 = 2(b_1b_4 + b_2b_3), \quad \mathbf{j} = \sqrt[4]{-1} = (1 + \mathbf{i})/\sqrt{2},$$
olmak üzere, (422) denklemlerinden,
$$(u_1 + \mathbf{i}u_3) + \mathbf{j}(u_2 + \mathbf{i}u_4) = [(a_1 + \mathbf{i}a_3) + \mathbf{j}\,(a_2 + \mathbf{i}a_4)]^2 = [b_1 + \mathbf{i}b_3) + \mathbf{j}(b_2 + \mathbf{i}b_4)]^2,$$
$$(u_1 - \mathbf{i}u_3) + \mathbf{j}\,(u_2 - \mathbf{i}u_4) = [(a_1 - \mathbf{i}a_3) + \mathbf{ij}(a_2 - \mathbf{i}a_4)]^2 = [b_1 - \mathbf{i}b_3) + \mathbf{ij}(b_2 - \mathbf{i}b_4)]^2,$$
yazılır. Yalnız burada, ikinci denklemin ortasındaki işaret + gelmiştir. u_i'lerin değerleri yerlerine konulması ile, eşitliklerin sağlandığı görülür. Son eşitliklerin kare kökleri de eşittir. Kare kökün eşitliği, ikisinde de, aynı işaretle alınırsa, bileşenler, bire bir eşit bulunurlar. Ters

işaretle alınırsa, yeni bir kare kök bulunur. **j** yerine değerini koyup, gerçel ve sanal kısımları ayıralım.
$(u_1 + \mathbf{i}u_3) + \mathbf{j}(u_2 + \mathbf{i}u_4) = [(a_1 + \mathbf{i}a_3) + (1 + \mathbf{i})/\sqrt{2}\,(a_2 + \mathbf{i}a_4)]^2 = [b_1 + \mathbf{i}b_3) + (1 + \mathbf{i})/\sqrt{2}\,(b_2 + \mathbf{i}b_4)]^2$,
$(u_1 - \mathbf{i}u_3) + \mathbf{i}\,\mathbf{j}(u_2 - \mathbf{i}u_4) = [(a_1 - \mathbf{i}a_3) + (\mathbf{i} - 1)/\sqrt{2}(a_2 - \mathbf{i}a_4)]^2 = [b_1 - \mathbf{i}b_3) + (\mathbf{i} - 1)/\sqrt{2}\,(b_2 - \mathbf{i}b_4)]^2$,
b_i'ler bilinen, a_i'ler bilinmeyen olsun. Bilinen bir kare kökten, ikinci bir kare kök bulunacaktır.

(424) $c_1 = b_1 + b_2/\sqrt{2} - b_4/\sqrt{2}$, $c_2 = b_3 + b_2/\sqrt{2} + b_4/\sqrt{2}$,
$c_3 = b_1 - b_2/\sqrt{2} + b_4/\sqrt{2}$, $c_4 = -b_3 + b_2/\sqrt{2} + b_4/\sqrt{2}$,
$a_1 + a_2/\sqrt{2} - a_4/\sqrt{2} + \mathbf{i}(a_3 + a_2/\sqrt{2} + a_4/\sqrt{2}) = c_1 + \mathbf{i}c_2$,
$a_1 - a_2/\sqrt{2} + a_4/\sqrt{2} + \mathbf{i}(-a_3 + a_2/\sqrt{2} + a_4/\sqrt{2}) = c_3 + \mathbf{i}c_4$,
$a_1 + a_2/\sqrt{2} - a_4/\sqrt{2} = c_1$, $a_3 + a_2/\sqrt{2} + a_4/\sqrt{2} = c_2$,
$a_1 - a_2/\sqrt{2} + a_4/\sqrt{2} = c_3$, $-a_3 + a_2/\sqrt{2} + a_4/\sqrt{2} = c_4$,

Son dört denklemden a_i'ler çözülürse,
$a_1 = (c_1 + c_3)/2$, $a_2 = (c_1 + c_2 - c_3 + c_4)/(2\sqrt{2})$, $a_3 = (c_2 - c_4)/2$, $a_4 = (-c_1 + c_2 + c_3 + c_4)/(2\sqrt{2})$,
bulunur. c_1 ve c_2 ters işaretle alınıp, c_i'ler yerlerine konulursa,
$a_1 = (-b_2 + b_4)/\sqrt{2}$, $a_2 = -(b_1 + b_3)/\sqrt{2}$, $a_3 = -(b_2 + b_4)/\sqrt{2}$, $a_4 = (b_1 - b_3)/\sqrt{2}$
bulunur. İkinci halde, c_1 ve c_2 aynı işaretle c_3, $_1$ ters işaretle, üçüncü halde, hepsi ters işaretle alınır. Toplam kare kök, dört tanedir.

Üçüncü kök için benzer işlemler yapılır.

(425) $\mathbf{a} = a_1 + \mathbf{p}a_2 + \mathbf{q}a_3 + \mathbf{r}a_4$, $\mathbf{b} = b_1 + \mathbf{p}b_2 + \mathbf{q}b_3 + \mathbf{r}b_4$, $\mathbf{v} = \mathbf{b}^3$
$v_1 = b_1^3 - 6b_1b_2b_4 - 3b_1b_3^2 + 3b_3b_4^2 - 3b_2^2b_3$, $v_2 = 3b_1^2b_2 - 6b_1b_3b_4 - 3b_2b_3^2 - 3b_2^2b_4 + b_4^3$,
$v_3 = 3b_1^2b_3 + 3b_1b_2^2 - 6b_2b_3b_4 - 3b_1b_4^2 - b_3^3$, $v_4 = 3b_1^2b_4 - 3b_2b_4^2 - 3b_3^2b_4 + 6b_1b_2b_3 + b_2^3$
bileşenleri göz önüne alınırsa, (424) den
$v_1 + \mathbf{i}v_3 + \mathbf{j}(v_2 + \mathbf{i}v_4) = [(a_1 + \mathbf{i}a_3) + \mathbf{j}\,(a_2 + \mathbf{i}a_4)]^3 = [b_1 + \mathbf{i}b_3 + \mathbf{j}\,(b_2 + \mathbf{i}b_4)]^3$
$v_1 - \mathbf{i}v_3 + \mathbf{i}\,\mathbf{j}(v_2 - \mathbf{i}v_4) = [(a_1 - \mathbf{i}a_3) + \mathbf{i}\,\mathbf{j}(a_2 - \mathbf{i}a_4)]^3 = [b_1 - \mathbf{i}b_3 + \mathbf{i}\,\mathbf{j}(b_2 - \mathbf{i}b_4)]^3$
yazılır. Burada ortadaki işaretin + olması, eşitliklerin sağlanmasını engellemez. İkinci yanların küp kökleri de eşittir. Küp kökler aynı işaretle eşit alınırlarsa, köklerin bileşenleri bire bir, eşit olurlar. Farklı işaretle alınırlarsa, yeni bir kök bulunur. Ancak – işaretli olan, kök değildir, kökün ters işaretlisidir. Yukarıdakine benzer işlemler yinelenir ve ters işaretlisi alınırsa, istenilen kök bulunur.
$a_1 = -(-b_2 + b_4)/\sqrt{2}$, $a_2 = (b_1 + b_3)/\sqrt{2}$, $a_3 = (b_2 + b_4)/\sqrt{2}$, $a_4 = -(b_1 - b_3)/\sqrt{2}$

Dördüncü kök için değişik bir işlem yoktur. Aynı işlemler yinelenecektir. Kare kök iki tane olduğundan, bunların da, kare kökleri alınırsa, dört tane dördüncü kök bulunur. – 1, **i** ve – **i** çarpanlarını da, koyarak kök sayısı 16 olur. Dört boyutlu uzayda dairesel trigonometri de, Öklidsel değildir.

Birinci üst karmaşık sayıların, kare köklerini bulan Matlab programı:

```
f = inline('[x(1,1)*x(2,1) – x(1,2)*x(2,4) – x(1,3)*x(2,3) – x(1,4)*x(2,2)   x(1,1)*x(2,2) +
x(1,2)*x(2,1) – x(1,3)*x(2,4) – x(1,4)*x(2,3)   (x(1,1)*x(2,3) + x(1,2)*x(2,2) + x(1,3)*x(2,1)
– x(1,4)*x(2,4)    x(1,1)*x(2,4) + x(1,2)*x(2,3) + x(1,3)*x(2,2) + x(1,4)*x(2,1)]');
b = [–4+2*i  –2 –9*i  –5 + 3*i  7 –12*i];  i = sqrt(– 1); v = b(1) + s*b(2)
– s*b(4);  w = – s*b(2)  – b(3)– s*b(4);  c3 = b(1) – s*b(2) + s*b(4);  c4 = –  s*b(2) + b(3) –
s*b(4);  r1 = (v^2 + w^2)^(1/4); r2 = (c3^2 + c4^2)^(1/4);
if  v == 0  &  w>0  p =  pi/2;   elseif  v == 0  &  w< 0  p = – pi/2; else  p = atan(w/v);   end
if  c3 == 0  &  c4>0  d =  pi/2;   elseif  c3 == 0  &  c4< 0  d = – pi/2; else  d = atan(c4/c3);
end
n1= [1  1  i  i];  n2 = [0  1  0  1]; pp = p; for  k =1:4   p = pp; p = p + n2(k)*pi;
v1 = r1*cos(p/2);  v2 = r1*sin(p/2); w1 = r2*cos(d/2); w2 = r2*sin(d/2);
a = [1, s, 0, – s; 0, – s, –1, – s; 1, – s, 0, s; 0, – s, 1, – s];  e = [v1; v2; w1; w2];
t = a\e;  t = t*n1(k); x = [t';t']; u = f(x);  t1(1) = (t(2) – t(4))*s;  t1(2) = (t(1) + t(3))*s;
t1(3) = (t(2) + t(4))*s;  t1(4) = (– t(1) + t(3))*s;  x = [t1';t1'];u1= f(x); y = (b – u);
```

```
m(1) = abs(y(1));  m(2) = abs(y(2)); m(3) = abs(y(3));  m(4) = abs(y(4));
mt = 1.0e–003; if  m(1) < mt  &  m(2) < mt  &  m(3) < mt  & m(4) < mt  break
end
   end
t, u, t1, u1, b, k,
```

İlk üç satır (417) ile verilen, üçüncü üst karmaşık sayıların çarpım işlemidir. a ikinci mertebe dizisi karşılaşılan dört bilinmeyenli denklemin katsayılar matrisidir. e, bu denklemin ikinci yanı, sütun matrisidir. t, dört bilinmeyenli denklemin çözümü olup, aranılan kare kök üst karmaşık sayısıdır. t1, çok değerlilik özeliği ile bulunan yeni köktür.

Birinci üst karmaşık sayıların, küp köklerini bulan Matlab programı:

```
   f = inline(‘[x(1,1)*x(2,1) – x(1,2)*x(2,4) – x(1,3)*x(2,3) – x(1,4)*x(2,2)   x(1,1)*x(2,2) +
x(1,2)*x(2,1) – x(1,3)*x(2,4) – x(1,4)*x(2,3)   (x(1,1)*x(2,3) + x(1,2)*x(2,2) + x(1,3)*x(2,1)
– x(1,4)*x(2,4)    x(1,1)*x(2,4) + x(1,2)*x(2,3) + x(1,3)*x(2,2) + x(1,4)*x(2,1)]’);
b = [–4+2*i   –2 –9*i   –5 + 3*i   7 –12*i];  i = sqrt(– 1); s = 1/sqrt(2); j = (–1 + i*sqrt(3))/2;
k = (–1 – i*sqrt(3))/2;  v = b(1) + s*b(2) – s*b(4);  w = – s*b(2)  – b(3)–  s*b(4);  c3 = b(1) –
s*b(2) + s*b(4);  c4 = –  s*b(2) + b(3) – s*b(4);  r1 = (v^2 + w^2)^(1/6);
r2 = (c3^2 + c4^2)^(1/6);  if  v == 0  &  w>0  p =  pi/2;   elseif  v == 0  &  w< 0  p = – pi/2;
else  p = atan(w/v);   end
if  c3 == 0  &  c4>0  d =  pi/2;   elseif  c3 == 0  &  c4< 0  d = – pi/2; else  d = atan(c4/c3);
end
n1= [1  1  –1  –1];  n2 = [0  1  0  1]; pp = p; for  ka =1:4   p = pp; p = p + n2(ka)*pi;
v1 = r1*cos(p/3);  v2 = r1*sin(p/3); w1 = r2*cos(d/3); w2 = r2*sin(d/3);
a = [1, s, 0, – s; 0, – s, –1, – s; 1, – s, 0, s; 0, – s, 1, – s];  e = [v1; v2; w1; w2];
t = a\e;  t = t*n1(ka); x = [t’;t’]; u = f(x);  x = [t’; u]; u = f(x);  c1 = t(1) + s*t(2) –  s*t(4);
c2 = s*t(2) + t(3) + s*t(4);   c3 = t(1) – s*t(2) + s*t(4);  c4 = s*t(2) – t(3) + s*t(4);
a = [1, s, 0, – s; 0, – s, –1, – s; 1, – s, 0, s; 0, – s, 1, – s];  e = [j*c1; – j*c2; c3; – c4];
t1 = a\e;   e = [j*c1; – j*c2; k*c3; – k*c4];  t2 = a\e;  x = [t1’;t1’]; u1 = f(x);  x = [t1’;u1];
u1 = f(x);   x = [t2’;t2’]; u2 = f(x);  x = [t2’;u2]; u2 = f(x); y = (b – u); m(1) = abs(y(1));  m(2)
= abs(y(2)); m(3) = abs(y(3));  m(4) = abs(y(4)); mt = 1.0e–003; if  m(1) < mt  &  m(2) < mt
&  m(3) < mt  & m(4) < mt  break
end
   end
t, u, t1, u1, t2,u2,  b, ka,
```

Burada ikinci a ikinci mertebe dizisi, çok değerlilik özeliği ile karşılaşılan dört bilinmeyenli denklem sisteminin katsayılar matrisidir. e ise bu sistemin ikinci yanıdır. E sütun matrisinin, ilk iki elemanı j ile, diğer iki elemanı k ile çarpılarak, yeni kökler elde edilmiştir. j ve k 1’in küp kökleridir.

Birinci üst karmaşık sayıların, dördüncü köklerini bulan Matlab programı:

```
   f = inline(‘[x(1,1)*x(2,1) – x(1,2)*x(2,4) – x(1,3)*x(2,3) – x(1,4)*x(2,2)   x(1,1)*x(2,2) +
x(1,2)*x(2,1) – x(1,3)*x(2,4) – x(1,4)*x(2,3)   (x(1,1)*x(2,3) + x(1,2)*x(2,2) + x(1,3)*x(2,1)
– x(1,4)*x(2,4)    x(1,1)*x(2,4) + x(1,2)*x(2,3) + x(1,3)*x(2,2) + x(1,4)*x(2,1)]’);
b = [–4+2*i   –2 –9*i   –5 + 3*i   7 –12*i];  i = sqrt(– 1); s = 1/sqrt(2); ja =(1 + i)*s
v = b(1) + s*b(2) – s*b(4);  w = – s*b(2)  – b(3)–  s*b(4);  c3 = b(1) – s*b(2) + s*b(4);  c4 = –
s*b(2) + b(3) – s*b(4);  r1 = (v^2 + w^2)^(1/8); r2 = (c3^2 + c4^2)^(1/8);
 if  v == 0  &  w>0  p =  pi/2;   elseif  v == 0  &  w< 0  p = – pi/2; else  p = atan(w/v);   end
if  c3 == 0  &  c4>0  d =  pi/2;   elseif  c3 == 0  &  c4< 0  d = – pi/2; else  d = atan(c4/c3);
end
n1= [1  1  ja  ja];  n2 = [0  1  0  1]; pp = p;for  k =1:4   p = pp; p = p + n2(k)*pi;
v1 = r1*cos(p/4); v2 = r1*sin(p/4); w1 = r2*cos(d/4); w2 = r2*sin(d/4);
a = [1, s, 0, – s; 0, – s, –1, – s; 1, – s, 0, s; 0, – s, 1, – s];  e = [v1; v2; w1; w2];
```

```
t = a\e;  t = t*n1(k); x = [t';t']; u = f(x);  x = [u; u]; u f(x);  c1 = t(1) + s*t(2) –  s*t(4);
c2 = s*t(2) + t(3) + s*t(4);  c3 = t(1) – s*t(2) + s*t(4);  c4 = s*t(2) – t(3) + s*t(4);
a = [1, s, 0, – s; 0, – s, –1, – s; 1, – s, 0, s; 0, – s, 1, – s];  e = [i*c1; – i*c2; – c3; c4];
t1 = a\e;   e = [ i*c1; – i*c2; c3; – c4];  t2 = a\e;  e = [– i*c1;  i*c2; i*c3; – i*c4];  t3 = a\e;
x = [t1';t1']; u1 = f(x);  x = [u1;u1]; u1 = f(x);   x = [t2';t2']; u2 = f(x);  x = [u2;u2]; u2 = f(x);
x = [t3';t3']; u3 = f(x);   x = [u3;u3]; u3 = f(x);  y = (b – u); m(1) = abs(y(1));  m(2) =
abs(y(2)); m(3) = abs(y(3));  m(4) = abs(y(4)); mt = 1.0e–003; if  m(1) < mt  &  m(2) < mt  &
m(3) < mt  & m(4) < mt  break
end
   end
t, u, t1, u1, t2, u2, t3, u3, b, k,
```