İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖNSÖZ

Karmaşık Sayılar yapıtımla matematiğe kazandırdığım yeniliklerden bazıları şunlardır:

Bir boyutlu uzayda doğrusal bağımsız iki nokta ikilisi üzerine, çifte oran ve özel bir hali olan envoüsyon kavramları kurulur. Doğrusal bağımsız iki nokta ikilisi, bir envolüsyon belirler. Envolüsyonun iki türlü ifade biçimi vardır. Birinci olarak, envolüsyonun içerdiği nokta ikililerinin parametrleri arasında, ikinci dereceden bir bağıntı ile verilen envolüsyonun parametrik denklemidir. İkincisi ise, eşlenik noktaların türdeş koordinatlarının, değişmez nokta ikilisinin, doğrusal toplamı olarak ifadesidir.

1)Düzlemde doğrusal bağımsız iki nokta üçlüsü üzerine, üçlü oran ve bunun özel bir hali olarak, üçlü envolüsyon kavramları kurulmuştur. Kitabın sonunda Borland Pascal ile verilen program 2 de, noktaların parametreleri, karmaşık sayılarla ifade edilmiş, doğrusal bağımsız keyfi üç nokta üçlüsünün, belirlediği üç envolüsyonun, parametrik denklemi ve üçlü harmonik eşlenik noktaların, değişmez noktaların doğrusal toplamları ile ifadeleri hesaplanmıştır. Doğrusal toplam ifadelerinden, keyfi bir harmonik eşlenik nokta üçlüsü alınmış, envolüsyonun parametrik denklemini sağladığı gösterilmiştir. Program 3 de noktaların parametreleri, yeni tanımladığım barisantrik karmaşık sayılarla ifade edilmiş ve ayni işlemler tekrarlanmıştır.

2) Benzer işlemler, üç boyutlu uzayda dörtlü oran ve dörtlü envolüsyon için tekrarlanmıştır.

3) Sonsuzdaki düzlem Öklidsel konuma getirilmiş, üzerinde uzaklık ve açıların ölçülebilmesi, koordinat dönüşümlerinin yapılabilmesi sağlanmıştır. Program 1 de, uzayda bir üçyüzlünün bir iç ve üç dış açıortaylarının doğrultu bileşenleri, sonsuzdaki düzlem üzerinde, uzaklık hesabı ve koordinat dönüşümü yapılarak bulunmuştur. Program 3 de, sonsuzdaki düzlem üzerinde uzaklık hesabı yapılmıştır.

4) Düzlemde ve uzayda her noktaya bir karmaşık sayı ve bir matris tekabül ettirilmiştir. Matrisin rangı, nokta ve sayılara yansıtılmış, her noktanın ve karmaşık sayının rangı tanımlanmış, bunlara düzgün olma ve düzgün olmama ayrımı getirilmiştir.

5) Dik üçlü ve dörtlü envolüsyonlar tanımlanmış, bunların yardımı ile uzayın sonsuzdaki düzlemi üzerinde ve dört boyutlu uzayın sonsuzdaki üç boyutlu uzayı üzerinde bulunan , izotrop noktaları belirlenmiş,

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2, \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$$

Diofant denklemleri çözülmüştür.

6) Yeni izotrop noktalara dayalı olarak, uzaklık ve açı formülleri verilmiş, böylece elde edilen kavramlar üzerine yeni bir trigonometri kurulmuştur.

7) Bir açının kenarları arasında kalan, sonsuzdaki düzlem üzerinde bulunan, doğru parçasının logaritması, açının hiperbolik ölçümü olarak tanımlanmış ve problemlerde bu kavrama yer verilmiştir. Açının hiperbolik trigonometride argümanı oluşturulmuştur. Program 3 de bu kavram kullanılmıştır. Açının bilinen ölçümü de dairesel ölçüm adını almıştır.

8) Uzayda iç, orta ve dış çarpımlar tanımlanmıştır.

9) Uzayda izotrop karmaşık sayılar tanımlanmıştır.

10) Uzayda karmaşık sayılar tanımlanmış ve karmaşık analize girilmiştir. Türev, süreklilik koşulları, konform tasvir ve entegral teoremleri incelenmiştir.

11) Mekanik olarak öteleme işi, dönme işi, hız, ivme ve metrik ifadeleri verilmiştir.

12) Görecelik kuramına girilmiş, Merkür gezegeninin günberi noktasının ilerlemesi, yeni bir anlayışla, değişik ve kısa bir yöntemle hesaplanmıştır.

13)Dört boyutlu uzayda analitik geometri yapılmış, izotrop karmaşık sayı ve izotrop koordinatlar tanımlanmıştır.

I
DENKLEMLER

İkinci Derece Denklemler

Bugüne kadar ikinci derece denkleminin çeşitli yollardan çözümü yapılmıştır. Fakat bu çözümlerden hiç birisi, daha yüksek dereceli denklemlerin çözümlerine, yol gösterici nitelikte olmamıştır. Burada daha yüksek dereceli denklemlerin çözümüne yol gösterici bir çözüm yapılacaktır.

(1) $$X^2 - 1 = 0$$

Denkleminin çözümü, ikinci derece denklemi için taban oluşturacaktır. Bu denklemin kökleri ile genel ikinci derece denkleminin kökleri ifade edilebilir.

(2) $$X^2 + a_1X + a_2 = 0$$

İkinci derece denkleminin kökleri**,** (1) denkleminin kökleri ile oluşturulan ve

(3) $$A = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

matrisi ile dönüştürülmüş sayılar olsunlar.

(4) $$\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \qquad \begin{matrix} X_1 = x + y \\ X_2 = x - y \end{matrix}$$

Kökler ve katsayıların bağıntılarını oluşturalım.

(5) $$a_1 = -(X_1 + X_2) = -2x, \qquad a_2 = x^2 - y^2$$

(6) $$x = -a_1/2, \qquad y = +\sqrt{(a_1^2/4 - a_2)}$$

Bu sonuçlar (4) de yerine konulursa,

(7) $$X_1 = [-a_1 + \sqrt{(a_1^2 - 4a_2)}]/2, \qquad X_2 = [-a_1 - \sqrt{(a_1^2 - 4a_2)}]/2$$

çözümleri elde edilir.

Üçüncü Derece Denklemler

(8) $$X^3 - 1 = 0$$

Denkleminin çözümleri üçüncü derece denklemlerin çözümüne taban oluşturacaktır. Bu denklemin kökleri sıra ile, 1, j, k olsunlar.

(9) $$X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 = 0$$

Denkleminin kökleri ile, yukarıdaki biçimde matris oluşturalım.

(10) $$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & k \\ 1 & k & j \end{matrix}$$

Matrisi ile dönüştürülmüş sayılar, denklemin kökleri olsunlar.

(11) $X_1 = x + y + z, \qquad X_2 = x + jy + kz, \qquad X_3 = x + ky + jz$

x, y, z sayılarına **kök bileşenleri** denilecektir. Köklerle katsayılar arasındaki bağıntılar

(12) $a_1 = -(X_1 + X_2 + X_3) = -3x, \qquad a_2 = X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_1 = 3(x^2 - yz)$

$$a_3 = -X_1X_2X_3 = -(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

Bu işlemler yapılırken 1, j, k sayılarının,

(13) $$1 + j + k = 0, \qquad 1.j.k = 1, \qquad j^2 = k, \qquad k^2 = j$$

özelikleri göz önüne alınmıştır. Katsayılar, x, y, z değişkenlerinin simetrik fonksiyonlarıdır.

Bu bilinmeyenleri çözelim.

(14) $x = -a_1/3, \qquad yz = a_1^2/9 - a_2/3, \qquad y^3 + z^3 = -a_3 - 2a_1^3/27 + a_1a_2/3$

İkinci eşitliğin küpü alınırsa, problem toplamları ve çarpımları bilinen sayıların bulunmasına indirgenir.

(15). $$b_1 = -(y^3 + z^3) = a_3 + 2a_1^3/27 - a_1a_2/3,$$
$$b_2 = y^3z^3 = a_1^6/729 - a_1^4a_2/81 + a_1^2a_2^2/27 - a_2^3/27$$

(16). $$Y^2 + b_1Y + b_2 = 0$$

(17) $$\Delta = (b_1^2 - 4b_2) = (27a_3^2 - a_1^2a_2^2 + 4a_1^3a_3 - 18a_1a_2a_3 + 4a_2^3)/27$$

(18) $$y^3 = [-27a_3/2 - a_1^3 + 9a_1a_2/2 + 3/2\sqrt{(3\Delta)}]/27, \qquad ..$$
$$z^3 = [-27a_3/2 - a_1^3 + 9a_1a_2/2 - 3/2\sqrt{(3\Delta)}]/27$$

(19) $X_1=\{-a_1+[-27a_3/2 - a_1^3+9a_1a_2/2+3/2\sqrt{(3\ \Delta)}]^{1/3} + [-27a_3/2 - a_1^3+9a_1a_2/2 - 3/2\sqrt{(3\Delta)}]^{1/3}\}/3$
(20) $X_2=\{-a_1+[-27a_3/2-a_1^3+9a_1a_2/2+3/2\sqrt{(3\Delta)}]^{1/3}j+[-27a_3/2-a_1^3 + 9a_1a_2/2-3/2\sqrt{(3\Delta)}]^{1/3}\ k\}/3$
(21) $X_3=\{-a_1+[-27a_3/2-a_1^3+9a_1a_2/2+3/2\sqrt{(3\Delta)}]^{1/3}k + [-27a_3/2-a_1^3 + 9a_1a_2/2-3/2\sqrt{(3\Delta)}]^{1/3}j\}/3$
y ve z'nin hesabında küp kök alınmıştır. Bir sayının küp kökü, üç tanedir. Bunlar küp kökün 1, j, k sayıları ile çarpılmasıyla elde edilirler. Küp köklerden bir tanesi, y olarak seçilir. z artık keyfi alınamaz.

(22) $$y\, z = a_1^2/9 - a_2 /3$$

bağıntısı sağlanacak biçimde z seçilmelidir.

İkinci Yöntem: Yukarda alınan X_2 sayısı, üçüncü derece denkleminin bir kökü olsun. Sağlaması için (9) denkleminde yerine koyalım ve parantezleri açalım.

(23) $$(x + jy + kz)^3 + a_1(x + jy + kz)^2 + a_2(x + jy + kz) + a_3 = 0$$

(24) $$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + a_1x^2 + 2a_1yz + a_2x + a_3 + j(3x^2y + 3y^2z + 3xz^2 + a_1z^2 + 2a_1xy + a_2y) + k(3x^2z + 3xy^2 +3yz^2 + a_1y^2 + 2a_1xz + a_2z) = 0$$

1). 1, j, k, 1 in küp köklerinin katsayıları birbirlerine eşit olursa, (24) sıfır olur. Çünkü ortak çarpan paranteze alındığında, çarpan olarak 1 in küp köklerinin toplamı gelir. Bu da (13) gereği sıfırdır. Fakat uzayda bu sanal vektörlerin toplamı, izotrop doğru üzerinde bir vektör olup, şiddeti sıfırdır. İlerde göreceli uzayda açıklamasını bulacaktır.

2) Bu kök bileşenleriyle oluşan katsayıların üçü de sıfır olursa, denklem sıfıra özdeş olur.

(25) $$P_1 = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + a_1x^2 + 2a_1yz + a_2x + a_3 = 0,$$
$$P_2 = 3x^2y + 3y^2z + 3xz^2 + a_1z^2 + 2a_1xy + a_2y = 0,$$
$$P_3 = 3x^2z + 3xy^2 + 3yz^2 + a_1y^2 + 2a_1xz + a_2z = 0$$
$$P_1 + jP_2 + kP_3 = 0$$

Bu denklemlerin (14) ün çözümü ile sağlandığını görmek için, x, y, z bilinmeyenleri yok edilecektir. (14) ün çözümlerinden değerlerini getirip, burada yerlerine koyalım. (25) eşitliklerinin sağlandıkları görülecektir.

$$P_1 = - a_1^3/27 - a_3 - 2a_1^3/27 + a_1a_2/3 - 6a_1^3/27 + 6a_1a_2/9 + a_1^3/9 + 2a_1^3/9 - 2a_1a_2/3 - a_1a_2/3 + a_3$$
$$P_2 = 3a_1^2/9\ y + 3y(a_1^2/9 - a_2/3) - a_1z^2 + a_1z^2 - 2a_1^2y/3 + a_2y$$
$$P_3 = 3a_1^2/9\ z - a_1y^2 + 3z(a_1^2/9 - a_2/3) + a_1y^2 - 2a_1^2/3\ z + a_2z$$
$$P_1 = a_1^3/27(-1 -2 - 6 + 3 + 6) + a_1a_2/3(1 + 2 - 2 - 1) + a_3(-1 + 1) = 0,$$
$$P_2 = a_1^2/3\ y(1 + 1 - 2) + a_1z^2(- 1 + 1) + a_2y (- 1 + 1) = 0,$$
$$P_3 = a_1^2/3\ z(1 + 1 - 2) + a_1y^2(- 1 + 1) + a_2z(-1 + 1) = 0$$

(14) de alınan denklemler aynı zamanda, (24) de belirlenen 1, j, k birim vektörlerinin katsayılarını da sıfır yapmışlardır. Bu nedenle, bu vektörler uzayın doğrusal bağımsız cebirsel baz elemanları olurlar. 1, j, k vektörlerinin birincisi gerçel diğerleri sanaldır. Bir gerçel ve bir sanal vektörün, doğrusal bağımsız olduğu kesindir. Bu üç vektörün doğrusal bağımsız olmadığını varsayarsak, bağımlı olan yok edildiğinde, iki bağımsız vektör kalacaktır. (25) in dördüncü denklemi, katsayılar sıfır olduğundan, özdeş olarak sıfırdır. İki bağımsız vektörün katsayıları sıfır olmalıdır. x, y, z bilinmeyenlerinin çözümü, iki denklemle olanaksızdır. Halbuki denklemin çözümü, daha önce yapıldığından, çözümün varlığı bilinmektedir. Üç bilinmeyene üç denklem bulabilmek için, üç vektörün doğrusal bağımsız olması zorunludur.

Bu sonucun ilgi çekici yanı, yukarda verilen üçüncü derece denkleminin kökleri, hem üç boyutlu uzayda ve hem de, düzlemde yorumlanmalıdır. Bir ikinci derece denkleminin kökleri a_1, a_2 gibi iki parametreye bağlı olup, bu köklere bir boyutlu uzay yeterli olmaz. İster istemez kökler, karmaşık düzlemde gelmektedir. Bir üçüncü derece denkleminin kökleri de, üç boyutlu uzayı doldurur. Bu da, a_1, a_2, a_3 gibi üç parametreye bağlı olmanın gereğidir.

Dördüncü Derece Denklemler

(26) $$X^4 -1 = 0$$

denkleminin kökleri ile, genel bir dördüncü derece denkleminin kökleri ifade edilecektir.

(27) $$X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4 = 0$$

(28)
$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}$$
denkleminin köklerini, A matrisi ile dönüştürülmüş sayılar olarak alalım.
$X_1 = x + y + z + t$, $X_2 = x - y + z - t$, $X_3 = x + y - z - t$, $X_4 = x - y - z + t$
olsunlar. Köklerle katsayılar arasındaki bağıntıları oluşturalım.
(29) $a_1 = - 4x$, $a_2 = 2(3x^2 - y^2 - z^2 - t^2)$, $a_3 = - 4(x^3 - xy^2 - xz^2 - xt^2 + 2yzt)$
$$a_4 = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 2x^2(y^2 + z^2 + t^2) - 2(y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2) + 8xyzt$$
Katsayılar y^2,z^2,t^2 değişkenlerine göre simetriktir. Bu eşitliklerden aşağıdaki simetrik fonksiyonlar kolayca hesaplanabilir.
(30) $x = - a_1/4$, $a_4 = x^4 + (y^2 + z^2 + t^2)^2 - 4(y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2) - 2x^2(y^2 + z^2 + t^2) + 8xyzt$
(31) $yzt = (- a_3 - a_1^3/8 + a_1a_2/2)/8$, $b_3 = - y^2z^2t^2 = - (- a_3 - a_1^3/8 + a_1a_2/2)^2/64$
$$b_1 = - (y^2 + z^2 + t^2) = - (- a_2/2 + 3a_1^2/16),$$
$$b_2 = y^2z^2 + z^2t^2 + t^2y^2 = - a_4/4 + 3a_1^4/256 + a_2^2/16 - a_1^2a_2/16 + a_1a_3/16$$
y^2, z^2, t^2 değerleri,
$$Z^3 +b_1Z^2 + b_2Z + b_3 = 0$$
Üçüncü derece denkleminin kökleri olarak bulunurlar. y, z ve t sayılarından herhangi ikisinde, işaret keyfi alınabilir. Üçüncünün işareti, (31) denklemlerinden birincisi, sağlanacak biçimde alınmalıdır.

Matlab programı ile denklem çözümü:

```
   n = 4;
s1 = sqrt(3); i = sqrt(–1); e1 = 3/2; e2 = –9/2; e3 = –5/2; e4 = 5;  h1 = 5 + 2*i;  h2 = 2 + 7*i;
h3 = 9 + 8*i;  g1 = 6 – 5*i; g2 = 4 + 11*i;  a1 =  –(e1 + e2 + e3 + e4);  a2 = e1*e2 + e1*e3 +
  e1*e4 + e2*e3 + e2*e4 + e3*e4;  a3 = –(e1*e2*e3 +e1*e2*e4 +e1*e3 e4 + e2*e3*e4);
a4 = e1*e2*e3*e4;  b1 = – (h1 + h2 + h3)¸b2 = h1*h2 + h1*h3 + h2*h3;  b3 = – h1*h2*h3;
c1 = – (g1 + g2);  c2 = g1*g2;  a1 = 3/5; a2 = -7;  a3 = 4/3;  a4 = 8;
 if n == 4
 b1 = a2/2 – 3*a1^2/16;  b2 = – a4/4 + 3*a1^4/256 + a2^2/16 – a1^2*a2/16 + a1*a3/16;
b5 = (– a3 –a1^3/8 + a1*a2/2)/8;  b3 = – b5^2;  end
 if  n>2
c1 = b3 + 2*b1^3/27 – b1*b2/3; yz = b1^2/9 – b2/3; c2 = yz^3; end
dis = c1^2 – 4*c2;  diskok = sqrt(dis); ax1 = (– c1 + diskok)/2;  ax2 = (– c1 – diskok)/2;
ax12 = ax1^2;  ax1c1 = ax1*c1; saglama = ax12 + ax1c1 + c2;
ax1, ax2, saglama,
y = ax1^(1/3);  z = yz/y; j = (–1 +i*s1)/2;  k = (–1 – i*s1)/2; ax = – b1/3;  y1 = ax + y + z;
y2 = ax + j*y + k*z;  y3 = ax + k*y + j*z;   saglama = y1^3 + b1*y1^2 + b2*y1 + b3;
y1, y2, y3, saglama,
if n == 4
y = sqrt(y1);  z = sqrt(y2); u1 = y*z;  t = b5/u1; ax = – a1/4;  z1 = ax + y + z + t;
z2 = ax – y + z – t;    z3 = ax + y – z  – t;  z4 = ax – y – z + t;
saglama = z1^4 + a1*z1^3 + a2*z1^2 + a3*z1 + a4;  z1, z2, z3, z4, saglama,
```

Birinci satırda bulunan n değişkeni, kökü bulunacak denklemin derecesini gösterir. e_i,h_i ve g_i değişkenleri, önceden tasarlanan kökleri gösterirler. Bu kökler, yeniden hesap edilerek bulunacaktır. Bir çeşit sağlamadır. Sonra gelen a dizisi, dördüncü derece denkleminin, en büyük dereceli terimin katsayısı, 1'e indirgendikten sonra, baştan itibaren katsayıları gösterir. b dizisi, üçüncü, c dizisi de, ikinci derece denklemlerinin katsayılarını gösterirler.

Çözülecek denklemin derecesi, n'ye, katsayıları da a dizisine atanmalıdır. İşlemler yukarda hesabı yapılan işlemlerdir. Bazan sağlama sıfırdan farklı olabilir. Bu durumda, 15'inci satırda, y = ax1^(1/3); ifadesinde ax1 = 0 olabilir. Bu kök çözüme yarar sağlamaz. Öbür kök denenmelidir. 19'uncu satırdaki atamalarda da, aynı durum olabilir. Onlar da, diğer kökle değiştirilmelidir.   ..

II
KARMAŞIK SAYILAR

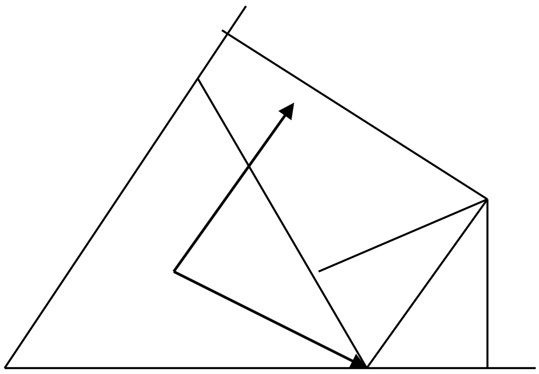
Barisantrik ve Karteziyen Koordinatlar Arasında Dönüşüm Denklemleri

Barisantrik koordinatların eşkenar üçgeninin, ağırlık merkezini, bir köşeye birleştiren Doğru, x_1 ekseni, merkezden buna çizilen dik doğru da, x_2 ekseni olan dik koordinatlarla, barisantrik koordinatlar arasında, koordinat dönüşüm ve ters dönüşüm denklemlerini bulalım.

$OA_0 = A_0B = 1, \quad OA_0B = 90^o, \quad BD = \mathrm{Sin}60^o = \sqrt{3}/2$

$O(1, 1, 1), \quad A_0(1, 0, 0), \quad A_1(0, 1, 0), \quad A_2(0, 0, 1)$

B birim noktasının üçgenin kenarlarına uzaklıkları sırayla,



$BC = 1+1/2 = 3/2, \quad BD = \sqrt{3}/2$

dir.

Şekil 1

Eşkenar üçgenin sağ köşesi A_0, Üst köşe A_1, sol köşe A_2 dir. Koordinat eksenleri x_1 ve x_2 dir. Birim karenin üst sağ köşesi B, bu noktadan yatay kenar üzerindeki izdüşüm E, diğer kenar üzerindeki izdüşüm C dir.

Üçgen eşkenar olduğundan, B noktasının üçgenin kenarları ile oluşturduğu üçgenlerin alanları, B noktasının kenarlara uzaklıkları ile orantılıdır. Bu uzaklıklar, B noktasının barisantrik koordinatlarıdır.

$O(1,1,1), B(3/2, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2), \ B(\sqrt{3}, 1, -1)$

OA_0'ın ve buna dik doğrunun, sonsuzdaki doğruyu kestiği noktaları bulalım.

$A'_1 = O + \lambda A_0$

Barisantrik koordinatlarda sonsuzdaki doğru, birim doğrusudur. $A'_1(1 + \lambda, 1, 1)$ noktası birim doğrusunu sağlamalıdır. $\lambda = -3$ bulunur. x_1 ekseni sonsuzdaki doğruyu $A'_1(-2, 1, 1)$ noktasında, x_2 ekseni A_1A_2 ye paralel olduğundan, $A'_2(0, 1, -1)$ noktasında keser. Yeni koordinat üçgenimiz $OA'_1A'_2$ dür. Birim noktası da B dir.

(32) $$T = \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$$T_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}, \quad T_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}, \quad T_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$T_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{matrix} -6x'_0 = 2\sqrt{3}\,x_0 + 4\sqrt{3}\,x_1 + * \\ -6x'_1 = 2\sqrt{3}\,x_0 - 2\sqrt{3}\,x_1 + 6x_2 \\ -6x'_2 = 2\sqrt{3}\,x_0 - 2\sqrt{3}\,x_1 - 6x_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \rho' x'_0 = x_0 + 2x_1 + \ * \\ \rho' x'_1 = x_0 - x_1 + \sqrt{3}\,x_2 \\ \rho' x'_2 = x_0 - x_1 - \sqrt{3}\,x_2 \end{matrix}$$

Ek matris hesap edilerek, ters dönüşümler yazılır.

(33) $$\begin{matrix} \rho x_0 = x'_0 + x'_1 + x'_2 & \\ \rho x_1 = x'_0 - x'_1/2 - x'_2/2 & x_1 = (2x'_0 - x'_1 - x'_2) / [2(x'_0 + x'_1 + x'_2)] \\ \rho x_2 = * + \sqrt{3}x'_1/2 - \sqrt{3}x'_2/2 & x_2 = (* + \sqrt{3}x'_1 - \sqrt{3}x'_2)/[2(x'_0 + x'_1 + x'_2)] \end{matrix}$$

Üslü harfler noktanın barisantrik, üssüz harfler karteziyen koordinatlarını gösterir. Bir noktanın başlangıca uzaklığını, barisantrik koordinatlarda hesaplayalım. $A(x_1, x_2)$ olsun.

$$BA^2 = x_1^2 + x_2^2 = [(2x'_0 - x'_1 - x'_2)^2 + (\sqrt{3}x'_1 - \sqrt{3}x'_2)^2] / [2(x'_0 + x'_1 + x'_2)]^2$$

(34) $$BA = (x'^2_0 + x'^2_1 + x'^2_2 - x'_0 x'_1 - x'_1 x'_2 - x'_2 x_0)^{1/2} / (x'_0 + x'_1 + x'_2)$$

Barisantrik koordinatlarda, bir A noktasının B(1,1,1) noktasına uzaklığı bulunur.

Karteziyen koordinatlarda birim daire çizilir ve birin üçüncü ve dördüncü kökleri yerleştirilirse, Şekil 1 karşımıza çıkar. OA_1 ve OA_2 vektörleri, ilerde j ve k vektörleri ile gösterilecektir. Birin üçüncü ve dördüncü kökleri arasındaki ilgi nedeniyle, barisantrik ve karteziyen koordinatlar arasındaki dönüşümler, hep bu formülle yapılacaktır.

Temel noktaları, izotrop noktalar ve başlangıç noktası olan, koordinat sistemine, **sanal** koordinat sistemi denilecektir. Sanal koordinatlarla, dik koordinatlar arasındaki dönüşüm denklemlerini yazalım. Birim noktası x_1 ekseni üzerine getirilmiştir. Dönüşüm ve ters dönüşüm,

(35) $$T = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -i & i & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \rho x_0 = 2x'_0 \\ \rho x_1 = * + x'_1 + x'_2 \\ \rho x_2 = * - i\,x'_1 + i\,x'_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ x_1 = (x'_1 + x'_2)/2 \\ x_2 = i\,(-x'_1 + x'_2)/2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ x'_1 = x_1 + i\,x_2 \\ x'_2 = x_1 - i\,x_2 \end{matrix}$$

formülleri bulunur. Üslü harfler noktanın sanal, üssüz harfler de, karteziyen koordinatlarıdır. (35) formüllerinde, her zaman kullandığımız karmaşık sayıların, eşleniği ile beraber, noktanın sanal koordinatları olduğu görülür. Bir noktanın türdeş olmayan sanal koordinatlarının birincisine, o noktanın **karmaşık sayısı** denilir. (33) den x_1 ve x_2'ler yerine konulursa, barisantrik koordinatlarla sanal koordinatlar arasında, dönüşüm denklemleri bulunur.

(36) $$\begin{matrix} x_1 = (2x'_0 - x'_1 - x'_2 + i\sqrt{3}\,x'_1 - i\sqrt{3}\,x'_2) / [2(x'_0 + x'_1 + x'_2)] \\ x_2 = (2x'_0 - x'_1 - x'_2 - i\sqrt{3}\,x'_1 + i\sqrt{3}\,x'_2) / [2(x'_0 + x'_1 + x'_2)] \end{matrix}$$

1 in küp kökleri 1, j, k olduğuna göre,

$$\begin{matrix} x_1 = (x'_0 + j\,x'_1 + k\,x'_2) / (x'_0 + x'_1 + x'_2) \\ x_2 = (x'_0 + k\,x'_1 + j\,x'_2) / (x'_0 + x'_1 + x'_2) \end{matrix}$$

bulunur. Üslü harfler barisantrik koordinatları, üssüz harfler de sanal koordinatları gösterir. Burada barisantrik koordinat üçgeni eşkenardır. Barisantrik koordinatlardan, sanal koordinatlara doğrudan geçelim. (32) den izotrop noktaların, eşkenar üçgen barisantrik koordinatları, J_1(1, k, j), J_2(1, 1, 1), J_3(1, j, k) bulunur. Barisantrik koordinatların birim noktası, sanal koordinatların birinci temel noktasıdır.

$$T = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & k \\ 1 & k & j \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \rho x_0 = x'_0 + x'_1 + x'_2 \\ \rho x_1 = x'_0 + jx'_1 + kx'_2 \\ \rho x_2 = x'_0 + kx'_1 + jx'_2 \end{matrix}$$

T matrisi, sanal koordinat üçgeninin köşelerinin, barisantrik koordinatları ile yazılmıştır. Burada birim noktasına gerek görülmemiştir. Çünkü temel noktaların türdeş koordinatlarının ilki, 1 e indirgenmiş ve birinci denklem ile, sonsuzdaki doğrunun çakışması sağlanmıştır.

Sanal koordinatlar afindir.

(37) $z = x_1 + ix_2$, $w = x_1 - ix_2$, $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = (dz + dw)^2/4 - (-dz + dw)^2/4 = dz\,dw$

Eğer,

$$dw = f^2(z)\,dz$$

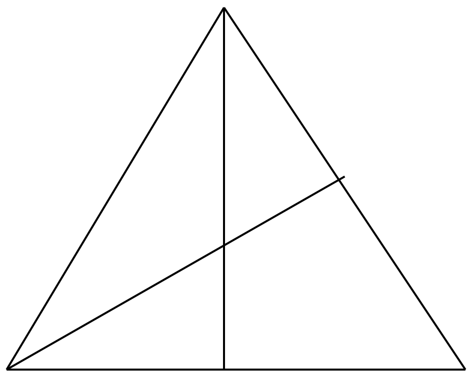
ise,

(38). $$ds = [\,dz\, f^2(z)\, dz\,]^{1/2} = f(z)\,dz$$

olur. Türevi , kendisinin karesine eşit olan karmaşık fonksiyonun yayı, kendisinin entegraline eşittir. Bu koşulu sağlayan fonksiyon yalnız sanal birim dairedir.

Düzlemde Noktanın Barisantrik Gösterilimi

Düzlemde eşkenar üçgene dayalı barisantrik koordinatları ile, sanal koordinatlar



Şekil 2

arasındaki dönüşümü göz önüne alalım. A_0B açıortayı üzerindeki bir noktanın koordinatları gerçeldir. Bu eksene gerçel eksen denilecektir.

$$C(\lambda + 1, 1, 1), \qquad C[1, 1/(\lambda + 1), 1/(\lambda + 1)]$$

A_1B ve A_2B açıortayları üzerindeki bir noktanın koordinatları sanaldır. Bu eksenlere sanal eksen denilecektir.

Şekil 2 de sağ köşe $A_0(1,0,0)$, $(1,1,1)$, üst köşe $A_1(0,1,0)$, $(1, j, k)$, sol köşe $A_2(0,0,1)$, $(1,k,j)$ dir. $B(1,1,1)$,$(1,0,0)$ ağırlık merkezidir. Birinci parantezdeki sayılar noktaların barisantrik koordinatları, ikinci parantezdeki sayılar, sanal koordinat sistemindeki koordinatlarıdır.

$D(1+\mu, j\mu, k\mu)$, $D[1, j\mu/(1+\mu), k\mu/(1+\mu)]$, $E(1+\nu, k\nu, j\nu)$, $E[1, k\nu/(1+\nu), k\nu/(1+\nu)]$.

Bu koordinatlar sanal koordinatlardır. Sanal koordinatların türdeş olmayan ikinci koordinatı karmaşık sayı olarak tanımlanmıştı. Genel olarak herhangi bir noktanın sanal koordinatları $M(a_0 + a_1 + a_2,\ a_0 + ja_1 + ka_2,\ a_0 + ka_1 + ja_2)$ biçiminde olacaktır. Türdeş olan ikinci koordinata

(39) $$BM = a_0 + ja_1 + ka_2$$

vektörüne **Üst karmaşık sayı**, türdeş olmayan (40)'ın ikinci koordinata da, M noktasının **barisantrik vektörü** veya **barisantrik karmaşık** sayısı denilecektir.

(40) $$BM = (a_0 + ja_1 + ka_2)/(a_0 + a_1 + a_2)$$

Türdeş olma ve türdeş olmama ayrımı, (32) dönüşüm formülüne dayandırılmıştır. (32) dönüşüm formülünde $x_0 = 1$ ve $\rho' = 3$ alınırsa, bir noktanın barisantrik koordinatları toplamı 1 bulunur. İkinci yan türdeş olmayan dik koordinatlardır. Dik koordinatlarda türdeş olmayan koordinatların, eşkenar üçgene dayalı barisantrik koordinat sistemindeki karşıtı, toplamı 1 olan barisantrik koordinatlardır. Bu nedenle türdeş olmayan koordinatların barisantrik koordinatlardaki karşıtı, toplamı 1 olan barisantrik koordinatlardır. Barisantrik koordinatların bu biçimine **barisantrik biçim** denilecektir. Barisantrik koordinat üçgeni eşkenardır. Konumuz gereği, eşkenar olmayan üçgenler, söz konusu edilmeyecektir. Eşkenar üçgen nedeni ile, bir noktanın barisantrik koordinatları toplamı, eşkenar üçgenin yüksekliğine bir parametre ile bağlıdır.

$$\lambda(a_0 + a_1 + a_2) = h$$

h eşkenar üçgenin yüksekliği olup, koordinat sisteminde birimin seçilmesi ile belirlenir. Koordinatlar toplamı, yalnız λ parametresine bağlıdır. Bu nedenle nokta değişmekle, payda bir parametreye bağlı olarak değişir. Karmaşık sayıların karteziyen koordinatlarda tanımlandığı gibi, barisantrik karmaşık sayılar da, eşkenar üçgene dayalı barisantrik koordinat sisteminde tanımlanır. Üst karmaşık sayılarla, cebirsel işlemler yapılamaz. Metrik özelikler incelenemez. Ancak projektif ve afin özelikler incelenebilir. Karteziyen koordinatların karmaşık sayılarının, bu nedenle türdeş olanları yoktur.

z barisantrik karmaşık sayısının M ucunun başlangıç noktasına uzaklığını, sanal koordinatlarda hesaplayalım. Başlangıca uzaklık formülünde (35) dönüşüm formülünde, karteziyen koordinatlar yerine, karşıtı olan sanal koordinatları koyarsak,

$$d^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x'_1 + x'_2)^2/4 - (-x'_1 + x'_2)^2/4 = x'_1 x'_2$$

bulunur.

$$BD^2 = (j\mu\, k\mu /[(1+\mu)(1+\mu)], \quad BD = \mu / (1+\mu)$$

olur. A_1B doğrusunun A_0B başlangıç doğrusu ile yaptığı açıyı, sanal koordinatlarda hesaplayalım. Laguerre formülünden (Prof. Dr Macit Büke Analitik Geometri I),

$e^{i\alpha} = 1/(dd', jj')^{1/2}$, $(dd', jj') = \{dj\}\{d'j'\} : [\{dj'\}\ \{d'j\}]$, $d[0, -k, j]$, $d'[0, -1, 1]$, $J(0,1,0)$, $J'(0,0,1)$, $(dd', jj') = -k.1 : (j.(-1)) = k/j = k^2$, $e^{i\alpha} = 1/k = j = e^{2\pi/3i}$, $e^{i\beta} = k = e^{4\pi/3i}$

$e^{i\alpha}$, α argümanlı birim vektördür. j ve k, 1 in küp kökleri olduğundan, argümanları sıra ile 120^o ve 240^o dir. 1, BA_0 doğrultusunda, j, BA_1 doğrultusunda, benzer biçimde k da, BA_2 doğrultusunda birim vektörlerdir. Genel olarak barisantrik vektör, düzlemin bir noktasını gösterir. Gerçel terim BA_0 üzerinde, j'li terim BA_1 üzerinde ve k lı terimde BA_2 üzerinde alınır ve paralelkenar kuralı ile bu bileşenler toplanır. Bileşke vektör, bileşenlerin sayısal toplamına bölünürse, barisantrik koordinatların belirlediği nokta bulunur. Çünkü sanal koordinat sistemi afindir. Bu nedenle paralelkenar kuralı geçerlidir. Sanal koordinatlar, türdeş olmayan konuma getirilmiştir. Barisantrik karmaşık sayılar, bu toplam kuralı ile, bileşenlerini düzlemde barisantrik koordinatlar olarak kabul eden, nokta ile çakışır. Şekil üzerinde, itinalı bir çizim yaparak bu özelik görülebilir. Gerçekte noktayı belirleyen, her iki sistemin koordinatlarıdır. Sanal koordinatların ikincisi alınmış, fakat üçüncüsü alınmamıştır. Onun yerine, ikinci sanal koordinatın içine, barisantrik koordinatlar konulmuştur. Noktayı sanal koordinatlar, vektör biçimine koymuş ve BA_0, BA_1, BA_2 eksenleri doğrultusunda bileşenlere ayırmıştır. Sanal koordinat sistemi afin olduğundan, bileşenlerin paralelkenar kuralına göre toplanmasını sağlamıştır. Düzlemde her noktaya, bir barisantrik karmaşık sayı ve her barisantrik karmaşık sayıya da bir nokta karşılık gelir.

$A(x_0, x_1, x_2)$ barisantrik koordinatları ile verilen noktanın barisantrik karmaşık sayısı, yukarda açıklanan parelelkenar kuralı ile,

$$BA = (x_0 + jx_1 + kx_2)/(x_0 + x_1 + x_2)$$

olur. p gerçel olmak üzere, $p(1 + j + k) = 0$ dır. Kesrin payına bu değerin eklenmesi ile A noktasının yeri değişmez. Örnek olarak, bu kural ile, bir karmaşık sayıyı, değerini bozmadan barisantrik konuma getirelim.

$$A = x_0 + jx_1 + kx_2 + p(1 + j + k) = x_0 + p + j(x_1 + p) + k(x_2 + p) = a_0 + ja_1 + ka_2$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = x_0 + p + (x_1 + p) + (x_2 + p) = x_0 + x_1 + x_2 + 3p = 1,$$

(41) $$p = (1 - x_0 - x_1 - x_2)/3$$

p'nin katsayısı sıfırdır. p yerine bu değer konulursa, karmaşık sayının değeri bozulmadan barisantrik konuma gelmiştir. İşlemlerde kısalık sağlamak ve barisantrik biçim oluşturmak için, bu özelikten yararlanılır. Ancak uzayda bu özelik geçerli değildir. Barisantrik koordinatlarla A(1, 2, 3) noktası verilsin.

$$p = -1, \qquad BA= (1 + 2j + 3k)/6 = (j + 2k)/6$$

dır. Bu işlemle sayının gösterdiği nokta değişmez. Yalnız barisantrik biçim bozulur. Yani bileşenlerin toplamı, 1 olmayıp, pay ile payda, aralarında biri diğerini tam olarak böler. İki barisantrik karmaşık sayının, çarpımı, bölümü ve kuvvetleri, gene barisantrik karmaşık sayılardır. Barisantrik karmaşık sayılar, gurup aksiyomlarını sağlarlar. Türdeş barisantrik karmaşık sayılar, gerçekte karmaşık sayılar değildirler. Çünkü iki boyutlu uzayda üç bağımsız bileşeni vardır. Halbuki barisantrik karmaşık sayıların bileşenleri toplamı 1 olma koşulu vardır. Bağımsız bileşen sayısı boyut sayısına eşit olur. Bir barisantrik karmaşık sayı, bir m sayısı ile çarpılabilir. Bu defa bileşenleri toplamı, paydanın katı olur. Barisantrik biçim gene bozulur. Ancak nokta istenilen yere gelmiştir. Barisantrik biçimi düzeltmek için, yani sayının bileşenleri toplamının bir olması için, p = (1– m)/3 alınarak, barisantrik karmaşık sayıya eklenir. m sayısal çarpandır. Eğer m ile bölünürse, p = (1 – 1/m)/3 alınıp, kesre eklemelidir. İki karmaşık sayının toplamında, bileşenlerin toplamı paydanın iki katı, üç sayının toplamında ise, bileşenlerin toplamı paydanın üç katı olur. Çıkarılmasında, bileşenlerin toplamı sıfır olur. Sonuç olan nokta, istenilen yerdedir. Fakat barisantrik biçim bozulmuştur. n tane sayı toplanıyorsa, p = (1 – n)/3 alınarak, kesre eklenir. Çıkarmada, n terim çıkarılıyorsa, p = n/3 alınarak, kesre eklenir. Harflerle yazılır ve paydalar eşitlenirse, bu özelikler kolayca görülür.

$$5(2 + 5j + 4k)/11 = (10 + 25j + 20k)/11 - 4(1 + j + k)/3 = (-14 + 31j + 16k)/33$$

$$(3 +2j - k)/4 - (5 - 3j +4k)/6 = (-1 + 12j - 11k)/12,$$

$$(-1 + 12j -11k)/12 + (1 + j + k)/3 = (3 + 16j - 7k)/12$$

Barisantrik karmaşık sayıların, bir noktası olması nedeni ile, nokta ile ilgili bir özeliğine değineceğim. Barisantrik koordinatlarda, A(2, 4, –1) ve B(1, 1, 1) noktalarını ve

$$BA = (2 + 4j - k)/5, \qquad 4\,BA = (8 + 16j - 4k)/5$$

sayılarını göz önüne alalım. Barisantrik karmaşık sayıların başlangıç noktası, barisantrik koordinat üçgeninin birim noktasıdır. İkinci noktayı barisantrik biçime koyalım.

$$p = -1 \qquad 4BA = (3 + 11j - 9k)/5$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -9 \end{array} = 0$$

olmasından başlangıç noktası, BA ve 4BA sayılarının noktaları, bir doğru üzerindedirler. (34) formülü kullanılarak, B ve A noktaları arasındaki uzaklığın, barisantrik vektörün şiddetine eşit olduğu görülür. Diğer yandan, BA sayısının 4 katının şiddeti ile, barisantrik konuma konulmuş barisantrik karmaşık sayının şiddetinin eşit olduğu görülür.

$$4(2^2 + 4^2 +1^2 - 2.4 +2.1 + 4.1)^{1/2}/(2 + 4 - 1) =$$

$$(3^2 + 11^2 + 9^2 - 3.11 + 3.9 + 11.9)^{1/2}/(3 + 11 - 9) = 4\sqrt{19}/5$$

Her hangi iki barisantrik karmaşık sayının üç bileşeni de eşit ise, bu sayılar eşittir. Bir sayı ile çarpılmış veya iki barisantrik sayının toplamı iseler, barisantrik konuma konduktan sonra karşılaştırma yapılmalıdır. Bir barisantrik karmaşık sayı, bir sayı ile çarpılır veya ikisi toplanırsa, barisantrik biçim bozulur. Yeniden barisantrik konuma konarak, üçüncü bir sayı ile toplamı veya farkı, barisantrik konuma konmadan yapılacak toplama veya farkına eşittir. Bileşenleri bilinen ve barisantrik konumu bozulan bir sayıyı, barisantrik karmaşık sayı konumuna getirmek için, her bileşene p eklenip, bileşenleri toplamının, 1 e eşit olması p'ye verilecek değerle sağlanır.

(42) $z = a_0 + ja_1 + ka_2$, $(p + a_0) + (p + a_1) + (p + a_2) = 1$, $p = (1 - a_0 - a_1 - a_2)/3$,

$$z = (1 + 2a_0 - a_1 - a_2)/3 + (1 - a_0 + 2a_1 - a_2)/3\, j + (1 - a_0 - a_1 + 2a_2)/3\, k$$

Sayı hem barisantrik konuma gelmiş ve hem de noktası değişmemiştir.

Düzlemde karmaşık sayıların i elemanı, vektör olduğu halde, vektör işareti ile gösterilmez. Bu geleneğe uyarak, **1**, **j**, **k** vektör elemanları da, düzlemde vektör işareti ile gösterilmeyecek, uzaydakiler ise, karışıklığa fırsat vermemek için, vektör işareti ile gösterilecektir.

Barisantrik Karmaşık Sayının Eşleniği:

(42) de z ile verilen üst karmaşık sayının eşleniği,

(43) $$\bar{z} = (a_0^2 - a_1 a_2) + j(a_2^2 - a_0 a_1) + k(a_1^2 - a_0 a_2)$$

dir. z ile çarpıldığı zaman, sonucun gerçel olduğu görülür. Burada eşlenik iki tanedir. Birinci eşlenik, karmaşık eşlenik sayıda, j yerine k ve k yerine j konularak bulunan sayıdır. İkinci eşlenik ise, (43) ile verilen üst karmaşık sayıdır. Sanal koordinat üçgeninin üç temel doğrusu düzgün olmayan doğrulardır. İkisi izotrop, üçüncüsü de sonsuzdaki doğrudur. (53) de açıklanmıştır. Bu doğruların barisantrik denklemleri,

(44) $$x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad x_0 + jx_1 + kx_2 = 0, \quad x_0 + kx_1 + jx_2 = 0$$

dir. Bu doğrulardan herhangi ikisinin çarpımı, üçüncünün eşleniğidir. Üçünün çarpımı (45)'in ikinci denklemidir.

(45) $$z\bar{z} = (a_0 + ja_1 + ka_2)[(a_0^2 - a_1 a_2) + j(a_2^2 - a_1 a_0) + k(a_1^2 - a_0 a_2)]$$

$$z\bar{z} = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3\, a_0 a_1 a_2$$

(46) $$|z| = (a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0 a_1 a_2)^{1/3}$$

$$|\bar{z}| = [(a_0^2 - a_1a_2)^3 + (a_2^2 - a_1a_0)^3 + (a_1^2 - a_2a_0)^3 - 3(a_0^2 - a_1a_2)(a_2^2 - a_1a_0)(a_1^2 - a_2a_0)]^{1/3}$$

$z\bar{z}$ nin küp köküne z nin **mutlak değeri** denilir. Benzer olarak $\bar{z}$ nin mutlak değeri tanımlanır. **(**46) de mutlak değerler verilmiştir. Mutlak değerler arasında,

(47) $$|z|^2 = |\bar{z}|$$

bağıntısı vardır. Her iki tarafın küpleri alındığı zaman, eşitlik görülür. (45) özdeşliğinden yararlanarak, bölme işlemi yapılır.

(48) $$(b_0 + jb_1 + kb_2)/(a_0 + ja_1 + ka_2) = (b_0 + jb_1 + kb_2)[(a_0^2 - a_1 a_2) + j(a_2^2 - a_1 a_0) + k(a_1^2 - a_0 a_2)]/(a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3\, a_0 a_1 a_2)$$

Düzlemde Noktanın Matrisle Gösterilimi

Düzlemde analitik olarak bir nokta, koordinat sayıları ile belirlendi. İkinci olarak karmaşık düzlemde karmaşık sayılarla belirlendi. Burada bir nokta matrisle belirleecektir.

$$I = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}, \quad j = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}, \quad k = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Matrisleri, birim matrisin küp kökleridir. Bu matrislerin bir doğrusal toplamı olan,

$$P = aI + bj + ck$$

İfadesi, üçüncü mertebeden bir matristir. Bağımsız üç elemanı vardır. Bağımsız elemanların yerleri matrislerdeki 1'lerin yerleridir. Barisantrik koordinatlarda, temel noktaları eşkenar üçgenin köşeleri olan, P matrisine **sayı** veya **nokta matrisi** denilecek ve bu matrisin $A_0(1,0,0)$ birinci temel noktayı, dönüştürdüğü noktaya da, **matrisin noktası** veya **matrisin sayısı** denilecektir. P matrisi ile, [[1 0 0]] sütun matrisinin çarpımı,

$$P(a, b, c) = \begin{matrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

dır. Bu işlemle, her noktaya bir matris ve her matrise bir nokta karşılık gelir. Nokta matrisleri çarpma ve bölme işlemlerine göre kapalıdır. Yani nokta matrisleri, matrisler gurubunun çarpma işlemine göre alt gurubudur. Nokta matrisler gurubu, barisantrik karmaşık sayılar gurubuna izomorftur. Bu özelikleri, kısalık olması için sayısal olarak görelim.

(49) $$\begin{matrix} 3 & 2 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 4 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 27 & 24 & 19 \end{matrix}$$

$$P = \begin{matrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{matrix}, \quad Q = \begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}, \quad PQ = \begin{matrix} 19 & 27 & 24 \\ 24 & 19 & 27 \end{matrix}$$

$$R = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}, \quad R^{-1} = \begin{matrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \\ -5 & 1 & 7 \end{matrix} \ \mathbf{:}18, \quad P/R = \begin{matrix} -2 & 4 & 28 \\ 28 & -2 & 4 \\ 4 & 28 & -2 \end{matrix} \ \mathbf{:}\,18$$

Bu nokta matrislerinin noktalarının, barisantrik vektörlerini yazalırsa,.

(50) $z_p = (3 + 5j + 2k)/10, \quad z_q = (1 + 2j + 4k)/7,$

$$z_p\, z_q = (3 + 5j + 2k)\,(1 + 2j + 4k)/70 = (27 + 19j + 24k)/70, \quad PQ(\,27,19,24)$$

bulunur. PQ ve P/R matrislerinin karşılığı olan noktaların barisantrik vektörleri, matrislerinden yazalırsa,.

$$z_{pq} = (\,27 + \ 19j + 24k)/70$$

(51) P/R (–1/9, 14/9, 2/9), $z_{p/r} = (-1 + 14j + 2k)/15, \quad z_r = (3 + j + 2k)/6$

$$z_{p/r} = z_p\,/\,z_r = [(3 + 5j + 2k)/10]\,/[(3 + j + 2k)/6]$$

(52) den, eşlenikle pay ve payda çarpılırsa,

$$z_{p/r} = (3 + 5j + 2k)\,(7 + j - 5k)\,6\,/\,[(3 + j + 2k)\,(7 + j - 5k)\,10]$$

$$z_{p/r} = 6\,(-2 + 28j + 4k)\,/\,180 = (-1 + 14j + 2k)\,/\,15$$

bulunur. (51) de P/R’nin barisantrik koordinatları, nokta matrisinden yazılmıştır. Bunların türdeşlikten dolayı, paydalarındaki 9'lar atılırsa, sonuçtaki P/R nin, barisantrik vektörü ile çakıştığı görülür. Bu örneklerden nokta matrislerinin, matris gurubunun alt gurubu olduğu ve barisantrik vektörle matris işlemlerinin çakıştığı görülmektedir. Bu sayılar yerine harfler konularak, genel kanıtlama yapılır.

Düzgün ve Düzgün Olmayan Noktalar

Barisantrik koordinatlarda,M(x_0, x_1, x_2) noktasının matrisinin determinantı,

(53)
$$m = \begin{matrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{matrix} = x^3_0 + x^3_1 + x^3_2 - 3x_0x_1x_2 = (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + jx_1 + kx_2)\,(x_0 + kx_1 + jx_2)$$

dır. Bu çarpanların sıfıra eşit olmasıyla, determinant sıfır olur. (45) nedeni ile, barisantrik vektörün ve üst karmaşık sayının mutlak değeri sıfır olur. Mutlak değeri sıfır olan vektörler, ilerde açıklanacaktır. Matris düzgün değildir. Düzgün olmayan matrislerin belirlediği noktalara**, düzgün olmayan nokta** (**sayı)**, düzgün matrislerin belirlediği noktaya da, **düzgün nokta** denilecektir. Bu çarpanlar sıfıra eşitlenerek, izotrop doğruların ve sonsuzdaki doğrunun barisantrik denklemleri bulunur. Birinci, doğrunun sıfıra eşitlenmesi, barisantrik koordinatlarda, sonsuzdaki doğruyu, diğerleri de izotrop doğruları verir. Bu üç doğrunun belirlediği üçgene **izotrop üçgen** denilecektir. Bir nokta matrisinin rangı, o noktanın rangı olarak tanımlanacaktır. Düzgün nokta veya sayıların matrisinin rangı 3, izotrop doğrular üzerindeki noktalarda, matrisin rangı 2, izotrop üçgenin köşelerinde ise, matrisin rangı 1 dir. Düzgün olmayan noktalarda, uzaklıklar ve açılar ölçülemez, diklikten söz edilemez. Bu noktalarda karmaşık sayılar tanımlanamaz, karmaşık sayılarla cebirsel işlemler yapılamaz.

Barisantrik karmaşık sayısını, p(1 + j + k) sayısı ile bölmek, parantez içerisi sıfır olduğundan, olanaksızdır. Bu sayının rangı ikidir, düzgün olmayan sayıdır. Bu sayıyı, bir barisantrik karmaşık sayıya, ekleyip çıkarmakla değer değişmez. Barisantrik karmaşık sayının bir bileşeni yok olacak biçimde, p ye değer verilerek, barisantrik karmaşık sayı, iki bağımsız bileşene indirgenir. .

(53) e göre koordinatları toplamı sıfır olan nokta, düzgün olmayan noktadır. Bu türlü noktalar gerçel olduğundan, sıkça karşılaşılır. Barisantrik karmaşık sayılarda, bileşenler toplamı sıfır olduğu zaman, nokta düzgün olmaz ve cebirsel işlem yapılamaz. Her bileşene aynı sayı eklenir veya çıkarılırsa, barisantrik karmaşık sayının noktası değişmez ve düzgün nokta olur. Bu durum genel olarak çıkarma işlemlerinden sonra görülür. Her hangi bir matematik programda, çıkarma işlemlerinin vereceği değerler, gözetlenmelidir. Eğer düzgün

olmayan nokta ile karşılaşılırsa, bileşenlerine yukarda verilen formüllere uygun olarak ekleme veya çıkarma yapılmalıdır.

Düzlemdeki noktaların karmaşık sayıları vardır. İzotrop doğru üzerindeki noktaların, bu düzlemde tanımlanmış karmaşık sayısı, yoktur. Fakat izotrop doğru üzerinde alınacak, yeni dayanak noktalarına göre, uzunluk ve karmaşık sayı tanımı yapılabilir.

Düzlemde Noktaların Parametrik Gösterilimi

Doğru üzerindeki noktaların parametrik gösterilimi, genel olarak başlangıca uzaklığı ile belirlenir. Bir noktanın parametresi ile, noktanın üzerinde dört işlem yapılabilir. Parametrenin özeliği, dört işleme sahip olmasıdır. Noktanın koordinatları, bu özeliğe sahip değildirler. Düzlemde ve uzayda, vektör kavramı ile noktaların toplama, çıkarma ve özel çarpma işlemleri yapılabilir Fakat bölme işlemi yapılamaz. Karmaşık sayılar, düzlemde bir nokta gösterirler ve dört işlem özeliğine de, sahiptirler. Düzlemde noktaların parametresi olarak, karmaşık sayılar kullanılacaktır. Barisantrik karmaşık sayılar da, aynı işi göreceklerdir.

Düzlemde bir noktanın karmaşık sayısı, noktanın dik koordinatları ile oluşturulur.

(54) $A(x_1, x_2), \qquad \rho_A = x_1 + ix_2$

noktanın karmaşık sayısı veya parametresi olarak kullanılacaktır. A noktasının barisantrik karmaşık sayısı için, (39) dan,

$$\mathbf{BM} = (a_0 + ja_1 + ka_2)/(a_0 + a_1 + a_2)$$

noktanın, barisantrik koordinatlarının bilinmesine gereksinim vardır. (32) ve (33) den,

(32) $\rho'x'_0 = x_0 + 2x_1$ (33) $x_1 = (2x'_0 - x'_1 - x'_2) / [2(x'_0 + x'_1 + x'_2)]$

$\rho'x'_1 = x_0 - x_1 + \sqrt{3}\, x_2$ $\qquad x_2 = (* + \sqrt{3}x'_1 - \sqrt{3}x'_2)/[2(x'_0 + x'_1 + x'_2)]$

$\rho'x'_2 = x_0 - x_1 - \sqrt{3}\, x_2$

dönüşüm formülleri ile barisantrik veya karteziyen koordinatlar bulunacaktır. Üslü harfler noktanın barisantrik koordinatları, üssüz harfler ise, karteziyen koordinatlarıdır. Karteziyen koordinatlarla verilen bir noktanın, barisantrik karmaşık sayısı,

(56) $\rho_A = [1 + 2x_1 + (1- x_1 + \sqrt{3}\, x_2)\, j + (1 - x_1 - \sqrt{3}\, x_2)\, k]/[1 + 2x_1 + (1- x_1 + \sqrt{3}\, x_2)$
$+ (1 - x_1 - \sqrt{3}\, x_2)] = x_1 + ix_2$

dir. Bu sonuçtan da görüleceği gibi, karmaşık sayılarla, barisantrik karmaşık sayılar aynıdır. $A(a_0, a_1, a_2)$ barisantrik koordinatları ile verilen bir noktanın, karmaşık sayısı, barisantrik koordinat üçgeni eşkenar olduğuna göre, (33) yardımı ile,

(57) $\rho_A = [(2x'_0 - x'_1 - x'_2) + i(\sqrt{3}x'_1 - \sqrt{3}x'_2)]/[2(x'_0 + x'_1 + x'_2)]$

dır. $J_1(1, -k, j)$, $J_2(1, -1, 1)$, $J_3(1, -j, k)$ barisantrik koordinatları ile verilen noktaların, karmaşık ve barisantrik karmaşık sayıları, J_1'e (40) formülü uygulanırsa,

(58) $\rho_{J1} = (1 - k\, j + j\, k)/(1 - k + j) = (1 - 1 + 1)/(1 - k + j)$

$$\rho_{J1} = 1/(1 - k + j) = 1/(-2\, k) = -j/2$$

(59) $1 + j + k = 0$

İkinci satırda pay ve payda j ile çarpılmıştır. Genel olarak bölme işlemi, (48) formülüne göre yapılır. Burada, (59) eşitliğinden de yararlanılmıştır.

(60) $\rho_{J1} = (1 - \sqrt{3}\, i)/4, \qquad \rho_{J1} = -j/2 = (1 + k)/2,$

Birincisi karmaşık, ikincisi, barisantrik karmaşık sayıdır. $J_2(1, -1, 1)$ noktasının,

$$\rho_{J2} = (1 + (-1)\, j + 1\, k)/(1 - 1 + 1) = 1 - j + k$$

barisantrik karmaşık sayısıdır. Çünkü katsayıların toplamı 1 dir. j ve k yerlerine,

(61) $j = (-1 + \sqrt{3}\, i)/2, \qquad k = (-1 - \sqrt{3}\, i)/2,$

konulur ve kısaltılırsa,

$$\rho_{J2} = 1 - (-1 + \sqrt{3}\, i)/2 + (-1 - \sqrt{3}\, i)/2 = -2j,$$

(62) $\rho_{J2} = 1 - \sqrt{3}\, i, \qquad \rho_{J2} = -2j = 1- j + k$

bulunur. Elde edilen sonucun birincisi karmaşık sayı, ikincisi barisantrik karmaşık sayıdır.

Üçüncü $J_3[1, -j, k)$ noktasının,

$$\rho_{J3} = (1 - j\, j + k\, k)/(1 - j + k) = (1 - k + j)/ (1 - j + k) = (-2k)/(-2j) = j$$

(63) $\rho_{J3} = (-1 + \sqrt{3}\, i)/2, \qquad \rho_{J3} = j$

birincisi karmaşık, ikincisi barisantrik karmaşık sayısıdır.

Parametresi verilen noktanın, dik ve barisantrik koordinatları, karmaşık sayıda, dik koordinatlar için, gerçel kısım apsis, sanal kısım ordinat, barisantrik koordinatlar ise, (32) formülü kullanılarak bulunur. Barisantrik karmaşık sayıda j ve k yerlerine, (61) den değerleri konulursa, karmaşık sayı elde edilir. Buradan, yukardaki işlem tekrarlanır, barisantrik koordinatlar bulunur. Barisantrik karmaşık sayısı bilinen nokta, doğrudan bulunabilir.

$J_1(1, -k, j)$ noktasını barisantrik karmaşık sayısı,

$$\rho_{J1} = -j/2 = (1 + k)/2,$$

ikinci yanı barisantrik karmaşık sayıdır. Payda, katsayılarının toplamıdır. $J_1(1, 0, 1)$ noktası, verilen barisantrik karmaşık sayının noktasıdır. Aynı sayıyı, sanal noktalardan da, barisantrik karmaşık sayı kabul edenler vardır. Bir noktanın üç barisantrik koordinatının, barisantrik karmaşık sayı olduğunu varsayalım. Barisantrik karmaşık sayının, iki bağımsız değişkeni vardır. Katsayıların toplamının 1 olma koşulundan, 6 bağımsız değişkenin, biri eksilir, noktanın beş bağımsız değişkeni kalır. Bu nokta, iki bağımsız değişkeni olan bir sayı ile ifade edilemez. Fakat koordinatlar, bir tane sanal veya gerçel sayıdan oluşursa, bağımsız değişken dengesi sağlanır ve sanal noktaların da, barisantrik karmaşık sayıları bulunur. Pay ve paydasını k ile çarpalım.

$$\rho_{J1} = -j/2 = (1 + k)/2 = 1/(-2k) = 1/(-2k + 1 + j + k) = 1/(1 + j - k)$$

paydaya, değeri sıfır olan sayı eklendi ve kısaltıldı. Barisantrik karmaşık sayıyı oluştururken, katsayıların toplamı paydaya yazılmıştı. Paydanın elde edilmesi ile, noktanın koordinat sayıları belli olmuştur. Bunlar $1, -k, j$ olmalıdırlar. Birinci koordinat genelde, gerçel olur. j ve k dan hangisinin ikinci, hangisinin üçüncü, koordinat olduğu bilinmiyor. Karşımıza çıkan iki hal denenecektir. j ikinci, k da üçüncü koordinat olarak alınırsa, barisantrik karmaşık sayının oluşturulmasında, ikinci j ile, üçüncü k ile çarpılıp, toplanır.

$$\rho_{J1} \neq (1 + jj - kk)/(1 - k + j) = (1 + k - j)/(1 - k + j)$$

Yukarda pay, 1 bulunmuştu. Bu deneme uygun düşmedi. Eğer k ikinci, j üçüncü alınırsa, sonuç uygun düşer.

$$\rho_{J1} = -j/2 = 1/(1 - k + j) = (1 - jk + kj)/(1 - k + j)$$

Payın 1 olduğu görülüyor. $J_1(1, -k, j)$ noktası aranan noktadır.

$J_2(1, -1, 1)$ noktasını barisantrik karmaşık sayısı,

$$\rho_{J2} = -2j = (1 - j + k)/(1 - 1 + 1)$$

dır. 9'uncu sayfada açıklanan kurala göre, j barisantrik karmaşık sayısı, – 2 ile çarpılıp, barisantrik konuma getirmek için, $p = (1 - m)/3$ ifadesinde, m yerine – 2 koyup, p = 1 alarak, $-2j$, $1 + j + k$ ile toplanırsa,

$$\rho_{J2} = -2j + 1 + j + k = 1 - j + k$$

bulunur $J_2(1, -1, 1)$ aranan noktadır. Çünkü bulunan sayı barisantrik karmaşık sayı olup, koordinatları toplamı 1 dir. Noktanın ikinci koordinatı j ile, üçüncü koordinatı da, k ile çarpılmıştır.

$J_3(1, -j, k)$ noktasını barisantrik karmaşık sayısından bulalım. J_1 ifadesinde paydada bulunan – 2k dan yararlanılmıştı. Burada da, aynı yöntem uygulanacaktır. Pay ve payda – 2j ile çarpılsın.

$$\rho_{J3} = j = -2k/(-2j) = -2k/(-2j + 1 + j + k) = -2k/(1 - j + k)$$

Paydanın bulunması ile, noktanın koordinatları bulunmuştur. Sırasını araştıralım. İkinci koordinat $-j$, üçüncü koordinat k alınırsa uygun düşer.

$$\rho_{J3} = j = (1 - jj + kk)/(1 - j + k) = (1 - k + j)/(1 - j + k)$$

Payda 1 + j yerine – k konulursa, – 2k bulunur. Aranılan nokta, $J_3(1, -j, k)$ noktasıdır.

İzotrop noktaların, izotrop doğrular, izotrop düzlemler ve izotrop üst (hiper) düzlemler üzerinde bulunan noktaların, karmaşık ve barisantrik karmaşık sayıları yoktur.

Kitabın sonunda, Borland Pascal bilgisayar programı ile yapılan uygulamalarda, bu sonuçlar kullanılmıştır.

Teorem: Bir barisantrik karmaşık sayının, ters işaretliler dışında, iki tane kare kökü vardır.

$$x^2 = y^2, \quad x = a + jb + kc, \quad y = d + je + kf,$$
$$x^2 - y^2 = [a - d + j(b - e) + k(c - f)]\,[a + d + j(b + e) + k(c + f)] = 0$$

İki karmaşık sayının karelerinin eşit olması için, bu çarpanlardan biri, sıfır olmalıdır. Birinci çarpan sıfır olursa, sayılar eşit, ikinci çarpan sıfır olursa, sayılar ters işaretle eşit olurlar. Burada vektörlerin temel özeliklerinden olan, doğrusal bağımsızlık kuralı uygulanmıştır. $1 + j + k = 0$ özdeşliği göz önüne alınırsa, bu ifadenin p katı bir sayıya eklendiğinde, sayının şiddeti değişmez. İkinci sayıya, şiddeti sıfır olan bu sayı eklenir ve kareleri eşitlenirse,

$$x = y + p(1 + j + k), \quad a = d + p, \quad b = e + p, \quad c = f + p,$$
$$a^2 + 2bc = (d + p)^2 + 2(e + p)(f + p) = d^2 + 2dp + p^2 + 2p(e + f) + 2p^2 + 2ef = d^2 + 2ef$$

bulunur. Karelerinin birinci bileşenlerin eşitlenmesi, p'nin hesabı için yeterlidir. Kısaltmalar yapıldıktan sonra,

$$3p^2 + 2p(d + e + f) = 0, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -2(d + e + f)/3$$

iki kök bulunur. p'nin sıfır değeri eşitliği sağlar. Diğer kök, yeni bir sayı verir. Bu sayıların kareleri eşittir.

Örnek:

$$y = 3 + 2j - k, \quad y^2 = 5 + 13j - 2k, \quad p = \pm 2(3 + 2 - 1)/3 = \pm 8/3$$
$$x = (1 - 2j - 11k)/3, \quad x^2 = (45 + 117j - 18k)/9 = 5 + 13j - 2k$$

$1 + j + k$ ifadesi bir vektördür. Şiddeti sıfırdır. Fakat doğrultusu ve yönü vardır. Bu vektör izotrop doğru üzerinde olduğu için, uzunluğu, yani şiddeti sıfır olmuştur. Bu nedenle x ve y vektörleri, aynı bir vektör olarak düşünülemez. İkinci vektör üzerinde, p ile eklenen terim, doğrultu ve yön üzerinde, etkinlikte bulunacaktır. Bu karmaşık sayıların şiddeti, karesine dayalı olarak tanımlanmalıdır.

Tanım: Bir barisantrik karmaşık sayının, karesinin mutlak değerinin kare köküne, şiddeti denilir. Mutlak değer (46) da verilmiştir. Bu tanım, klasik vektör kavramının şiddet tanımı ile örtüşür.

III
DÜZLEMDE PROJEKTİF DÖNÜŞÜMLER

Üçlü homografi

Barisantrik koordinatlarda $A(a_0, a_1, a_2)$, $B(b_0, b_1, b_2)$, $C(c_0, c_1, c_2)$, $D(d_0, d_1, d_2)$, $E(e_0, e_1, e_2)$, $F(f_0, f_1, f_2)$, $P(1, \lambda, \mu)$, Q, R noktaları ile, sanal sistemdeki koordinatları, $A(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, $B(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, $C(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, $D(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $E(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $F(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ ve M, M', N matrisleri verilsin.

(64)
$$M = \begin{matrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}, \quad N = M'M, \quad N = \begin{matrix} d_0 & e_0 & f_0 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{matrix}$$
$$Q = MP, \quad R = M'Q = M'MP = NP$$

ile tanımlanan noktaları göz önüne alınsın. P, Q, R noktalarının barisantrik vektörleri, bu noktaların ρ_1, ρ_2, ρ_3 parametreleri olsunlar. Bir barisantrik karmaşık sayının, iki bağımsız bileşeni vardır.

$$P(1, \lambda, \mu)$$
$$Q(a_0 + b_0\lambda + c_0\mu,\ a_1 + b_1\lambda + c_1\mu,\ a_2 + b_2\lambda + c_2\mu)$$
$$R(d_0 + e_0\lambda + f_0\mu,\ d_1 + e_1\lambda + f_1\mu,\ d_2 + e_2\lambda + f_2\mu)$$
$$\rho_1 = (1 + j\lambda + k\mu)/(1 + \lambda + \mu),$$
$$\rho_2 = [a_0+b_0\lambda+c_0\mu+j(a_1+b_1\lambda+c_1\mu)+k(a_2+b_2\lambda+c_2\mu)]/(a_0+b_0\lambda+c_0\mu+a_1+b_1\lambda+c_1\mu+a_2+b_2\lambda+c_2\mu)$$
$$\rho_3 = [d_0+e_0\lambda+f_0\mu+j(d_1+e_1\lambda+f_1\mu)+k(d_2+e_2\lambda+f_2\mu)]/(d_0+e_0\lambda+f_0\mu+d_1+e_1\lambda+f_1\mu+d_2+e_2\lambda+f_2\mu)$$

λ ve μ bilinmeyenlerine göre düzenleyelim.

$$\rho_1 - 1 + \lambda(\rho_1 - j) + \mu(\rho_1 - k) = 0$$

$$\rho_2\alpha_0 - \alpha_1 + \lambda(\rho_2\beta_0 - \beta_1) + \mu(\rho_2\gamma_0 - \gamma_1) = 0$$
$$\rho_3\delta_0 - \delta_1 + \lambda(\rho_3\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + \mu(\rho_3\varphi_0 - \varphi_1) = 0$$

olur. İki bilinmeyen ve üç denklemin sağlanması için, katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Determinantın açılımında, sabitler birleştirilip, yeni sabitlerle gösterilirse, ρ_1, ρ_2, ρ_3 ün bir çok terimlisi olur.

(65). $$a\,\rho_1\rho_2\rho_3 + b\,\rho_1\rho_2 + c\,\rho_2\rho_3 + d\,\rho_3\rho_1 + e\,\rho_1 + f\,\rho_2 + g\,\rho_3 + h = 0$$

Parametreleri bu üçüncü derece çok terimlisini sağlayan, nokta üçlülerine, **üçlü projektif dönüşüm** veya **üçlü homografi** denilecektir. Dönüşümün değişmez noktaları, ρ_i'ler eşitlenerek bulunur. Elde edilen üçüncü dereceden denklemin kökleri, değişmez noktaların parametreleridir. Denklemin katsayıları, barisantrik karmaşık sayılardır. Çünkü kendilerini eşitlediğimiz sabitlerin hepsi de, barisantrik karmaşık sayılardır. Üçüncü derece denklemin kökleri de, barisantrik karmaşık sayılar geleceklerdir. (19), (20), (21) formülleri ile, üçüncü derece denkleminin kökleri, barisantrik karmaşık sayı olarak verilmiştir. Yani düzlemde, değişmez noktaların belirlenmesi için, barisantrik karmaşık sayılar yeterlidir.

$$a\,\rho^3 + 3b\,\rho^2 + 3c\,\rho + d = 0$$

Denkleminin kökleri, değişmez noktaların barisantrik karmaşık sayılarıdır. Üçlü projektif dönüşümün bir başka gösterilimi, (50) ile verilen matrislerin açılımıdır.

(66)
$$D = \lambda_0 A + \lambda_1 B + \lambda_2 C \qquad D = A + \lambda_1 B + \lambda_2 C$$
$$E = \mu_0 A + \mu_1 B + \mu_2 C \qquad E = A + \mu_1 B + \mu_2 C$$
$$F = \nu_0 A + \nu_1 B + \nu_2 C \qquad F = A + \nu_1 B + \nu_2 C$$

D, E, F noktaları A, B, C noktalarının, yukarda verilen fonksiyonları ise, D, E, F noktaları üçlü projektif bağlıdır denilir. Birinci yazılım türdeş ikinci ise, türdeş olmayan yazılımdır. Kısa yazılış,

(67) $(DEF, ABC)_1 = (\lambda_1/\lambda_0) : (\mu_1/\mu_0) : (\nu_1/\nu_0)$, $(DEF, ABC)_2 = (\lambda_2/\lambda_0) : (\mu_2/\mu_0) : (\nu_2/\nu_0)$

biçiminde olup, iki tane oransal değere sahiptir. Bu değerlere **üçlü oranlar** adı verilecektir. Üçlü oranların türdeş olmayan gösterilimini yazmak için, sıfır indisli parametrelere bölünür. Birinci yan türdeş olduğundan değişmez. Üçlü oranların parametreleri, (66) da birinci eşitlikten dört tane eşitlik yazılarak hesaplanır..

$$\rho d_0 = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 b_0 + \lambda_2 c_0, \qquad \rho d_1 = \lambda_0 a_1 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 c_1,$$
$$\rho d_2 = \lambda_0 a_2 + \lambda_1 b_2 + \lambda_2 c_2 \qquad \rho d_3 = \lambda_0 a_3 + \lambda_1 b_3 + \lambda_2 c_3$$

Denklemlerinden yalnız üçü doğrusal bağımsızdır. Çünkü dört nokta bir düzlem üzerinde olup, koordinat matrisinin rangı 3 tür. İlk üçüne, türdeş denklem sistemi, çözüm kuralını uygulanırsa,

(68)
$$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 = \begin{matrix} b_0 & c_0 & d_0 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix} : \begin{matrix} c_0 & a_0 & d_0 \\ c_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & d_2 \end{matrix} : \begin{matrix} a_0 & b_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{matrix}$$

$$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix} : \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & d_2 \end{matrix} : \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{matrix}$$

$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 = |bcd| : |cad| : |abd|$, $|\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 = |bce| : |cae| : |abe|$, $\nu_0 : \nu_1 : \nu_2 = |bcf| : |caf| : |abf|$ çözümleri bulunur. Benzer işlemlerle, d yerine e ve f getirmek suretiyle, μ_i ve ν_i'lerin oranları da hesaplanırlar.

Üçlü Oranlar Projektif Dönüşümlerle Değişmezler

$$D = \lambda_0 A + \lambda_1 B + \lambda_2 C, \quad E = \mu_0 A + \mu_1 B + \mu_2 C, \quad F = \nu_0 A + \nu_1 B + \nu_2 C$$

Üçlü oranında noktaları, bir M matrisi ile dönüştürülsün.

$$A' = MA, \quad B' = MB, \quad C' = MC, \quad D' = MD, \quad E' = ME, \quad F' = MF$$

olur. (66) da 'üçlü homografi denklemleri, soldan M matrisi ile çarpılsın. Yukardaki eşitliklerden değerleri yerlerine konulursa,

(69) $D' = \lambda_0A' + \lambda_1B' + \lambda_2C'$, $E' = \mu_0A' + \mu_1B' + \mu_2C'$, $F' = \nu_0A' + \nu_1B' + \nu_2C'$

$$(DEF, ABC)_1 = (\lambda_1/\lambda_0) : (\mu_1/\mu_0) : (\nu_1/\nu_0) = (D'E'F', A'B'C')_1$$
$$(DEF, ABC)_2 = (\lambda_2/\lambda_0) : (\mu_2/\mu_0) : (\nu_2/\nu_0) = (D'E'F', A'B'C')_2$$

eşitlikleri kolayca görülür. Üçlü oranlar izdüşüm ve kesme işlemleri ile değişmezler. Uzayda bir G noktasından çıkan iki ışın demetlerini kesen P ve Q düzlemlerini göz önüne alalım. P düzlemi üzerindeki kesim noktaları A, B, C, D, E, F ve Q düzlemindekiler A', B', C', D', E', F' olsunlar. Koordinatları G(1, 0, 0, 0), A(0, 1, 0, 0), B(0, 0, 1, 0), C(0, 0, 0, 1), $D(0, 1, d_1, d_2)$, $E(0, 1, e_1, e_2)$, $F(0, 1, f_1, f_2)$ olsunlar. Öbür noktaların koordinatlarını bulalım. Q düzlemi birim düzlem olsun.

$A'(1,-1,0,0)$, $B'(1, 0, -1, 0)$, $C'(1, 0, 0, -1)$, $D'(-1 - d_1 - d_2, 1, d_1, d_2)$,
. $E'(-1 - e_1 - e_2, 1, e_1, e_2)$, $F'(-1 - f_1 - f_2, 1, f_1, f_2)$

$$D = \lambda_0A + \lambda_1B + \lambda_2C \qquad D' = \lambda'_0A' + \lambda'_1B' + \lambda'_2C'$$
$$E = \mu_0A + \mu_1B + \mu_2C \qquad E' = \mu'_0A' + \mu'_1B' + \mu'_2C'$$
$$F = \nu_0A + \nu_1B + \nu_2C \qquad F' = \nu'_0A' + \nu'_1B' + \nu'_2C'$$

olsun. λ_i, μ_i, ν_i,λ'_i, μ'_i, ν'_i'ler (68) den hesaplanır ve (67) de yerine konulursa,

$$(DEF, ABC)_1 = d_1 : e_1 : f_1, \qquad (DEF, ABC)_2 = d_2 : e_2 : f_2,$$
$$(D'E'F', A'B'C')_1 = d_1 : e_1 : f_1, \qquad (D'E'F', A'B'C')_2 = d_2 : e_2 : f_2$$

eşitlikler görülür. İzdüşüm ve kesme, projektif dönüşüm kapsamındadır. Önceki kanıtlama yeterlidir.

Üçlü Oranların Özelikleri

Üçlü oranlar (67) ve (68) den,

(70) $$(DEF, ABC)_1 = (|cad|)/(|bcd|) : (|cae|)/(|bce|) : (|caf|)/(|bcf|)$$
$$(DEF, ABC)_2 = (|abd|)/(|bcd|) : (|abe|)/(|bce|) : (|abf|)/(|bcf|)$$

ile verilmiştir. Mutlak değer içindeki ifadeler, üçgenlerin alanlarıdır. Bu oranlar,

(71) $(DE, ABC)_1 = (|cad|)/(|bcd|) : (|cae|)/(|bce|)$, $(DE, ABC)_2 = (|abd|)/(|bcd|) : (|abe|)/(|bce|)$
$(DF, ABC)_1 = (|cad|)/(|bcd|) : (|caf|)/(|bcf|)$, $(DF, ABC)_2 = (|abd|)/(|bcd|) : (|abf|)/(|bcf|)$
$(EF, ABC)_1= (|cae|)/(|bce|) : (|caf|)/(|bcf|)$, $(EF, ABC)_2 = (|abe|)/(|bce|) : (|abf|)/(|bcf|)$

biçiminde de yazılabilir. İşlemlerde kolaylık sağlarlar. Çifte oranlara benzerler. Bu eşitliklerden,

(72)
$$(DE, ABC)_1(ED, ABC)_1 = 1, \qquad (DF, ABC)_1 (FD, ABC)_1 = 1$$
$$(EF, ABC)_1(FE, ABC)_1 = 1, \qquad (DE, ABC)_2(ED, ABC)_2 =1$$
$$(DF, ABC)_2(FD, ABC)_2 = 1, \qquad (EF, ABC)_2(FE, ABC)_2 = 1$$
$$(DEF, ABC)_1 = (DEF, ACB)_2, \qquad (DEF, ABC)_2 = (DEF, ACB)_1$$
$$(DE, ABC)_1 + (DA, EBC)_1 =1, \qquad (ED, ABC)_1 + (EA, DBC)_1 =1$$
$$(DF, ABC)_1 + (DA, FBC)_1 = 1, \qquad (EF, ABC)_1 + (EA, FBC)_1 =1$$
$$(DF, ABC)_2 + (DA, FBC)_2 =1, \qquad (EF, ABC)_2 + (EA, FBC)_2 =1$$
$$(FE, ABC)_2 + (FA, EBC)_2 =1, \qquad (DE, ABC)_2 + (DA, EBC)_2 = 1$$

özelikleri kolayca görülür. Son dört eşitlikte üçlü oranların (71) deki değerleri yerine konulur ve determinantları açılırsa, eşitlikler görülür. İlk iki noktanın yerleri değiştirilebilir.

Üçlü Envolüsyon

(73) $$M = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & k \end{matrix}, \quad N = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & j \end{matrix}, \quad P = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad Q = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Matrisleri birim matrisin küp kökleridir. Bu matrislerle dönüşümler yapalım. Barisantrik koordinatları $D(x_0, x_1,x_2)$ olan D noktası başlangıç olsun. E ve F noktaları,

$$E = PD, \quad F = PE = P^2D, \quad D = PF =P^3D = ID,$$

$E(x_1, x_2, x_0)$, $F(x_2, x_0, x_1)$, $D(x_0, x_1, x_2)$ olur. Bu işlemlerde D noktası E noktasına, E noktası F noktasına ve F noktası da D noktasına dönüşmüştür. Koordinat üçgeni eşkenar olduğundan, DEF üçgeni de eşkenardır. P ve Q matrisleri ile yapılan dönüşümler eşkenar üçgen oluştururlar. P sağdan Q soldan dönmek suretiyle, dönüşümü gerçekleştirirler. P matrisinin değişmez noktaları $J_1(1, k, j)$, $J_2(1, 1, 1)$, $J_3(1, j, k)$ dır.

(74) $E = MD, \quad F = ME = M^2D, \quad D = MF = M^3D = ID,$

$E(x_0, jx_1, kx_2)$, $F(x_0, kx_1, jx_2)$, $D(x_0, x_1, x_2)$ olur. Noktalar arasında üçlü ardışık bir dönüşüm gerçekleşmiştir. P veya M matrisleri ile, bir noktanın ilk konuma gelinceye kadar, üç defa ardışık dönüşümü ile noktalar kümesine, **üçlü envolüsyon** denilir. M matrisinin değişmez noktaları $A_0(1,0,0)$, $A_1(0,1,0)$, $A_2(0,0,1)$, noktalarıdır. D, E, F, noktaları, değişmez noktaları A_0, A_1, A_2 veya J_1, J_2, J_3 olan envolüsyona aittir denilir. D, E, F noktaları A_0, A_1, A_2 veya J_1, J_2, J_3 noktalarına göre **üçlü harmonik eşleniktirler** veya **üçlü harmonik bölme** oluşturuyor denilecektir Üçlü envolüsyonu gerçekleştiren matrislere de, **envolütüf matrisler** denilecektir.

(75)
$$T = \begin{matrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

matrisini göz önüne alındığında,

(76) $D' = T D, \quad E' = T E, \quad F' = T F, \quad E = MD, \quad F = ME, \quad D = MF, \quad F = T^{-1}F'$

$D' = TD = TMF = TMT^{-1} F', \quad D' = TMT^{-1} F', \quad E' = TE = TMD = TMT^{-1} D'$

$F' = TF = TME = TMT^{-1} E', \quad E' = TMT^{-1} D', \quad D' = TMT^{-1} F'$

Dönüşümlerinin, üçlü envolüsyon olduğu görülmektedir. TMT^{-1} matrisi envolütüf matristir. Ancak TMT^{-1} matrisi ile yapılan dönüşümlerle bulunan D', E', F' üçgeni, eşkenar değildir. Dönüşüm için ilk noktayı biz alıyoruz, sonra diğer ikisini dönüşümle buluyoruz. Dönüşüm başlangıç etrafında olup, koodinat üçgeninin ağırlık merkezi, dönüşümün dönme merkezidir. Birinci noktası verilen nokta ve ağırlık merkezi, başlangıçta olan, eşkenar üçgen bir tanedir. P matrisi ile, eşkenar üçgen sağdan, Q matrisi ile soldan oluşur. Diğer matrislerle, eşkenar üçgen olması için, dönüşüm noktaları çakışacağından, matrislerin çakışması gerekir. Bu nedenle P ve Q matrisleri, hem envolütüf ve hem de ortogonaldir. Dönüşümde uzunluklar ve açılar değişmezler. M ve N matrisleri ile yapılan dönüşümlerde, uzunluklar ve açılar değişirler. Çünkü bu matrisler ortogonal değildirler.

$U(x_0, x_1, x_2)$ noktası, değişmez noktayı göstersin.

(77) $MU = \lambda U, \quad U' = TU, \quad U = T^{-1} U', \quad MU = MT^{-1} U' = \lambda U$

Son eşitliğin her iki tarafı, soldan T ile çarpalırsa,

(78) $TMU = TMT^{-1} U' = \lambda\, TU = \lambda\, U'$

bulunur. U noktası M matrisinin değişmez noktası ise, $U' = TU$, noktası da TMT^{-1} matrisinin değişmez noktasıdır. $U' = TU$ eşitliğinden, yeni değişmez noktalar, $A(a_0, a_1, a_2)$, $B(b_0, b_1, b_2)$, $C(c_0, c_1, c_2)$ olarak bulunur. (76) dan,

. $D' = TMF, \quad E' = TMD, \quad F' = TME$

eşitlikleri ile D', E', F' noktalarını, A, B, C noktalarının doğrusal toplamı olarak bulalım. $D(\lambda, \mu, \nu)$ olsun. (74) den, $E(\lambda, j\mu, k\nu)$, $F(\lambda, k\mu, j\nu)$ olur.

(79)
$$TM = \begin{matrix} a_0 & jb_0 & kc_0 \\ a_1 & jb_1 & kc_1 \\ a_2 & jb_2 & kc_2 \end{matrix}, \quad TMF = \begin{matrix} \lambda a_0 + \mu b_0 + \nu c_0 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 \end{matrix} = D' = \lambda A + \mu B + \nu C$$

Benzer işlemlerle E', F' noktaları da hesaplanır. Bu noktalar yeniden D, E, F ile gösterilirse,

(80) $D = \lambda A + \mu B + \nu C, \quad E = \lambda A + j\mu B + k\nu C, \quad F = \lambda A + k\mu B + j\nu C$

üçlü envolüsyon denklemi bulunur. Bu doğrusal toplam gösterilimi, ancak türdeş koordinatlarda yazılabilir. Bu üçlü envolüsyonun değişmez noktaları, (78) e göre, A, B, C noktalarıdır. D, E, F noktaları, A, B, C noktalarına göre, üçlü harmonik eşleniktirler. (80) gösterilimini daha açık yazalım.

(81)
$$\begin{aligned} &D(\lambda a_0 + \mu b_0 + \nu c_0, \quad \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1, \quad \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2), \\ &E(\lambda a_0 + j\mu b_0 + k\nu c_0, \quad \lambda a_1 + j\mu b_1 + k\nu c_1, \quad \lambda a_2 + k\mu b_2 + j\nu c_2), \\ &F(\lambda a_0 + k\mu b_0 + j\nu c_0, \quad \lambda a_1 + k\mu b_1 + j\nu c_1, \quad \lambda a_2 + k\mu b_2 + j\nu c_2) \end{aligned}$$

P_1, P_2, P_3, herhangi noktalar, P'_1, P''_1, P'_2, P''_2, P'_3, P''_3 noktaları da, bir envolütüf matrisin değişmez noktalarına göre harmonik eşlenikleri olsunlar. Matrisin değişmez noktaları A, B, C olsun. Noktaların parametreleri, sıra ile, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ'_1, ρ''_1, ρ'_2, ρ''_2, ρ'_3, ρ''_3, α_1,α_2, α_3 barisantrik karmaşık sayıları olsunlar. P_1, P_2, P_3 noktalarının, değişmez üçlüye üçlü oranı, doğrusal dönüşümlerle değişmezler. Doğrusal dönüşüm, sözü geçen envolütüf TMT^{-1} matrisiyle olsun.

(82) $$(P_1P_2P_3, J_1J_2J_3)_1 = (P'_1P'_2P'_3, J_1J_2J_3)_1 = (P''_1P''_2P''_3, J_1J_2J_3)_1$$

olur. Değişmez noktalar gene kendisine dönüşür. (70) den,

(83) $$\begin{aligned}&(|\alpha_3\alpha_1\rho_1|/|\alpha_2\alpha_3\rho_1|) : (|\alpha_3\alpha_1\rho_2|/|\alpha_2\alpha_3\rho_2|) : (|\alpha_3\alpha_1\rho_3|/|\alpha_2\alpha_3\rho_3|) =\\ &(|\alpha_3\alpha_1\rho'_1|/|\alpha_2\alpha_3\rho'_1|) : (|\alpha_3\alpha_1\rho'_2|/|\alpha_2\alpha_3\rho'_2|) : (|\alpha_3\alpha_1\rho'_3|/|\alpha_2\alpha_3\rho'_3|) =\\ &(|\alpha_3\alpha_1\rho''_1|/|\alpha_2\alpha_3\rho''_1|) : (|\alpha_3\alpha_1\rho''_2|/|\alpha_2\alpha_3\rho''_2|) : (|\alpha_3\alpha_1\rho''_3|/|\alpha_2\alpha_3\rho''_3|)\end{aligned}$$

olur. Bu üçlü orantının, oran sırası değiştirilebilir. Basit olarak,

$$a : b : c = a' : b' : c' = a'' : b'' : c'' \quad \text{ise,} \quad a : a' : a'' = b : b' : b'' = c : c' : c'' \text{ olur.}$$

Her eşitliğin birinci terimleri, eşit olacak biçimde, eşitlikler bozulmadan, bu oranları genişletelim. Birinci terimlerle beraber, diğerleri de, karşılıklı olarak eşitlenirler.

$$a = k\,a' = ra'', \qquad b = kb' = rb'', \qquad c = kc' = rc'',$$

$$a : a' : a'' = kr : r : k, \qquad b : b' : b'' = kr : r : k, \qquad c : c' : c'' = kr : r : k$$

olur. Birincilerin kr ile orantılı olduğunu varsayalım. İkinci orantı sayısı olarak r, üçüncü orantı sayısı olarak da k alınmalıdır ki, birinci ile ikinci arasındaki oran k ve birinci ile üçüncü arasındaki oran da r olsun.

(84) $$\begin{aligned}&(P_1P'_1P''_1, \alpha_1\alpha_2\alpha_3)_1 = (P_2P'_2P''_2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3)_1 = (P_3P'_3P''_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3)_1 = 1 : k_1 : k_2\\ &(P_1P'_1P''_2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3)_2 = (P_2P'_2P''_2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3)_2 = (P_3P'_3P''_3, \alpha_1\alpha_2\alpha_3)_2 = 1 : k'_1 : k'_2\end{aligned}$$

olur. Benzer biçimde ikinci bileşen de hesaplanır. Üçlü harmonik eşleniklerin, değişmez üçlüye, üçlü oranları sabittir. Üçlü oranların (70) deki değerini kısaca,

(85) $$(DEF, ABC)_1 = d : e : f$$

ile gösterelim. (70) aslına uygun olarak alınırsa,

$$(FDE, ABC)_1 = f : d : e, \qquad (EFD, ABC)_1 = e : f : d$$

olur. Bu üç üçlü oranların çarpımı, aynı sıradaki oranların çarpımı ile yapılır. Önce üçüncü oranları yok varsayalım. **:** işareti bölüm anlamında olduğundan, çarpım oranların çarpılıp, aynı sıraya yazılması ile yapılır. Üçüncü oran, ikinci bir payda anlamındadır. O halde, üçüncü oranlar da çarpılıp, aynı sıraya yazılmalıdır. Üçlü oranlar, düzlemde türdeş koordinatlar olarak düşünülmelidir. Birinci koordinat 1'e indirgendikten sonra, ikinci koordinat birinci bileşen ve üçüncü koordinat da ikinci bileşen olarak yorumlanıp, iki bileşende, iki paydalı kesirler olarak işleme konulmalıdır.

DEF, ABC harmonik üçlülerdir. ABC değişmez noktalar ise, üçlü harmonik eşleniklerin değişmez üçlüye, üçlü oranı sabittir. Yukarda yazılan üçlü oranların çarpımını alalım. (85) deki d,e,f oranları, türdeş olarak sabittir. Yani aynı sayı ile çarpılıp, bölünebilirler.

(86) $$(DEF, ABC)_1\,(FDE, ABC)_1\,(EFD, ABC)_1 = dfe : edf : fed = 1 : 1 : 1$$

bulunur. Birinci tarafta sabit olan üçlü oranlardan bir tanesi, k ile gösterilirse,

$$k^3 = 1 : 1 : 1$$

bulunur. İkinci yandaki küçük harfler üçlü oranlarda, oranların sırasını gösterirler. Yani üç üçlü oranın çarpımında, birinci sıradaki oranlar çarpılıp, birinci sıraya, ikinci sıradaki oranlar çarpılıp, ikinci sıraya ve üçüncü sıradaki oranlar çarpılıp, üçüncü sıraya yazılacağını anlatır. Üçlü oranların çarpımında, oranların çarpılması gibi, kökü de oranların köküdür. 1'in küp kökleri 1, j, k dır. Oranlar türdeş olduğundan, birinci oran 1 alınacaktır. Çakışmayan üçlü sıralar 1, j, k ve 1, k, j dir. Bunlardan birincisi, üçlü oranın birinci bileşeni, diğeri de ikinci bileşeni için kullanılacaktır.

(87) $$(DEF, ABC)_1 = 1 : j : k, \qquad (DEF, ABC)_2 = 1 : k : j$$

bulunur. Üçlü envoüsyon koşulu (72) dir. Üçlü oranların d = –1 olan,

$$(DEF, ABC)_1 = -1 : 1 : 1, \quad (FDE, ABC)_1 = 1 : -1 : 1, \quad (EFD, ABC)_1 = 1 : 1 : -1,$$

. $$(DEF, ABC)_1\,(FDE, ABC)_1\,(EFD, ABC)_1 = k^3 = -1 : -1 : -1 = 1 : 1 : 1$$

değeri ile verilen nokta üçlüleri de, üçlü envolüsyon oluştururlar. Bu üçlü envolüsyonlar, (86)'nın çözümleridir. Birinci çözüme **üçlü envolüsyon,** ikinci çözüme, matrisi P ve Q olan dönüşüme de, **üçlü eşkenar üçgen envolüsyonu** denilecektir. Bu sonuçların birincisi, (80) de bulunmuştu. Üçüncü olarak, k^3 ün ikinci yanı, türdeştir. –1 ile çarpıp, küp kökleri alınırsa, 1 in altıncı kökleri bulunur. Altıncı köklerin bütün üçlü sıraları çözümdür. Birbirinden farklı 8 tane üçlü sıradan, dördü soldan sağa, dördü de sağdan sola, nokta dönüşümleri ile envolüsyonu sağlarlar. Bu dönüşümlerin envolütüf matrisleri ve değişmez noktaları aşağıdadır. Bu matrisler (148) ile verilen, uzayda dönme ortogonal matrisi ile bulunmuştur.

(88)
$$Q' = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}, \quad Q'' = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}, \quad Q''' = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$P' = \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad P'' = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad P''' = \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

P' **:** $J_1(1, -k, -j)$, $J_2(1, -1, -1)$, $J_3(1, -j, -k)$, P'' **:** $J_1(1, k, -j)$, $J_2(1, 1, -1)$, $J_3(1, j, -k)$

P''' **:** $J_1(1, -k, j)$, $J_2(1, -1, 1)$, $J_3(1, -j, k)$

Q', Q'', Q''' matrislerinin değişmez noktaları, bu değişmez noktalarda, J_1 ile J_3 ün yer değiştirmişidir. Q'ler bu dönüşümleri ters yönde sağlayarak envolüsyonu gerçekleştirirler. P ve Q daha önce yazılmıştı.

Örnek 2

P' matrisi ile D(1, 1, 1) noktasının dönüşümlerinin, (80) üçlü envolüsyon denklemini sağladığını gösteriniz.

Matrisin değişmez noktaları verilmiştir. D noktasının dönüşümleri E(1, -1, 1), F(1, 1, -1) dir. Üçlü oranların değerlerini, (68) determinantları yardımıyla hesaplayalım.

$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 = 2(1-j) : (k-j) : 2(k-1)$, $\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 = 2(k-1) : (k-j) : 2(1-j)$

$\nu_0 : \nu_1 : \nu_2 = 2(k-j) : (j-k) : 2(k-j)$, $\lambda_1/\lambda_0 = -j/2$, $\lambda_2/\lambda_o = k$,

. $\mu_1/\mu_0 = -k/2$, $\mu_2/\mu_0 = j$ $\nu_1/\nu_0 = -1/2$, $\nu_2/\nu_0 = 1$

$(DEF, J_1J_2J_3)_1 = \lambda_1/\lambda_o : \mu_1/\mu_o : \nu_1/\nu_o$, $(DEF, J_1J_2J_3)_2 = \lambda_2/\lambda o : \mu_2/\mu_o : \nu_2/\nu_o$

$(DEF, J_1J_2J_3)_1 = -j/2 : -k/2 : -1/2 = 1 : j : k$, $(DEF, J_1J_2J_3)_2 = k : j : 1 = 1 : k : j$

Eğer J_1 ile J_3 yer değiştirmişse, sonuçta j ile k yer değiştirir.

Üçlü Envolüsyonun Parametrik Denklemi

(81) formülü D, E, F noktalarının barisantrik koordinatları ile verilmiştir. Sanal koordinatlara geçip, D,E,F noktalarının barisantrik karmaşık sayılarını, yani parametrelerini yazalım. Barisantrik karmaşık sayıları, kendi küçük harfleri ile gösterilsin. Barisantrik koordinatları $A(a_0, a_1, a_2)$, $B(b_0, b_1, b_2)$, $C(c_0, c_1, c_2)$, $D(d_0, d_1, d_2)$, $E(e_0, e_1, e_2)$, $F(f_0, f_1, f_2)$, $P(\lambda, \mu, \nu)$, Q, R olan noktaların sanal koordinatları, $A(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, $B(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, $C(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, $D(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $E(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $F(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ olsun. M, M', N matrisleri ile birlikte verilsinler. D, E, F noktalarının barisantrik karmaşık sayıları, D, E, F noktalarının parametreleri olsunlar.

(81) den,

$$\rho_1 = \delta_1/\delta_0 = (d_0 + jd_1 + kd_2)/(d_0 + d_1 + d_2) =$$
$$[\lambda a_0 + \mu b_0 + \nu c_0 + j(\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1) + k(\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1)]/(\lambda a_0 + \mu b_0 + \nu c_0 + \lambda a_1 + \mu b_1$$
$$\nu c_1 + \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2)$$

$$\rho_1 = [\lambda(a_0+ja_1+ka_2)+\mu(b_0+jb_1+kb_2)+\nu(c_0+jc_1+kc_2)]/[\lambda(a_0+a_1+a_2)+\mu(b_0+b_1+b_2)+\nu(c_0+c_1+c_2)]$$

$$\rho_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_0 = (e_0 + je_1 + ke_2)/(e_0 + e_1 + e_2)$$

$$\rho_2 = [\lambda(a_0+ja_1+ka_2)+\mu j(b_0+jb_1+kb_2)+k\nu(c_0+jc_1+kc_2)]/[\lambda(a_0+a_1+a_2)+j\mu(b_0+b_1+b_2)+k\nu(c_0+c_1+c_2)]$$

$$\rho_3 = \varphi_1/\varphi_0 = (f_0 + jf_1 + kf_2)/(f_0 + f_1 + f_2)$$

$$\rho_3 = [\lambda(a_0+ja_1+ka_2)+\mu k(b_0+jb_1+kb_2)+\nu j(c_0+jc_1+kc_2)]/[\lambda(a_0+a_1+a_2)+k\mu(b_0+b_1+b_2)+j\nu(c_0+c_1+c_2)]$$

Bu denklemleri sanal koordinatlarla ifade edelim.

$$\rho_1 = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1)/ (\lambda\alpha_0 + \mu\beta_0+ \nu\gamma_0)$$
$$\rho_2 = (\lambda\alpha_1 + j\mu\beta_1 + k\nu\gamma_1)/(\lambda\alpha_0 + j\mu\beta_0 + k\nu\gamma_0)$$
$$\rho_3 = (\lambda\alpha_1 + k\mu\beta_1 + j\nu\gamma_1)/(\lambda\alpha_0 + k\mu\beta_0 + j\nu\gamma_0)$$

formülleri bulunur. Bu denklemleri λ, μ, ν türdeş bilinmeyenlerine göre düzenleyelim.

(89)
$$\lambda(\rho_1\alpha_0 - \alpha_1) + \mu(\rho_1\beta_0 - \beta_1) + \nu(\rho_1\gamma_0 - \gamma_1) = 0$$
$$\lambda(\rho_2\alpha_0 - \alpha_1) + j\mu(\rho_2\beta_0 - \beta_1) + k\nu(\rho_2\gamma_0 - \gamma_1) = 0$$
$$\lambda(\rho_3\alpha_0 - \alpha_1) + k\mu(\rho_3\beta_0 - \beta_1) + j\nu(\rho_3\gamma_0 - \gamma_1) = 0$$

Türdeş denklem sisteminin çözülebilmesi için, katsayılar determinantı sıfır olmalıdır. Determinantın açılımı, üçlü envolüsyona ait noktaların ρ_1, ρ_2, ρ_3 parametreleri ile, sağlanmalıdır.

(90) $\rho_1\rho_2\rho_3\, \alpha_0\beta_0\gamma_0(k - j + k - j + k - j) + \rho_1\rho_2(-\alpha_0\beta_0\gamma_1 k + \alpha_0\beta_1\gamma_0 j - \alpha_1\beta_0\gamma_0 k + \alpha_0\beta_0\gamma_1 j - \alpha_0\beta_1\gamma_0 k + \alpha_1\beta_0\gamma_0 j) + \rho_1\rho_3(- \alpha_0\beta_1\gamma_0 k + \alpha_0\beta_0\gamma_1 j - \alpha_0\beta_0\gamma_1 k + \alpha_1\beta_0\gamma_0 j - \alpha_1\beta_0\gamma_0 k + \alpha_0\beta_1\gamma_0 j) + \rho_2\rho_3(- \alpha_0\beta_0\gamma_1 k + \alpha_0\beta_0\gamma_1 j - \alpha_0\beta_1\gamma_0 k + \alpha_0\beta_1\gamma_0 j - \alpha_1\beta_0\gamma_0 k + \alpha_1\beta_0\gamma_0 j) + \rho_1(\alpha_0\beta_1\gamma_1 k - \alpha_0\beta_1\gamma_1 j + \alpha_1\beta_0\gamma_1 k - \alpha_1\beta_0\gamma_1 j + \alpha_1\beta_1\gamma_0 k - \alpha_1\beta_1\gamma_0 j) + \rho_2(\alpha_1\beta_0\gamma_1 k - \alpha_1\beta_1\gamma_0 j + \alpha_1\beta_1\gamma_0 k - \alpha_0\beta_1\gamma_1 j + \alpha_0\beta_1\gamma_1 k - \alpha_1\beta_0\gamma_1 j) + \rho_3(\alpha_0\beta_1\gamma_1 k - \alpha_0\beta_1\gamma_1 j + \alpha_1\beta_0\gamma_1 k - \alpha_1\beta_0\gamma_1 j + \alpha_1\beta_1\gamma_0 k - \alpha_1\beta_1\gamma_0 j) - \alpha_1\beta_1\gamma_1(k - j + k - j + k - j) = 0$

Denklemi $\alpha_o\beta_o\gamma_o(k - j)$ ile bölelim. $\rho_i\rho_j$ ve ρ_i parametrelerinin katsayılarının, eşit olduğu görülmektedir.

(91) $3\, \rho_1\rho_2\rho_3 - (\alpha_1/\alpha_0 + \beta_1/\beta_0 + \gamma_1/\gamma_0)(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1) + [(\alpha_1/\alpha_0)(\beta_1/\beta_0) + (\beta_1/\beta_0)(\gamma_1/\gamma_0) +(\gamma_1/\gamma_0)(\alpha_1/\alpha_0)](\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) - 3(\alpha_1/\alpha_0)(\beta_1/\beta_0)(\gamma_1/\gamma_0) = 0$

Katsayılar, A, B, C sabit noktalarının barisantrik karmaşık sayılarıdır. Kısa olarak, genel üçlü envolüsyon denklemi,

(92) $a\, \rho_1\rho_2\rho_3 + b(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1) + c(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) + d = 0$

olur. Bu sonucu, üçlü homografi denkleminde, ρ_i'lere göre, simetrik olacağını düşünerek de bulunabilirdi.

Değişmez noktaların denklemleri, genel denklemden ρ_i parametreleri eşitlenerek bulunur.

(93) $a\, \rho^3 + 3b\, \rho^2 + 3c\, \rho + d = 0$

Bir üçlü envolüsyonun, üç tane değişmez noktası vardır. Düzlemde bu noktalar, iki bağımsız değişkeni olan, barisantrik karmaşık sayılarla ifade edilirler. (93) üçüncü derece denkleminin çözümleri, barisantrik karmaşık sayılardır. Bu köklerin barisantrik karmaşık sayıları, α, α', α'' olsunlar. Köklerle katsayıların bağıntısından yararlanarak, a, b, c, d katsayılarını (92) de yok edelim.

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = - 3b/a, \quad \alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'' = 3c/a, \quad \alpha\alpha'\alpha'' = - d/a$$

Bu değerleri (92) de yerine koyalım. Katsayılar barisantrik karmaşık sayı olduklarından, üçüncü derece denkleminin kökleri de, barisantrik karmaşık sayı gelecektir. Değişmez noktaları düzlemde belirlemek için yeterlidir. Değişmez noktaların barisantrik karmaşık sayıları ile, envolüsyon denklemi arasında,

(94) $3\rho_1\rho_2\rho_3 - (\alpha + \alpha' + \alpha'')(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3) + (\alpha\alpha' + \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'')(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) - 3\alpha\alpha'\alpha'' = 0$

bağıntısı bulunur. ρ_1, ρ_2, ρ_3 sayıları, barisantrik karmaşık sayılar olup, (92) üçlü envolüsyon denklemini sağlayan, üçlü envolüsyonun, değişken üçlüsüdür. (94) sağlanırsa, (92) de geçen nokta üçlüsü, değişmez üçlüsü (93) ile verilen üçlü envolüsyona ait olur. α, α', α'' de barisantrik karmaşık sayılar olup, (93) değişmez noktaları veren denklemin kökleridirler. Barisantrik karmaşık sayılarla, sözü geçen kavramlar, düzlemin birer noktası olarak belirlenmişlerdir.

(80) ve (86) dan üçlü envolüsyon için,

(95) $(DEF, ABC)_1 = 1 : j : k, \qquad (DEF, ABC)_2 = 1 : k : j$

eşkenar üçgen üçlü envolüsyonu için, (71) den,

$$(DEF, ABC)_1 = -1 : -1 : 1, \qquad (DEF, ABC)_2 = -1 : 1 : -1$$

koşulunu sağlayan iki nokta üçlüsüne, **üçlü harmonik bölme** oluşturuyor denilir. Bu sonuç (87)'nin ikinci satırından yazılmıştır. Önce üçlü envolüsyon, (80) biçiminde yazılmış, A'ların katsayıları eşitlenmiş, 1 indisli üçlü oran, B'lerin katsayılarının oranı ile, 2 indisli üçlü oran, C‘lerin katsayılarının oranı ile yazılmıştır. Üçlü harmonik bölme oluşturan, iki nokta üçlüleri, bir diğerinin **üçlü harmonik eşlenik**leridir. Bir düzlemde, üçü bir doğru üzerinde bulunmayan, sabit üç noktaya, üçlü harmonik eşlenik olan, nokta üçlülerinin kümesine, düzlemde **üçlü envolüsyon** denilir. İki nokta üçlüsünün, üçlü harmonik bölme oluşturması için, üçlülerin barisantrik karmaşık sayıları, (94) denklemini sağlaması veya,

(96) $(\lambda_1/\lambda_0)\, j = \mu_1/\mu_0, \quad (\lambda_1/\lambda_0)\, k = \nu_1/\nu_0, \quad (\lambda_2/\lambda_0)\, k = \mu_2/\mu_0, \quad (\lambda_2/\lambda_0)\, j = \nu_2/\nu_0$

bağıntılarının sağlanması gerekir. (68) den,

(97) $\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 = [DBC] : [ADC] : [ABD], \quad \mu_o : \mu_1 : \mu_2 = [EBC] : [AEC] : [ABE]$

$$\nu_0 : \nu_1 : \nu_2 = [FBC] : [AFC] : [ABF]$$

yazılır. Eğer ABC üçgeni barisantrik koordinat üçgeni ise, λ_i, μ_i, ν_i ler D, E, F noktalarının barisantrik koordinatları olurlar.

(93) değişmez noktaların denklemini göz önüne alalım. Eğer katsayılar, barisantrik karmaşık sayı ise, üç kök de barisantrik karmaşık sayı olur ve düzlemde üç nokta belirler. Bu noktaları değişmez nokta kabul eden, üçlü envolüsyonun bir üçlüsünü bulalım. Bu üçlüyü kök kabul eden üçüncü derece denklemi,

(98) $$a'\rho^3 + 3b'\rho^2 + 3c'\rho + d' = 0$$

olsun. Kökler ve katsayıların bağıntıları,

$$3b'/a' = -(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3), \quad 3c'/a' = \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1), \quad d'/a' = -\rho_1\rho_2\rho_3$$

olur. Bu kökler (92) üçlü envolüsyon denklemini sağlamalıdır.

(99) $a(-d'/a') + b(3c'/a') + c(-3b'/a') + d = 0, \quad ad' - 3bc' + 3cb' - da' = 0$

Bu denklemi sağlayan, iki üçüncü derece denklemlerinin kökleri, üçlü harmonik eşleniktir. Üç tane nokta üçlüsü bir üçlü envolüsyon belirler. Bu üçlü envolüsyonun değişmez noktaları (93) ile verilen nokta üçlüleri de, indisleri $_1$, $_2$, $_3$ olmak üzere, (98) ile verilsin. (99) denklemi üç defa yazılacaktır.

(100)
$$ad'_1 - 3bc'_1 + 3cb'_1 - da'_1 = 0$$
$$ad'_2 - 3bc'_2 + 3cb'_2 - da'_2 = 0$$
$$ad'_3 - 3bc'_3 + 3cb'_3 - da'_3 = 0$$

Bu türdeş denklem sisteminin çözümü ve bulunan türdeş a, b, c, d katsayıları ile (93) denklemi, aranılan üçlü envolüsyonun değişmez noktalarının denklemidir. Dört tane nokta üçlüsünün, aynı bir üçlü envolüsyona ait olması için, (100) denklem sistemine, eklenecek dördüncü denklemle, bulunan denklem sisteminin çözülebilir olması, yani katsayılar determinantının sıfır olması gerekir.

$$\begin{matrix} d'_1 & -c'_1 & b'_1 & -a'_1 \\ d'_2 & -c'_2 & b'_2 & -a'_2 \\ d'_3 & -c'_3 & b'_3 & -a'_3 \\ d'_4 & -c'_4 & b'_4 & -a'_4 \end{matrix} = 0$$

Örnek 3

Eşkenar üçgen üçlü envolüsyonu üzerinde, barisantrik karmaşık sayıların uygulaması yapılacaktır. P matrisi ile,

$$T = 1/3 \begin{matrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} \qquad T^{-1} = 1/3 \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{matrix}$$

göeceli ortogonal matrislerinden, envolütüf matris türetelim.

$$T\,P\,T^{-1} = 1/9 \begin{matrix} 4 & 8 & 1 \\ -7 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & 8 \end{matrix}$$

matrisinin envolütüf ve ortogonal olduğu kolayca gerçeklenebilir. Bu matris ile yapılan dönüşümler, eşkenar üçgen üçlü envolüsyonu oluştururlar. T P T^{-1} matrisinin değişmez noktaları, P matrisinin değişmez noktalarının, T matrisi ile dönüşümü olduğunu gösterelim. (78) formülünün bir uygulamasıdır.

D(2,1,3) noktasının T P T^{-1} matrisi ile dönüşümü ve onun dönüşümü, E(1, – 2, 11), F(–1, 5, 10) noktalarıdır. P matrisinin değişmez noktaları J_1(1, k, j), J_2(1, 1, 1), J_3(1, j, k) dır. Bu değişmez noktaların T matrisi ile dönüşümleri,
J'_1(2 – 2k + j, 2 + k – 2j, 1 +2k + 2j), J'_2(1, 1, 5), J'_3(2 – 2j + k, 2 + j – 2k, 1 + 2j + 2k)
dir. Bu koordinatlar türdeştirler. Türdeş olmayan koordinatlara geçelim. Birinci koordinatlarla bölünecektir.

(2 + k – 2j)/(2 – 2k + j) = (2 + k –2j)(2 – 2j + k)/[(2 – 2k + j)(2 – 2j + k)] = (8k – 7j)/13

p gerçel olmak üzere, p(1 + j + k) = 0 olduğundan, bu ifade çeşitli yerlerde, kısaltma amacı ile, bir bileşeni yok etmek için kullanılacaktır. Paydada j + k = –1 yazılmıştır. Benzer işlemlerle,

J'_1[1, (8k – 7j)/13, (4j + k)/13], J'_2(1, 1, 5), J'_3[(1, (8j – 7k)/13, (4k + j)/13]

bulunur. Değişmez noktaları, bir de TPT^{-1} matrisinden bulalım. Matrisin karakteristik denklemi,

$$K(\nu) = -\nu^3 + \nu^2 (a_{00} + a_{11} + a_{22}) - \nu(A_{00} + A_{11} + A_{22}) + \Delta = 0, \quad -\nu^3 + 729 = 0$$

. $\nu_1 = 9, \quad \nu_2 = 9j, \quad \nu_3 = 9k$

$$(-4-9)x_0 + 8x_1 + x_2 = 0, \quad -7x_0 + (-4-9)x_1 + 4x_2 = 0, \quad 4x_0, + x_1 + (8-9)\,x_2 = 0$$

Türdeş denklemlerde, 9 yerine 9j ve 9k konularak, bulunacak türdeş denklemler çözülürse,

J'_1(36 + 9k, 9 + 36j, 72 + 72k + 81j), J'_2(45, 45, 225),
J'_3(36 + 9j, 9 + 36j, 72 + 72j + 81k)

bulunur. Yukarda olduğu gibi türdeş olmayan koordinatlara geçilir ve kısaltmalar yapılırsa,

J'_1[1, (8k – 7j)/13, (4j + k)/13], J'_2(1, 1, 5), J'_3[1, (8j – 7k)/13, (4k + j)/13]

noktaları bulunur. Üçlü envolüsyonla ilgili bir uygulama, karmaşık sayılarla ve barisantrik karmaşık sayılarla, Borland Pascal programı ile kitabın sonunda verilmiştir. (Program 2 ve 3)
(80) de A, B, C noktalarının türdeş olmayan koordinatlarını ve λ_i, μ_i, ν_i lerin de 1 değerini alalım.

$$D(1 + 1 + 1, a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2), \qquad E(1 + j + k, a_1 + jb_1 + kc_1, a_2 + kb_2 + jc_2),$$
$$F(1 + k + j, a_1 + kb_1 + jc_1, a_2 + jb_2 + kc_2)$$
$$D[1, (a_1 + b_1 + c_1)/3, (a_2 + b_2 + c_2)/3], \qquad E(0, a_1 + jb_1 + kc_1, a_2 + kb_2 + jc_2),$$
$$F(0, a_1 + kb_1 + jc_1, a_2 + kb_2 + jc_2)$$

koordinatları bulunur. D noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezine gelmiştir. E ve F noktaları ise sonsuza gitmiştir. Bir üçlü envolüsyonun, bir üçlüsünün sanal olan iki noktası, sonsuzda ise, üçüncü nokta, ikinci üçlünün ağırlık merkezinde olur. E sonsuza gitmişse, eşleniği olan F de sonsuza gider. Bir üçgenin, izotrop noktalara göre harmonik eşlenik, iki noktanın üçüncü harmonik eşine, üçgenin **ağırlık merkezi** denilir.

V
UZAYDA PROJEKTİF DÖNÜŞÜMLER

Dörtlü Homografi

Üç boyutlu uzayda projektif dönüşümler için, düzlemdekine benzer açıklamalar tekrar edilmeyecektir. Uzayın barisantrik koordinatlarda, A, B, C, D, E, F, G, H, P, Q, R, T noktaları ve bunların koordinatları ile oluşturulan M, M', M'', N dördüncü mertebe matrislerini göz önüne alalım.

(101) $$Q = MP, \quad R = M'Q, \quad T = M''R = M''M'Q = M''M'MP = NP, \quad T = NP$$

P, Q, R, T noktalarının parametreleri, uzayda barisantrik karmaşık sayılar olsunlar. İlerde uzayın barisantrik karmaşık sayıları açıklanacaktır. P(1, λ, μ, ν) noktası, uzayın barisantrik koordinatları ile verilsin. Q, R, T noktaları matris dönüşümleri ile hesaplanacaktır. Barisantrik karmaşık sayılarda verilen noktaların parametreleri, P nin koordinatlarının doğrusal fonksiyonları olacaklardır. P, Q, R, T noktalarını, uzayın barisantrik koordinatları ile tanımlanmış, barisantrik karmaşık sayılarla, üç boyutlu uzayda barisantrik karmaşık sayılarla gösterelim. Parametreleri ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 olsunlar. P nin koordinatlarının belirli olması için, sistemin katsayılar determinantı sıfır olmalıdır. Parametreler arasında dördüncü dereceden bir

bağıntı bulunur.
(102)

$$a\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 + b\rho_1\rho_2\rho_3 + c\rho_1\rho_2\rho_4 + d\rho_1\rho_3\rho_4 + e\rho_2\rho_3\rho_4 + f\rho_1\rho_2 + g\rho_2\rho_3$$
$$h\rho_3\rho_1 + k\rho_1 + l\rho_2 + m\rho_3 + n = 0$$

bağıntısına uzayda, **dörtlü projektif dönüşüm** veya **dörtlü homografi** denilecktir. Parmetreler eşitlenerek değişmez noktaların dördüncü dereceden denklemi bulunur.

(103) $$a\rho^4 + 4b\rho^3 + 6c\rho^2 + 4d\rho + e = 0$$

denkleminin kökleri değişmez noktaların barisantrik koordinatlarıdır. Dörtlü projektif dönüşümün ikinci denkleminde, homolog noktaların koordinatları, değişmez noktaların doğrusal toplamları olarak verilirler.

(104) $$E = \lambda_0 A + \lambda_1 B + \lambda_2 C + \lambda_3 D, \qquad F = \mu_0 A + \mu_1 B + \mu_2 C + \mu_3 D$$
$$G = \nu_0 A + \nu_1 B + \nu_2 C + \nu_3 D, \qquad H = \tau_0 A + \tau_1 B + \tau_2 C + \tau_3 D$$

E, F, G, H noktaları A, B, C, D noktalarına projektif bağlıdır denilir. Kısa olarak,

(105) $$(EFGH, ABCD)_1 = (\lambda_1/\lambda_0) : (\mu_1/\mu_0) : (\nu_1/\nu_0) : (\tau_1/\tau_0)$$
$$(EFGH, ABCD)_2 = (\lambda_2/\lambda_0) : (\mu_2/\mu_0) : (\nu_2/\nu_0) : (\tau_2/\tau_0)$$
$$(EFGH, ABCD)_3 = (\lambda_3/\lambda_0) : (\mu_3/\mu_0) : (\nu_3/\nu_0) : (\tau_3/\tau_0)$$

ile verilen üç bileşenli oransal değerlere, **dörtlü oranlar** denilir. (68) de olduğu gibi, değerleri hesaplanır.

(106) $$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = |bcde| : |cdae| : |dabe| : |abce|$$
$$\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = |bcdf| : |cdaf| : |dabf| : |abcf|$$
$$\nu_0 : \nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = |bcdg| : |cdag| : |dabg| : |abcg|$$
$$\tau_0 : \tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = |bcdh| : |cdah| : |dabh| : |abch|$$

Mutlak değer ile verilen ifadeler, sözü geçen noktaların belirlediği dörtyüzlülerin hacimleridirler. Dörtlü oranlar projektif dönüşümle değişmezler. İzdüşüm ve kesme işlemleri de aynı kapsamdadır. Dörtlü oranların özelikleri, üçlü oranlarla aynıdır.

Dörtlü Envolüsyon

(107) $$M = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{matrix} \qquad P = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad Q = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Matrisleri birim matrisin dördüncü kökleridir. Bu matrisler ile bir R noktasının ardışık dönüşümleri sıra ile T, S, U olsunlar. U'nun dönüşümü yeniden R olacaktır. Çünkü matrisin dördüncü kuvveti birim matristir. Bir noktanın ardışık dönüşümleri, ilk konuma geliyorsa, dönüşüm ile bulunan noktalar kümesine, **envolüsyon** denilir. Bu matrislerle yapılan dönüşümler, dörtlü envolüsyondur. M matrisi ile yapılan dönüşümün değişmez noktaları $J_1(1, 0, 0 ,0)$, $J_2(0, 1, 0, 0)$, $J_3(0, 0, 1, 0)$, $J_4(0, 0, 0, 1)$ dür. P ve Q nün değişmez noktaları $J_1(1, 1, 1, 1)$, $J_2(1, i, -1, -i)$, $J_3(1, -1, 1, -1)$, $J_4(1, -i, -1, i)$ noktalarıdır. A, B, C, D noktalarının koordinatları ile oluşan matris T ile gösterilsin. TMT^{-1} matrisi envolütüftür. Yani dördüncü kuvveti birim matristir. Üçlü envolüsyonda (78) de olduğu gibi, bu matrisle yapılan dönüşümlerin değişmez noktaları, A, B, C, D noktaları olur. Dönüşmüş noktalar, projektif dönüşümün özeliği olarak, değişmez noktaların doğrusal toplamıdırlar. (79) ve (80) deki işlemleri, üç boyutlu uzaya genelleştirelim. E, F, G, H homolog noktaların T matrisi ile dönüşmüşlerini göz önüne alalım. $E(1, \lambda, \mu, \nu)$ olduğuna göre,

$$E' = TE, \quad F' = TF, \quad G' = TG, \quad H' = TH, \quad F = ME, \quad G = MF, \quad H = MG, \quad E = MH$$
$$E = T^{-1}E', \quad F = T^{-1}F', \quad G = T^{-1}G', \quad H = T^{-1}H'$$
$$F = ME = MT^{-1}E', \quad G = MF = MT^{-1}F', \quad H = MG = MT^{-1}G', \quad E = MH = MT^{-1}H'$$

Son satır eşitliklerini, soldan T ile çarpalım.

$$TF = F' = TMT^{-1}E', \quad TG = G' = TMT^{-1}F', \quad TH = H' = TMT^{-1}G', \quad TE = E' = TMT^{-1}H'$$

E', F', G', H' noktalarının TMT^{-1} matrisi ile dörtlü envolüsyon dönüşümü içinde olduğu görülmektedir. Çünkü dönüşüm ardışık olup, ilk noktaya gelinmiştir. Bu dönüşümün değişmez noktaları, (78) göre A, B, C, D noktalarıdır. (83) e göre bir dörtlü envolüsyonda, homolog dörtlülerin değişmez dörtlüye, dörtlü oranları sabittir. Bu sabitin değeri (84) ve (85) e göre, 1 in dördüncü köklerinin bir sırasıdır. Bu sıralardan dörtlü oranın birinci bileşeni için $J_1(1, i, -1, -i)$, ikinci bileşen için $J_2(1, -1, 1, -1)$, üçüncü bileşen için de $J_3(1, -i, -1, i)$ sıraları kullanılacaktır. En başta, A'ların başında $J_4(1,1,1,1)$ sırası vardır.

(108)
$$E = \lambda A + \mu B + \nu C + \tau D, \quad F = \lambda A + i\mu B - \nu C - i\tau D,$$
$$G = \lambda A - \mu B + \nu C - \tau D, \quad H = \lambda A - i\mu B - \nu C + i\tau D$$
$$(EFGH, ABCD)_1 = 1 : i : -1 : -i, \qquad (EFGH, ABCD)_2 = 1 : -1 : 1 : -1,$$
$$(EFGH, ABCD)_3 = 1 : -i : -1 : i$$

Dörtlü homografide homolog noktaların ardışık olduğu göz önüne alınırsa, noktaların dairesel bir dönmesinde, (102) denklemi sağlanacak ve aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacaktır. Dörtlü envolüsyonun parametrik denklemi bulunur.

(109)
$$a\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 + b(\rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \rho_1\rho_3\rho_4 + \rho_2\rho_3\rho_4) + c(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 +$$
$$\rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4) + d(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) + e = 0$$

Dörtlü envolüsyonun parametrik denkleminde, indisler eşitlenirse, dörtlü envolüsyonun değişmez noktalarını veren, dördüncü derece denklemi bulunur.

(110)
$$a\rho^4 + 4b\rho^3 + 6c\rho^2 + 4d\rho + e = 0$$

Bir nokta dörtlüsünün, envolüsyonu sağlaması için gerken koşulu arayalım. Bu dörtlünün parametreleri,
$$a'\rho^4 + 4b'\rho^3 + 6c'\rho^2 + 4d'\rho + e' = 0$$
denkleminin kökleri osunlar. (99) da olduğu gibi, kökler ve katsayıların bağıntılarından,
$$a(e'/a') + b(-4d'/a') + c(6c'/a') + d(-4b'/a') + e = 0$$
$$ae' - 4bd' + 6cc' - 4db' + ea' = 0$$
bulunur. Beş tane nokta dörtlüsünün, aynı bir dörtlü envolüsyona ait olması için,
$$\begin{matrix} e'_1 & -d'_1 & c'_1 & -b'_1 & a'_1 \\ e'_2 & -d'_2 & c'_2 & -b'_2 & a'_2 \\ e'_3 & -d'_3 & c'_3 & -b'_3 & a'_3 \\ e'_4 & -d'_4 & c'_4 & -b'_4 & a'_4 \\ e'_5 & -d'_5 & c'_5 & -b'_5 & a'_5 \end{matrix} = 0$$
koşulu bulunur.

(107) de verilen birim matrisin dördüncü kökleri, P ve Q matrisleri ile de, envolüsyon dönüşümü yapılır. Bu matrisler göreceli ortogonal olduğundan, dönüşümde uzunluklar ve açılar korunur. EFGH homolog noktalar, düzgün dörtyüzlü oluştururlar. M matrisi göreceli ortogonal değildir.

Düzlemde üçlü envolüsyonun, düzlemde dönmeyi getirmesi gibi, uzayda dörtlü envolüsyon da, uzayda dönmeyi ilham etmiştir. Düzlemde dönmenin ölçümü düzlem açı ile yapılır. Uzayda dönmenin ölçümü de uzay açı ile yapılacaktır. Bu nedenle uzay açı kavramına girelim.

V
ÜÇ BOYUTLU UZAY

Üçyüzlü veya Uzay Açı

Uzayın bir noktasından çıkan ve üçü bir düzlem üzerinde bulunmayan, üç doğrunun oluşturduğu geometrik şekle, **üçyüzlü** veya **uzay açı** denilir. Bir üçyüzlünün tepesinde üç tane açısı, üç tane iki düzlemli açısı, üç tane ayrıtı ve bir de uzay açısı (tepede) vardır. Eğer iki açısı eşitse, **ikiz açılı üçyüzlü**, üç açısı eşitse, **düzgün üçyüzlü**, üç açısı da dik ise, **düzgün dik üçyüzlü** veya **düzgün dik açı,** bir, iki düzlemli açısı dikse, **dik üçyüzlü** denilecektir. Bir üçyüzlünün yüzlerine, eşit uzaklıkta buluna noktaların geometrik yerine, üçyüzlünün **açıortayı** denilir. Bir üçyüzlünün iki yüzüne eşit uzaklıkta bulunan, noktaların geometrik yerine, iki düzlemli açının, **açıortay düzlemi** denilir.

Tam uzay açı dört eşit dilime ayrılır. Düzgün dörtyüzlünün merkezi, O başlangıcı ve köşeler A, B, C, D olsun. Birinci dörtte bir dilim OABC uzay açısı, ikinci dörtte bir dilim OBCD uzay açısı, üçüncü dörtte bir dilim OCDA uzay açısı, dördüncü dörtte bir dilim de ODAB uzay açısıdır. Uzayda dönme bu uzay açıların sırasında olacaktır. Her uzay açının sayısal değeri, uzay açının birim küre üzerindeki küresel üçgeninin alanıdır.

Bir üçyüzlünün iki düzlemli açılarının açıortay düzlemleri, bir doğru boyunca kesişirler. Bu doğru üçyüzlünün açıortayıdır. Açıortay düzlemleri üzerindeki noktalar, üçyüzlünün yüzlerine eşit uzaklıktadırlar. Bu nedenle üç açıortay düzleminin ikişer, ikişer arakesitleri üçyüzlünün açıortayında çakışır. Üçyüzlünün elemanlar arasındaki bağıntıları, Küresel Trigonometri incelemiştir.

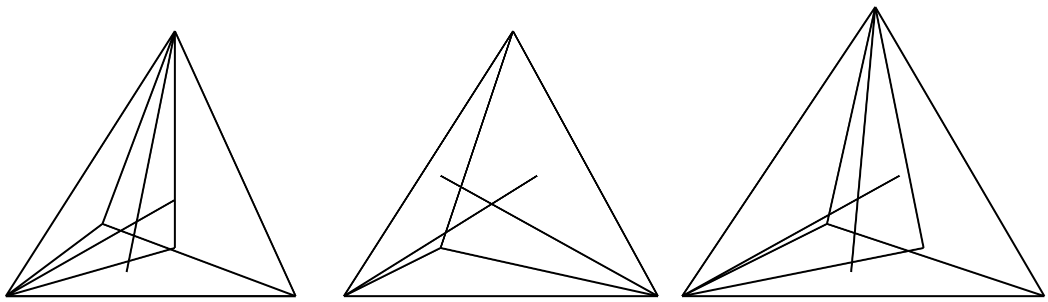
Dörtyüzlü

Üçyüzlünün bir düzlemle kesilmesi ile oluşan, geometrik şekle **dörtyüzlü** denilir. Dörtyüzlünün altı ayrıtı eşitse, **düzgün dörtyüzlü** adını alır. Dört yüzlünün yüzlerinin ağırlık merkezini, karşı köşeye birleştiren doğrulara, dört yüzlünün **yüzortayları**, tepeden tabana inilen dik doğrulara da, dörtyüzlünün **yükseklikleri** denilir. Üç ayrıtı eşit olan dörtyüzlüye **üçüzkenar** dörtyüzlü denilir. Genelde yüzortayı, açıortay ve yükseklik farklıdır. Eğer üçüzkenar dörtyüzlünün tabanı, eşkenar üçgen ise, bu tabandan geçen yüzortayı, açıortay ve yükseklik çakışır.

Herhangi bir dörtyüzlünün, dört yüzortayları bir noktadan geçerler ve 1/3 oranında kesişirler. Bu noktaya dörtyüzlünün **ağırlık merkezi** denilir. ABCD dörtyüzlüsünün AE ve BE kenarortaylarını çizelim. E nin üzerinde bulunduğu yüzeylerin ağırlık merkezleri, sırayla F ve H olsun. I'inci ve II'inci Tales teoremlerinden,

$$EF/EA = EH/EB = GF/GB = GH/GA = FH/AB = 1/3,$$

yazılır. BF ve AH aynı düzlem üzerinde olduklarından, G noktasında kesişirler. FH paralel AB olur. Diğer yüzortaylarının da, bunlarla aynı oranda kesişeceği göz önüne alınırsa, dördünün bir noktadan geçtiği ve 1/3 oranında kesiştiği anlaşılır.



Şekil 3 Şekil 4 Şekil 5

Dörtyüzlülerin üst köşesi A, sol köşe B, sağ köşe C dir. Şekil 3 deki dörtyüzlünün, EA kenarortayı üzerindeki ağırlık merkezi F, EB üzerindeki ağırlık merkezi de H dır. Dörtyüzlünün ağırlık merkezi G dir. Şekil 4 de B ve C köşesindeki uzay açıların kesim noktası M dir. Şekil 5 de E , DC nin orta noktasıdır. F noktası, B den inilen yükseklik ayağı, H da A dan inilen yükseklik ayağıdır.

Bir dörtyüzlünün dört açıortayı, bir noktadan geçer. B ve C köşesinden geçen açıortaylar, BC ayrıtlı iki düzlemli açının, açıortay düzleminin üzerinde bulunurlar. Bu açıortaylar bir noktada kesişirler. Benzer düşünce tekrarlanırsa, dört açıortay ikişer, ikişer kesişirler. Kesim noktaları çakışır. Açıortaylar farklı noktalarda kesişselerdi, herhangi üç açıortayın kesim noktaları bir üçgen oluşturacak, açıortaylar bir düzlem üzerinde bulunacaklar ve dörtyüzlü uzay şekli oluşturmayacaktı. Üçyüzlünün açıortayı üç yüze de, eşit uzaklıktadır. M noktası iki açıortayın kesim noktası olduğundan, dört yüze de eşit uzaklıktadır. Açıortayların ikişer, ikişer kesim noktaları çakışıktır. Çünkü dört yüze eşit uzaklıkta olan nokta bir tanedir. Bu nokta,yükseklik ayaklarında, yüzlere teğet olan dörtyüzlünün içten teğet küresinin merkezidir.

Tabanı eşkenar üçgen olan, üçüzkenar dörtyüzlünün, yükseklikleri bir noktada kesişirler. Üçüzkenar dörtyüzlünün tepesi A olsun. Yan yüzleri ikizkenar üçgen olduklarından, yan yüz yükseklik ayakları, taban ayrıtlarının orta noktalarıdır. BF ve AH dikmeleri, E orta noktasını karşı ayrıta birleştiren düzlem üzerinde bulunurlar ve kesişirler. Çünkü üç dikme teoremi nedeni ile, EBA düzlemi DC ayrıtına dik olur. AH ve BF yükseklikleri DC ayrıtına diktir. Benzer düşünce ile diğer yüksekliklerin de, birlikte ikişer,ikişer kesiştikleri görülür. Diğer yüksekliklerin, üzerinde bulunduğu düzlemler, farklı olacağından, kesim noktaları düzlemlerin ortak noktası olup, bir tanedir.

Bir üçgende açıortayların kesim noktasının, üçgene göre barisantrik koordinatları, kenarları ile orantılıdır. Açıortayların kesim noktası, üçgenin kenarlarına eşit uzaklıktadırlar. Açıortayların kesim noktasının, üçgenin kenarları ile oluşturduğu üçgenlerin alanları, kenarlarla orantılı olurlar. Çünkü orantıda, alan ifadesindeki yükseklikler kısalır, yalnız kenarlar kalır. Bu alanlar barisantrik koordinatların tanımıdır.

Bir dörtyüzlüde açıortayların kesim noktasının, dörtyüzlüye göre barisantrik koordinatları, karşı yüzlerin alanları ile orantılıdır. Açıortayların kesim noktası, karşı yüzlere eşit uzaklıktadırlar. Çünkü açıortay düzlemlerinin ortak noktasıdır. Açıortayların kesim noktasının, karşı yüzlerle oluşturduğu dörtyüzlülerin hacimleri, karşı yüzlerin alanları ile orantılı olurlar. Orantıda, hacim ifadesindeki yükseklikler kısalır, yalnız alanlar kalır. Sözü geçen hacimler, barisantrik koordinatların tanımıdır.

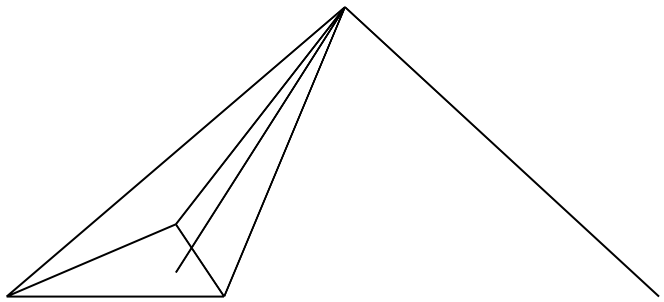
Bir dörtyüzlüde açıortayların karşı yüzü kestiği noktalar, karşı yüzdeki üçgenin açıortaylarının kesim noktası ile çakışmaz. Çakışma ikidüzlemli açıların, açıortay düzlemlerine dik olan, kısaca açıortaya dik olan, bir düzlemle kesitinde, tabanı eşkenar üçgen olan üçüz kenar dörtyüzlünün tabanında ve düzgün dörtyüzlüde gerçekleşir.

Bir dörtyüzlüde, açıortayların tabanı deldiği noktaların, karşı kenarlarla oluşturduğu üçgenlerin alanları, yani bu noktanın barisantrik koordinatları, tabanda oluşan üçgenlerle komşu olan, yan yüzlerin alanları ile orantılıdır. Çünkü bir açıortay üzerindeki noktaların barisantrik koordinatları, tepe karşıtı koordinat müstesna aynıdır. Hepsi yan yüzlerin alanları ile orantılıdırlar.

Bir ABCD dörtyüzlüsünde A açısının açıortayı, karşı tabanı N de kessin.

(111) $$[ABC] : [DAC] : [DBA] = [NBC] : [DNC] : [DBN]$$

Bir dörtyüzlüde bir köşeden geçen açıortayları, taban düzlemini N', N'', N''' de kessinler. Bu noktaların taban kenarı ile oluşturdukları üçgenlerin alanları, yan yüzlerin alanları ile, biri ters diğerleri doğru işaretle orantılıdır. Açıortay üzerindeki noktaların barisantrik koordinatları, tepe karşıtı koordinat müstesna, aynıdır. Bunlar da yan yüzlerin alanları ile orantılıdır. Bir tanesi bulunduğu bölge veya dönme yönü nedeni ile negatiftir.



. Şekil 6

Dört yüzlünün üst köşesi A, alt köşeler B den başlayarak C ve D dir. A köşesinin iç açıortay ayağı N, dış açıortay ayağı da N' dür.

(112) [ABC] **:** [DAC] **:** [DBA] = – [N'BC] **:** [DN'C] **:** [DBN'] = [N''BC] **:** – [DN''C] **:** [DBN''] = [N'''BC] **:** [DN'''C] **:** – [DBN''']

olur. Burada üçgenler, işaretli üçgenler olarak alınmışlardır. [N'BC], [DN''C], [DBN'''] alanları, bulundukları bölge, yani dönme yönü nedeni ile negatiftirler. Tabanı eşkenar üçgen olan üçüzkenar dörtyüzlülerde ve düzgün dörtyüzlüde birinci yanın oranları birdir. Çünkü yan yüz alanları eşittir.

(113) N = [ABC] D + [DAC] B + [DBA] C , N' = – [ABC] D + [DAC] B + [DBA] C
N'' = [ABC] D – [DAC] B + [DBA] C, N'''= [ABC] D + [DAC] B – [DBA] C

Bir dörtyüzlüde N', N'', N''' noktaları D, B, C noktaları ile ve (87) nedeni ile eşkenar üçgen üçlü envolüsyonu oluştururlar. Tabanı eşkenar üçgen olan, üçüzkenar veya düzgün dörtyüzlüde

(114) $(N'\,N''\,N''', DBC)_1 = -1 : -1 : 1$; $(N'\,N''\,N''', DBC)_2 = -1 : 1 : -1$

olur. Karşıt olarak üçlü oranların değerleri (114) ile veriliyorsa, bu üçlü nokta üçlüsü, üçlü eşkenar üçgen envolüsyonu oluştururlar. Burada bir boyutlu uzayın envolüsyonundan farklı bir durum karşımıza çıkmıştır. Herhangi bir dörtyüzlüde, açıortayların karşı yüzleri deldiği noktaların barisantrik koordinatları, aralarında mutlak değerce eşit değildirler. Yani N(1,1,1) değildir. Çünkü üçyüzlünün açıortayının tabanı deldiği nokta, herhangi bir dörtyüzlüde, taban üçgeninin açıortaylarının kesim noktası ile çakışmaz. Dış açıortayların karşı yüzü deldiği noktalar, bir eşkenar üçgen oluşturmaz. Fakat tabanı eşkenar üçgen olan dörtyüzlüde ve düzgün dörtyüzlüde N(1,1,1) dir ve bu üçgen eşkenardır. Bu özelik bir boyutlu uzayda yoktur.

Düzlemin Barisantrik Koordinatlarında Dönme

Teorem

. **Uzayda herhangi bir vektörün, karteziyen koordinatlardaki bileşenleri, vektörün sonsuzdaki düzlemi deldiği noktanın, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre, barisantrik koordinatlarıdır**. Önce sonluda kanıtlayalım.

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_0\mathbf{a}_0 + \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = 0$$

Barisantrik denklemlerinden birincisi, vektörel toplamı, kullanışlı bir biçime getirmiştir.

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + \lambda_2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0) + \lambda_3(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_0) = 0, \quad \lambda_1\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_0\mathbf{A}_2 + \lambda_3\mathbf{A}_0\mathbf{A}_3 = 0$$

Bu bağıntıyı sağlayan A_0, A_1, A_2 noktalarına, **barisantrik durumda** denilir. Bu bağıntılardan, dört noktanın bir düzlem üzerinde olduğu görülüyor. İzdüşüm ile dört denklem yazılır. Fakat koordinat matrisinin rangı 3 olduğundan, üç denklem bağımsızdır.

(115)
$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_0 a_{01} + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} = 0$$
$$\lambda_0 a_{02} + \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} = 0$$

$$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{matrix} : \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{01} & a_{21} & a_{31} \\ a_{02} & a_{22} & a_{32} \end{matrix} : \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{01} & a_{11} & a_{31} \\ a_{02} & a_{12} & a_{32} \end{matrix} : \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{matrix}$$

Bu formüllerde, λ_i'lere karşıt gelenler, üçgenlerin alanlarıdır. Birinci bağıntıdan λ_3 yok edilir, diğerleri yerine, x_i'ler konulur ve $\mathbf{a}_3$ yerine $\mathbf{r}$ yazılırsa,

(116)
$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = [A_3A_1A_2] : [A_0A_3A_2] : [A_0A_1A_3] : [A_2A_1A_0]$$
$$\mathbf{r} = (x_0\,\mathbf{a}_0 + x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2) / (x_0 + x_1 + x_2)$$

uzayda barisantrik vektör elde edilir. $\mathbf{a}_i$ vektörleri, A_0, A_1, A_2 noktalarının yer vektörleridir. Bu yer vektörlerinin katsayıları, $\mathbf{r}$ yer vektörünün karteziyen bileşenleridir. x_i sayıları, karşıt gelen yüzlerdeki üçgenlerin alanları olduklarından, A_0, A_1, A_2 üçgenine göre, A_3 noktasının barisantrik koordinatlarıdır. Teorem sonluda kanıtlanmış olur.(Bu işlemler Prof. Dr. Macit Bükenin Analitik Geometri I kitabından alınmıştır.)

Sonsuzda kesişen düzlemlere, paralel düzlemler denilir. Paralel düzlemlerde ve doğrularda, Tales teoremleri vardır. Sonludaki bir düzlem sonsuzdaki düzleme paraleldir. Paralellik tanımına uygundur. Çünkü arakesiti sonsuzdadır. Paralellik özelikleri sonsuzda kesişmekten kaynaklanır. Başka bir koşul gerektirmez. O koşul da vardır. O halde, paralel düzlemlerin özelikleri, burada geçerlidir. (116) da açıklaması yapılan $A_0A_1A_2$ düzlemi, sonsuzdaki düzleme paraleldir. Tales teoremi göz önüne alınırsa, aynı özelik sonsuzdaki düzlem için de, doğru olur. **Karteziyen koordinatlarda, sonsuzdaki düzlem üzerinde alınan bir noktanın, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre barisantrik koordinatları, bu noktayı başlangıca birleştiren doğru üzerindeki noktaların karteziyen koordinatlarıdır.**

Burada sonsuzdaki koordinat üçgeni, barisantrik koordinat üçgeni olarak tasarlanmıştır. Sonluda alınan koordinat sistemi karteziyen ise, bu üçgen eşkenardır. Barisantrik koordinat üçgeninin birim doğrusu, sonsuzdaki doğrusudur. Böylece sonsuzdaki düzlemin, sonsuzda bir doğrusu tasarımı yapılmıştır. Yani sonsuzdaki düzlem, afindir. Barisantrik koordinat üçgeni eşkenar ise, izotrop noktaların barisantrik koordinatları J(1, j, k), J'(1, k, J) dir. Bu noktaların da tasarımı ile, sonsuzdaki düzlem Öklid düzlemi olur. Bu tasarımlar ile sonsuzdaki düzlem üzerinde, sonludaki düzlem gibi işlemler yapılacaktır. Kitabın sonuna, konuyla ilgili Borland Pascal ile (Program 1), bir uygulama programı konulmuştur.

. (73) de verilen P ve Q matrisleri, barisantrik koordinatlarda noktayı, P sağa, Q sola olmak üzere, 120^o döndürürler. Bu matrisler uzayda, dik koordinatlarda göreceli ortogonal matrislerdir. Uzayda dik koordinatlarda da, aynı dönmeyi yaparlar. Eğer (148) ile verilen uzayda dönme formülünde, dönme ekseni olarak, $\mathbf{u}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ birim vektörü, pozitif yönde üç dik eksenin açı ortay doğrultusu ve dönme açısı olarak, $2\theta = \pm 120^o$ alınırsa, P sağdan, Q soldan dönme yapan matrisler bulunur. Uzayda iki vektörün vektörel çarpımı, sonsuzdaki düzlemde de yapılır. Uzayda bulunan bileşenler, sonsuzdaki düzlemde barisantrik koordinatlar olarak alınır. Uzayda göreceli ortogonal matrisle yapılan bir dönme, aynı matrisle sonsuzdaki düzlemde barisantrik koordinatlarda yapılır. Dik koordinatlarda, sonsuzdaki koordinat üçgeni eşkenardır. Çünkü, bu üçgenin ağırlık merkezi, dik koordinat eksenlerinin açıortayının, sonsuzdaki düzlemi deldiği B(0,1,1,1) noktası olup, BA_1, BA_2, BA_3

doğru parçaları eşit açılarla görülmektedir. Koordinat üçgeninin kenarları da, eşit açılarla görülmektedir.

Dik koordinatlarda düzgün üçyüzlünün, dört tane açıortayı vardır. Bunların sonsuzdaki düzlemi deldiği noktalar $N_1(0,1,1,1)$, $N_2(0,-1,1,1)$, $N_3(0,1,-1,1)$, $N_4(0,1,1,-1)$ dir. P ve Q matrisleri sağdan ve soldan, N_1 noktası etrafında N_2 yi döndürmek suretiyle N_3 ve N_4 noktalarına getirirler. N_1 bu matrislerin değişmez noktasıdır. Sonsuzdaki düzlem üzerinde N_2, N_3, N_4 nokta üçlüsü, sonsuzdaki koordinat üçgenin köşelerine göre, eşkenar üçgen, üçlü harmonik eşleniğidirler. ON_2 açıortayını dönme ekseni olarak alalım. N_2 , matrisin değişmez noktası olsun. $\mathbf{u}(-1/\surd 3, 1/\surd 3, 1/\surd 3)$, $2\theta = \pm 120^o$ alınmalıdır. $\mathbf{u}$, ON_2 doğrultusunda birim vektördür. (148) dönme matrisinden bulunan, (88) de Q' matrisi ile $N_1(1,1,1)$, $N_3(1,-1,1)$ $N_4(1,1,-1)$, sonsuzdaki açıortay noktaları, envolüsyon oluştururlar. (87) de verilen envolüsyon tanımına uyarlar. Bu dönüşümün değişmez noktaları (88) de P' matrisinin değişmez noktaları olarak verilmiştir. Benzer düşünce ile ON_3 ve ON_4 eksenleri etrafında dönmeler alınırsa, soldan ve sağdan dönme yapan matrisler (88) de verilmiştir.

Uzayda Karteziyen Koordinatlar

Bir üçyüzlünün uzayda dik koordinat üçyüzlüsü olması için, sonsuzdaki üçgeninin köşeleri ile, iç ve dış açıortaylarının sonsuzdaki noktalarından, en az iki üçlüsünün eşkenar üçgen envolüsyonuna ait olması gerekir. Dış açıortay vektörlerinin bileşenleri, P matrisi ile birbirlerine dönüşmelidirler. Herhangi bir dörtyüzlüde (111) ve (112) özelikleri vardır. Düzgün üçyüzlüde dış açıortaylar birbirleri ile eşit açılar yaparlar. İç açıortay, dış açıortaylarla eşit açılar yapar. Bu iki açı, birbiriyle eşit veya bütünler değildir. Koordinat üçyüzlüsünü, verilen düzgün üçyüzlüye dönüştürürsek, sonsuzdaki düzlemi, açıortayların kestiği noktaların barisantrik koordinatları sıra ile, $N_1(1, 1, 1)$, $N_2(–1, 1, 1)$, $N_3(1, –1, 1)$, $N_4(1, 1, –1)$ olur. Fakat herhangi bir düzgün üçyüzlüde skaler çarpım çok karışık olacağından, açıortaylar arasındaki açıların kosinüsü, –1/3 ve 1/3 olacak biçimde işlemler yürütülemez. Bu açıların bütünler olması yalnız düzgün dik üçyüzlüde vardır. Bir düzgün dik üçyüzlüde, dış açıortayların aralarındaki açıların kosinüsü –1/3, bir dış açıortayın iç açıortayla yaptığı açının kosinüsü 1/3 dür. Bu açılar bütünlerdir. Dört açıortayın sonsudaki noktaları, üçer üçer eşkenar üçgen üçlü envolüsyonu oluşturur. O noktasında uzay açının 1/8'lik dilimine bir küp koyarak, 8 tane küpü yerleştirelim. Bu küpler arasında üç türlü komşuluk vardır. Bunlar yüz komşuluğu (bir yüz ortak), ayrıt komşuluğu (bir ayrıt ortak), nokta komşuluğu (bir köşe ortak) dur. Nokta komşuluğunda olan küplerin, ortak köşedeki açıortayları çakışır. Nokta komşuluğunda olan iki küpün biri, üçüncü bir küpe, ayrıt komşuluğunda ise, diğeri, yüz komşuluğundadır. Bu nedenle, ortak köşedeki açıortayların aralarındaki açılar bütünlerdir. Simetri nedeni ile, köşe ve ayrıt komşuluğunda olan üç küpün, açıortayları arasındaki açılar bütünler, diğer guruptakilerinki eşittir. Düzgün üçyüzlüde simetri olmadığından, bu özelik yoktur.

Uzayın İzotrop Noktaları

Düzlemde izotrop noktalar, koordinat sistemini dik kılan bir envolüsyonun, değişmez noktaları olarak verilmiştir. Uzayda koordinat sistemini dik kılan, bir üçlü envolüsyonun, değişmez noktaları olarak ve 1 in üçüncü ve altıncı köklerinin kümesinde, izotrop noktaları arayalım. Koordinat sisteminin dik olması için, önce düzgün dik açı olması gerekir. İzotrop noktalar $J_1(1, a_1, a_2)$, $J_2(1, b_1, b_2)$, $J_3(1, c_1, c_2)$ olsunlar. Değişmez noktaları J_1, J_2 , J_3 olan, üçlü envolüsyonun noktaları ve iç çarpım ile, diklik koşulu yazılırsa,

$$D = J_1 + \lambda J_2 + \mu J_3, \qquad E = J_1 + j\lambda J_2 + k\mu J_3, \qquad F = J_1 + k\lambda J_2 + j\mu J_3$$

$$D(1 + \lambda + \mu , a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1, a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2), E(1 +\lambda j + \mu k, a_1 + \lambda b_1 j + \mu c_1 k, a_2 + \lambda b_2 j + \mu c_2 k)$$

$$\mathbf{OD.OE} = (1 + \lambda + \mu)(1 + \lambda j + \mu k) + (a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1)(a_1 + \lambda b_1 j + \mu c_1 k) + (a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2)(a_2 + \lambda b_2 j + \mu c_2 k) = 1 + a_1^2 + a_2^2 + \lambda(j + a_1 b_1 j + a_2 b_2 + a_2 b_2 j + 1 + a_1 b_1) + \lambda^2(j + b_1^2 j + b_2^2 j) + \lambda\mu(k + j + b_1 c_1 k + b_2 c_2 k + b_2 c_2 j + b_1 c_1 j) + \mu(k + 1 + a_1 c_1 k + a_2 c_2 k + a_2 c_2 + a_1 c_1) + \mu^2(k + c_1^2 k + c_2^2 k) = 0$$

olur. D, E, F ifadeleri, (80) de verilen üçlü harmonik eşlenik noktaların sonsuzdaki düzlem üzerindeki koordinat üçgenine göre, barisantrik koordinatlarıdır. Bu koordinatlar burada **OD, OE** uzay vektörlerinin bileşenleri olarak alınmış ve diklik koşulu yazılmıştır. Uzayda bir vektörün dik bileşenleri, vektörün sonsuzdaki düzlem üzerindeki noktasının, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre barisantrik koordinatlar olurlar.

Örnek:

(117) $$P_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Dik koordinatlarda verilmiş, başlangıçtan geçen düzlem denklemini, göz önüne alalım. Bu düzlemin sonsuzdaki düzlemle arakesitini bulalım.

$$x_0 = 0, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

İkinci denklemde x_0 yerine sıfır konulursa gene aynı denklem bulunur. x_0'lı terim zaten yoktur. İkinci denklem, sonsuzdaki düzlemin, P_1 düzlemi ile arakesit doğrusunun denklemi olur. Bu denklem, sonsuzdaki barisantrik koordinat üçgenine göre, birim doğrusunun barisantrik denklemidir. P_1 düzlemi, sonsuzdaki düzlemi, sonsuzdaki barisantrik koordinat üçgeninin birim doğrusu boyunca keser. x_1, x_2, x_3 nokta koordinatları, artık sonsuzdaki koordinat üçgenine göre barisantrik koordinatlardır. $P(0, x_1, x_2, x_3)$ dik koordinatları ile verilen P noktası, sonsuzdaki düzlem üzerinde olduğundan, x_1, x_2, x_3 sayıları sonsuzdaki barisantrik koordinat üçgenine göre, barisantrik koordinatlardır.

Yukardaki işlemde kısaltmalar yapılırsa,

(118) $$1+a_1^2 + a_2^2 - \lambda k(1 + a_1b_1 + a_2b_2) + \lambda^2 j(1 + b_1^2 + b_2^2) - \lambda\mu(1 + b_1c_1 + b_2c_2)$$
$$- \mu j(1 + a_1c_1 + a_2c_2) + \mu^2 k(1 + c_1^2 + c_2^2) = 0$$

bulunur. D, E, F noktaları sonsuzdaki düzlemdedirler. Karşılarındaki ifadeler sonsuzdaki izotrop noktalara göre, barisantrik koordinatlarıdır. **OD** ve **OE** vektörlerinin bileşenleri, sonsuzdaki noktalarının barisantrik koordinatlarıdır.

İzotrop noktaları arıyoruz. Herhangi üç nokta, izotrop nokta olarak alınabilir. Çünkü doğrusal bağımsız her üç nokta ile, üçlü envolüsyon kurulabilir. Ancak koordinat sisteminin, dik olmasını sağlayacak işlemler, çok karışık ve yapılması olanaksız olur. İşlemlerin yürütülebilmesi için, kısa ve kolayca sonuca götüren, bir nokta üçlüsü arıyoruz. Bu amaca ulaşmak için, yalnız λ^2'li ve μ'lü terimler bırakılacak, diğerleri sıfır kılınacaktır. İşlemler basitleştirilecektir. Sonsuzdaki düzlemde üç nokta için, 6 bağımsız parametre gereklidir. Eksenlerin doğrultularının, birbirlerine dik olması için, üç tane diklik koşulu konulacaktır. Burada bir tane konulmuştur. Bir nokta üçlüsünün, bir üçlü envolüsyona ait olması için, (92) denklemini sağlaması gerekir. Bu denklem, parametrelerin barisantrik karmaşık sayıları üzerine kurulmuştur. Barisantrik karmaşık sayıların iki bağımsız bileşeni vardır. O halde, (92) da bulunacak toplamın iki bağımsız bileşeninin sıfır olması gerekir. Böylece bir nokta üçlüsünün, bir üçlü envolüsyona ait olması, iki koşul gerektirir. Aldığımız izotrop noktalar, üçlü envolüsyona ait olduklarından, iki koşulu sağlarlar. Üç diklik koşulundan yalnız biri bağımsız, diğerleri bağımlı olur. Onun için burada bir tane diklik koşulu alınmıştır. İzotrop noktaların 6 bağımsız parametresinden ikisi üçlü envolüsyonda, dördü de, basitlik için sıfıra eşitlenen katsayılarla bağlanmıştır. Geri kalan iki terimin toplamı sıfıra eşitlenerek, μ hesaplanmıştır. Üçlü envolüsyon denklemi, bir parametreli olacaktır. Böylece λ ve μ arasında bulunacak en basit bağıntı aranmıştır. Diğer katsayıların sıfırlanması, 1 in üçüncü ve altıncı kökler kümesinde, denemelerle kolayca gerçekleştirilir. Basitlik için, λ^2 ve μ'lü terimin dışındakilerin katsayıları sıfır alınacaktır. 1 in üçüncü kökler kümesinde,

(119) $-3\lambda^2 j + 3\mu j = 0, \quad \mu = \lambda^2, \quad J_1(1, k, j), \quad J_2(1, 1, 1), \quad J_3 (1, j, k)$

olur. Altıncı kökler kümesinde, (-k ve -j altıncı köklerdir. j yerine –k, k yerine –j gelir.)

$$J_1(1, -j, -k), \qquad J_2(1, -1, -1), \qquad J_3(1, -k, -j)$$

olur. İki çözüm daha vardır. Aynı sıradaki koordinatların, işaret değiştirmesi ile bulunur.

(120) $J_1(1, -k, j), J_2(1, -1, 1), J_3(1, -j, k), \qquad J_1(1, k, -j), J_2(1, 1, -1), J_3(1, j, -k)$

Bu noktaları değişmez nokta kabul eden matrisler, (74) de verilmiştir.

Dik koordinatlarda, $\mu = \lambda^2$ alınarak, noktalarının üçlü envolüsyon denklemi,

(121) $D = J_1 + \lambda J_2 + \lambda^2 J_3, \quad E = J_1 + j\lambda J_2 + k\lambda^2 J_3, \quad F = J_1 + k\lambda J_2 + j\lambda^2 J_3$

dır. Sonsuzdaki düzlem üzerinde, izotrop noktalara harmonik eşlenik olan, nokta üçlülerini başlangıca birleştiren doğruların, dik olması zorunlu değildir. Bu üçlüler iki parametreye bağlı olup, iki noktayı başlangıca birleştiren doğruların, dik olması koşulu getirilirse, parametrenin biri yok olur. Bir parametreye bağlı nokta üçlüsünü, başlangıca birleştiren doğrular, dik olurlar. Envolüsyonun tanımlandığı koordinat sistemi, düzgün dik üçyüzlü ise, üçlü envolüsyon **dik üçlü envolüsyon** adını alır. Dik üçlü envolüsyon, $\lambda = 1$ için, dik koordinat sisteminin temel noktalarını verir.

Burada izotrop noktaların koordinatları, barisantrik koordinatlarla verilmiştir. Sonsuzdaki doğru, izotrop doğrudur. Çünkü izotrop noktaları birleştiren doğrudur. Bu doğru gerçeldir. Doğru koordinatları, aynı sayılarla verildiğinden, birim doğrusu da gerçeldir ve barisantrik koordinatlarda sonsuzdaki doğrudur.

İkinci Çözüm İzotrop Noktaları Değişmez Bırakan Matris

İkinci çözüm izotrop noktaları değişmez bırakan matrisi bulmak için, (78) de verilen değişmez noktaların, dönüşüm formülünden yararlanılacaktır.

(122) $T = \begin{matrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{matrix} \quad \begin{matrix} J_3(1, j, k), & TJ_3 = (t_{00} + jt_{01} + kt_{02},\ t_{10} + jt_{11} + kt_{12},\ t_{20} + jt_{21} + kt_{22}) \\ J_1(1, k, j), & TJ_1 = (t_{00} + kt_{01} + jt_{02},\ t_{10} + kt_{11} + jt_{12},\ t_{20} + kt_{21} + jt_{22}) \\ J_2(1, 1, 1), & TJ_2 = (t_{00} + t_{01} + t_{02},\ t_{10} + t_{11} + t_{12},\ t_{20} + t_{21} + t_{22}) \end{matrix}$

Karışıklığa meydan vermemek için, j ve k hep, 1 in üçüncü köklerini gösterecektir. – j ve – k ise 1 in altıncı köklerini gösterecektir. J_1, J_2, J_3 noktaları, (73) de verilen P, envolütüf matrisinin değişmez noktalarıdır, aynı zamanda, düzlemde izotrop noktaların barisantrik koordinatlarıdır. T ile bu noktalar dönüştürülmüştür. Sonsuzdaki düzlemin koordinat üçgeni, üzerindeki noktalar için, barisantrik koordinat sistemidir. Bu nedenle izotrop noktaların barisantrik koordinatları alınmıştır. Bu noktaların, uzayın ikinci çözüm izotrop noktalarına dönüştürülmüşü,

$J'_1(1, -j, -k),\ J'_2(1, -1, -1),\ J'_3(1, -k, -j),\ J'_1 = TJ_3, \quad J'_2 = TJ_2, \quad J'_3 = TJ_1$

olur. Bu eşitlikler içinde, aynı bilinmeyenleri içeren denklemleri bir araya getirelim.

$$\begin{matrix} t_{00} + t_{01} + t_{02} = 1 & t_{10} + t_{11} + t_{12} = -1 & t_{20} + t_{21} + t_{22} = -1 \\ t_{00} + jt_{01} + kt_{02} = 1 & t_{10} + jt_{11} + kt_{12} = -k & t_{20} + jt_{21} + kt_{22} = -j \\ t_{00} + kt_{01} + jt_{02} = 1 & t_{10} + kt_{11} + jt_{12} = -j & t_{20} + kt_{21} + jt_{22} = -k \end{matrix}$$

Üç bilinmeyenli üç denklem sistemi çözülecektir. Bu sistemlerin katsayılar matrisi aynıdır. Matrisler ve ters matrisler,

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & k \\ 1 & k & j \end{matrix} \qquad A^{-1} = 1/3 \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & j \\ 1 & j & k \end{matrix} \qquad x' = Ax, \quad x = A^{-1} x'$$

$$[t_{00}\ \ t_{01}\ \ t_{02}] = A^{-1}[1\ \ 1\ \ 1] = [1\ \ 0\ \ 0], \qquad [t_{10}\ \ t_{11}\ \ t_{12}] = A^{-1}[-1\ \ -k\ \ -j] = [0\ \ 0\ \ -1]$$

$$[t_{20}\ \ t_{21}\ \ t_{22}] = A^{-1}[-1\ \ -j\ \ -k] = [0\ \ -1\ \ 0]$$

$$T = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \quad T^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \quad PT^{-1} = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad TPT^{-1} = \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

İkinci çözüm izotrop noktaların, üçlü envolüsyonunu sağlayacak, $TPT^{-1} = Q'$ matrisidir.

Dört Boyutlu Uzayın İzotrop Noktaları

Dört boyutlu uzayda uzunluk ve açı ölçümleri için, dayanak olacak noktalara gereksinim vardır. Bu işlemler, en kolay biçimde dik koordinatlarda yürütülür. Hem dik koordinatların kolay geçiş işlemleri ile kurulmasına ve hem de, uzunluk ve açıların ölçümüne dayanak olacak, izotrop noktaları arayalım. Eksenler birbirlerine ikişer, ikişer dik olacaklardır. İki ve üç boyutlu uzaylarda olduğu gibi, dört boyutlu uzayda da, koordinat eksenleri dörtlü envolüsyonun elemanları olarak aranmalıdır. Diklik koşulunun dörtlü envolüsyona nasıl yansıdığını araştıralım. Dört boyutlu uzayın sonsuzdaki uzayı üzerinde, doğrusal bağımsız dört nokta, dörtlü envolüsyonun elemanları olarak, sonsuzdaki uzayın koordinat dörtyüzlüsüne göre, barisantrik koordinatları ile verilsinler.

(123) $J_1(1, a_1, a_2, a_3)$, $J_2(1, b_1, b_2, b_3)$, $J_3(1, c_1, c_2, c_3)$, $J_4(1, d_1, d_2, d_3)$

İstenilen koşulları sağlayacak biçimde, bu noktaları belirleyelim. (108) gereğince,

(124) $E = J_1 + \lambda J_2 + \mu J_3 + \nu J_4$, $F = J_1 + i\lambda J_2 - \mu J_3 - i\nu J_4$

$G = J_1 - \lambda J_2 + \mu J_3 - \nu J_3$, $H = J_1 - i\lambda J_2 - \mu J_3 + i\nu J_4$

olur. Dörtlü envolüsyonun denkleminde parametre olarak, uzayın barisantrik karmaşık sayıları kullanılacaktır. Bu denklemi sağlayan noktalar üç bağımsız bileşeni sıfır kılacaklardır. Böylece üç koşul sağlanacaktır. Dört eksen ikişer, ikişer, altı diklik bağıntısı getirir. Sonsuzdaki uzayda, doğrusal bağımsız dört nokta, dörtlü envolüsyonu sağladığından, altı diklik koşulundan, üçü bağımsızdır. Eksenler arasında üç diklik koşulu yazmak yeterlidir. Eksenlerin doğrultu katsayıları, sonsuzdaki noktalarının, sonsuzdaki koordinat dörtyüzlüsüne göre, barisantrik koordinatlarıdır. Eksenlerin doğrultu vektörlerinin iç çarpımları, sıfıra eşitlenecektir.

(125) $E(1 + \lambda + \mu + \nu,\ a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 + \nu d_1,\ a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 + \nu d_2,\ a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 + \nu d_3)$

$F(1 + i\lambda - \mu - i\nu,\ a_1 + i\lambda b_1 - \mu c_1 - i\nu d_1,\ a_2 + i\lambda b_2 - \mu c_2 - i\nu d_2,\ a_3 + i\lambda b_3 - \mu c_3 - i\nu d_3)$

$G(1 - \lambda + \mu - \nu,\ a_1 - \lambda b_1 + \mu c_1 - \nu d_1,\ a_2 - \lambda b_2 + \mu c_2 - \nu d_2,\ a_3 - \lambda b_3 + \mu c_3 - \nu d_3)$

$H(1 - i\lambda - \mu + i\nu,\ a_1 - i\lambda b_1 - \mu c_1 + i\nu d_1,\ a_2 - i\lambda b_2 - \mu c_2 + i\nu d_2,\ a_3 - i\lambda b_3 - \mu c_3 + i\nu d_3)$

(126) **OE.OF** $= (1 + \lambda + \mu + \nu)(1 + i\lambda - \mu - i\nu) + (a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 + \nu d_1)(a_1 + i\lambda b_1 - \mu c_1 - i\nu d_1) + (a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 + \nu d_2)(a_2 + i\lambda b_2 - \mu c_2 - i\nu d_2) + (a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 + \nu d_3)(a_3 + i\lambda b_3 - \mu c_3 - i\nu d_3) = 1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \lambda(1 + i)(1 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \mu(1 - 1)(1 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + \nu(1 - i)(1 + a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3) + i\lambda^2(1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \lambda\mu(-1 + i)(1 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) + \lambda\nu((- i + i)(1 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) - \mu^2(1 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \mu\nu(- i -1)(1 + c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3) - i\nu^2(1 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = 0$

OE.OG $= (1 + \lambda + \mu + \nu)(1 - \lambda + \mu - \nu) + (a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 + \nu d_1)(a_1 - \lambda b_1 + \mu c_1 - \nu d_1) + (a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 + \nu d_2)(a_2 - \lambda b_2 + \mu c_2 - \nu d_2) + (a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 + \nu d_3)(a_3 - \lambda b_3 + \mu c_3 - \nu d_3) = 1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \lambda(-1+1)(1 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \mu(1 + 1)(1 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + \nu(-1 + 1)(1 + a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3) - \lambda^2(1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \mu^2(1 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \lambda\mu(1 - 1)(1 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) + \lambda\nu(-1 -1)(1 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) + \mu\nu(1 - 1)(1 + c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3) - \nu^2(1 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = 0$

OE.OH $= (1 + \lambda + \mu + \nu)(1 -i\lambda - \mu + i\nu) + (a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 + \nu d_1)(a_1 - i\lambda b_1 - \mu c_1 + i\nu d_1) + (a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 + \nu d_2)(a_2 - i\lambda b_2 - \mu c_2 + i\nu d_2) + (a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 + \nu d_3)(a_3 - i\lambda b_3 - \mu c_3 + \nu d_3) = 1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \lambda(- i +1)(1 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \mu(1 - 1)(1 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + \nu(1 + i)(1 + a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3) - i\lambda^2(1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \mu^2(1 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \lambda\mu(- 1 - i)(1 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) + \lambda\nu(i - i)(1 + b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) + \mu\nu(- 1 + i)(1 + c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3) + i\nu^2(1 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = 0$

Bu denklemlerin ortak çözümü, 1 in dördüncü kökler kümesinde, yapılacak denemelerle, kolayca bulunur. Basitlik için λ^2, μ ve ν'lü terimlerden başkalarının katsayıları, 0 alınacaktır.

(127) $J_1(1, i, -1, - i)$, $J_2(1, 1, 1, 1)$, $J_3(1, - i, -1, i)$, $J_4(1, -1, 1, -1)$

ile yapılan denemelerde, kısaltmalardan sonra, sonuçlar sıra ile,

(128) $4i\lambda^2 - 4i\nu^2 = 0$, $8\mu - 4\lambda^2 - 4\nu^2 = 0$, $4i\lambda^2 - 4i\nu^2 = 0$, $\mu = \lambda^2$, $\nu = \lambda$

$\nu = - \lambda$ kökü, çözülecek ikinci derece denklemini irrasyonel kıldığı için alınmamıştır. Bu noktalar görel uzayın izotrop noktalarıdır. Barisantrik koordinatlarla verilmişlerdir. Çünkü bu noktalar, (94)'de verilen P matrisinin değişmez noktalarıdır. Dik koordinatları,

$J_1(0, 1, j, k)$, $J_2(1, 0, 0, 0)$, $J_3(0, 1, k, j)$, $J_4(0, 1, 1, 1)$

dır.

Dörtlü envolüsyon, üç parametreye bağlı iken, diklik koşulu nedeni ile, bir parametreye bağlı olmuştur. Bu özel dörtlü envolüsyona, **dik dörtlü envolüsyon** denilecektir. Bulunan değerler, (124) de yerine konulursa, dörtlü dik envolüsyon denklemi,

(129) $E(1 + 2\lambda + \lambda^2,\ i - i\lambda^2, -1 + 2\lambda - \lambda^2, - i + i\lambda^2),\ F(1 - \lambda^2,\ i + 2i\lambda + i\lambda^2, -1 + \lambda^2, - i + 2i\lambda - i\lambda^2)$

$G(1 - 2\lambda + \lambda^2,\ i - i\lambda^2,\ -1 - 2\lambda - \lambda^2,\ - i + i\lambda^2),\ H(1- \lambda^2,\ i - 2i\lambda + i\lambda^2,\ -1 + \lambda^2, - i - 2i\lambda - i\lambda^2)$

olarak bulunur. $\lambda = 1$ için dik dörtlü envolüsyon, dik koordinat sisteminin, sonsuzdaki uzay üzerinde bulunan, temel noktalarını verir. (127) deki çözümden başka, aynı sıradaki koordinatların ters işaretlisi alınarak, yeni çözümler türetilir.

$J_1(1, - i, -1, - i),\quad J_2(1, -1, 1, 1),\quad J_3(1, i, -1, i),\quad J_4(1, 1, 1, -1)$

$J_1(1, i, 1, i),\quad J_2(1, 1, -1, -1),\quad J_3(1, -i, 1, - i),\quad J_4(1, -1, -1, 1), ...$

Toplam olarak sekiz tane çözüm takımı vardır. 1'in sekizinci kökleri ile de (119) diklik koşulları sağlanır.

$f^2 = i,\qquad f^3 = h,\qquad f^8 = 1$

olmak üzere,

$J_1(1, f, i, h),\quad J_2(1, h, - i, f),\quad J_3(1, - f, i, - h),\quad J_4(1, - h, - i, - f)$

$\mu = - i,\qquad \nu = - i\lambda$

için diklik koşulları ve dörtlü envolüsyon, λ'nın fonksiyonu olarak ifade edilirler.

Uzayda Karmaşık Sayılar

Bir Üçgene Göre Bir Doğrunun Kutbu:

Bir doğrunun, bir üçgenin kenarlarını kestiği noktaların, üçgenin köşelerine göre, harmonik eşleniklerini, karşı köşelere birleştiren doğruların kesim noktasına, bu doğrunun üçgene göre, **kutup noktası**, doğruya da bu noktanın, **kutup doğrusu** denilir. Doğru sonsuzdaki doğru ise, kutup noktası, üçgenin ağırlık merkezidir. Nokta ağırlık merkezi ise, doğru sonsuzdaki doğrudur. Kutup kavramı, üst uzaylara genelleştirilebilir.

Uzayda barisantrik karmaşık sayılar, düzgün dörtyüzlü üzerine kurulacaktır. Bir düzgün dörtyüzlünün B_0 tepesini Ox ekseni üzerinde 1 noktasına, ağırlık merkezi O'yu da, başlangıca koyalım. Sonsuzdaki düzlem üzerinde, koordinat üçgeni eşkenar olduğundan, barisantrik karmaşık düzlem olarak alınacaktır. İlk 1/8'lik uzay diliminin açıortayı, sonsuzdaki koordinat üçgenini, B(0,1,1,1) noktasında, Ox ekseni A_1(0,1,0,0), Oy ekseni A_2(0,0,1,0), Oz ekseni de A_3(0,0,0,1) noktalarında keserler. Sonsuzda barisantrik karmaşık düzlemde, BA_1 vektörü **1** gerçel doğrultusunu, BA_2 vektörü j doğrultusunu, BA_3 vektörü de k doğrultusunu gösterirler. 1, j, k vektörleri 1'in küp kökleri olup, birim vektörlerdir. Ox, Oy ve Oz eksenleri, sonsuzdaki koordinat üçgenini sıra ile A_1, A_2 ve A_3 noktalarında keserler. Bu noktalar sonsuzdadır. Sonsuzda kesişen bu doğrular paraleldirler. Ox, Oy ve Oz karteziyen koordinat eksenleri üzerindeki **1**, **j**, **k** birim vektörleri de, 1'in küp kökleri olacaklardır. Paralel doğrular aynı vektörlerle gösterileceklerdir. Çünkü bu vektörlerin çarpımları değişmez, yalnız toplamları değişir. Vektörlerin toplam kuralı, afin uzaylarda, paralelkenar kuralıdır. Vektörlerin toplamının değerini, sonsuzdaki düzlem belirler. Eğer vektörlerin başlangıç noktası, uç noktalarının oluşturduğu şeklin ağırlık merkezi ise ve vektörler eşit açılar yapıyorlarsa, yani sonsuzdaki doğrunun kutbu ise, vektörlerin toplamı sıfırdır, ağırlık merkezi değilse, sonsuzdaki doğrunun kutup noktası değilse, vektörlerin toplamı sıfır değildir. Bir başka anlatımla, sonsuzdaki düzlemin sonsuzda bir doğrusu vardır. Sonsuzdaki düzlem barisantrik karmaşık düzlem olduğundan, birim doğrusu, sonsuzdaki doğrudur. Afin koordinatlarda vektörlerin toplamı tanımlanır. Afin özelikler sonsuz kavramına dayandırılır. 1'in küp kökleri olan 1, j, k karmaşık sayıları, sonsuzdaki düzlem üzerinde, eşkenar koordinat üçgeninin ağırlık merkezini, köşelere birleştiren birim vektörlerdir. Bunların toplam kuralını sonsuzdaki düzlemin sonsuzdaki doğrusu belirler. Bu toplam 0 dır. Başlangıcı sonluda olan uzayın karteziyen koordinat eksenlerinin baz elemanlar **1**, **j**, **k** vektörlerinin toplam kuralını sonsuzdaki düzlem belirler. Bunlarda 1'in küp kökleridir. Toplamlarını belirleyen sonsuzlar farklıdır. Bu nedenle toplamları da farklıdır.

(130) $1 + j + k = 0, \quad j + k = -1, \qquad \mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \neq 0, \qquad \mathbf{j} + \mathbf{k} \neq -\mathbf{1}$

olur.

Vektörleri taşıyan doğruların sonsuzda kesişmeleri, iki doğrunun paralel olması için yeterlidir. Birinin sonsuzda olması değer taşımaz. Uzayda baz elemanı olan vektörlerin karteziyen koordinatları sıra ile, **1**(1,0,0), **j**(0,1,0), **k**(0,0,1) olup, A_1, A_2, A_3 noktalarının barisantrik koordinatları ile aynıdır. Uzayda bir vektörün karteziyen bileşenleri, bu vektörün sonsuzdaki noktasının, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre, barisantrik koordinatlarıdır. Toplamları paralelkenar kuralıdır. Çünkü koordinat sistemi afindir. Kalın harfler, uzaydaki vektörleri, ince harfler, sonsuzdaki düzlem üzerinde olan, vektörleri ifade eder. Bu özelik, uzayın sanallık özeliğidir. Sanal uzayda ilk 1/8'lik uzay diliminin açıortayı, göreceli uzayın izotrop doğrusudur. Bu doğru üzerinde bulunan doğru parçalarının uzunlukları sıfırdır. **OM** = **1** + **j** + **k** vektörünün uç noktası, izotrop doğru üzerinde M(1,1,1) noktasıdır. OM uzunluğu sıfırdır. Fakat **OM** vektörünün doğrultusu ve yönü vardır.

Diofant Denklemleri

$$x^n_1 + x^n_2 + \ldots + x^n_m = x^n_{m+1}$$

Denklemine **Diofant denklemi** denilir. Çözüm tam sayı olmalıdır. Genelde, tam sayılarla çözümü aranan denklemlere, **Diofant denklemleri** denilmektedir. Burada yalnız ilk tanıma giren denklemler gündeme gelecektir. m ve n isteğe bağlıdır. Genel çözümü yoktur. Bu konuda n>2 ve iki terimli için, Fermat teoremi, bir çözümün olmadığı yönündedir. Fakat bugüne kadar teoremin olumlu veya olumsuz kanıtı verilememiştir. Bazı özel durumlarda çözümler verilir. n = 2, m = 2 özel durumunu göz önüne alalım.

(131) $$x^2 + y^2 = z^2$$

Birinci tarafı, karmaşık sayılar cisminde, çarpanlara ayıralım.

$$(x - iy)(x + iy) = z^2, \quad x + iy = ad, \quad x - iy = bd, \quad x^2 + y^2 = abd^2 = z^2$$

$$x = (a + b)d/2, \; y = (a - b)d/(2i), \quad x = (u^2 + v^2)d/2, \quad y = (u^2 - v^2)d/(2i), \quad z = uvd$$

bulunur. u, v parametreleri isteğe bağlı seçilebilir. d en küçük ortak kattır. x, y, z sayılarının gerçel olması için, u ve v'nin, karmaşık eşlenik olması, sayıların pozitif olması için, sanal terimin mutlak değerce, gerçel terimden küçük olması, tam sayı olması için, u ve v'nin bileşenlerinin, işaretleri göz önüne alınarak toplamının, 2 ile bölünmesi gerekir.

Örnek 4

$$u = 2 + i, \quad v = 2 - i, \quad x = [(2 + i)^2 + (2 - i)^2]/2 = (8 - 2)/2 = 3,$$
$$y = [(2 + i)^2 - (2 - i)^2]/(2i)$$
$$d = 1, \quad x = 3, \quad y = (4i + 4i)/(2i) = 4, \quad z = (2 + i)(2 - i)1 = 5$$

Örnek 5

$$u = 3 + 2i, \; v = 3 - 2i, \quad x = [(3 + 2i)^2 + (3 - 2i)^2]/2 = 5, \; y = [(3 + 2i)^2 - (3 - 2i)^2]/2 = 12$$
$$d = 1, \quad x = 5, \; y = 12, \quad z = (3 + 2i)(3 - 2i)1 = 13,$$

d = 1 alınmıştır. Bu durumda x ile y aralarında asaldır. Bu problemin , terimlerden birinin, ikinci tarafa alınmasıyla, benzer biçimde, klasik çözümü yapılmıştır. Karmaşık sayıların etkinliğini göstermek amacı ile, burada karmaşık sayılarla yapılmıştır.

(132) $m = 3, \quad n = 3 \qquad x^3 + y^3 + z^3 = t^3$

Diofant denklemini çözmek için çarpanlara ayırmak gerektiğinden bu denklemi çözemeyiz.

(133) $$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = t^3$$

Denklemini çarpanlara ayırabildiğimiz için çözeriz. Bu denklem Diofant denklemi değildir. Genel anlamda, tam sayı çözüm aradığımızdan, Diofant denklemdir. Barisantrik karmaşık sayıların uygulaması olması bakımından, çözüm değer taşıyacaktır.

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + jy + kz)(x + ky + jz) = t^3$$

$$x + y + z = ad, \quad x + jy + kz = bd, \quad x + ky + jz = cd, \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = abcd^3 = t^3$$

a, b, c aralarında asal olursa, ikinci taraf tam küp olduğundan, a, b, c de tam küp olmalıdırlar.

$$a = u^3,\ b = v^3,\ c = w^3, \quad x^3 + y^3 + z^3 – 3xyz = u^3v^3w^3d^3 = t^3$$
$$x + y + z = u^3d, \quad x + jy + kz = v^3d, \quad x + ky + jz = w^3d$$
j ve k'nın işlem özeliklerini göz önüne alıp, birinci olarak son üç denklemi, taraf tarafa toplayalım. İkinci olarak, ikinci denklemi k ile, üçüncü denklemi j ile çarpıp toplayalım. Üçüncü olarak, ikinci denklemi j ile, üçüncü denklemi de k ile çarpıp toplayalım.
$$x = (u^3 + v^3 + w^3)d/3, \quad y = (u^3 + kv^3 + jw^3)d/3, \quad z = (u^3 +jv^3 + kw^3)d/3, \quad t = uvwd$$
bulunur. x, y, z'lerin tam sayı olması için, u'nun gerçel ve tam, v ve w nin de, eşlenik (j yerine k, k yerine j gelmiş olması) barisantrik karmaşık tam sayı olması, u, v, w nin her üçünün bileşenlerinin işaretleriyle birlikte toplamının, 3 ile bölünmesi gerekir.

Örnek 6

$$u = 3,\ v = 2 + j,\ w = 2 + k,\ d = 1,\ x = (27 + 8 + 12j + 6k +1 + 8 +12k + 6j +1)/3 = 9$$
$$y = [27 + k(8 +12j + 6k +1) + j(8 +12k + 6j + 1)]/3 = 12,$$
.
$$z = [27 + j(9 + 12j +6k) + k(9 + 12k + 6j]/3 = 6,$$
$$x = 9,\ y = 12,\ z = 6, \quad t = 3(2 + j)(2 + k).1 = 9, \quad 9^3 + 12^3 + 6^3 – 3.9.12.6 = 9^3$$

Örnek 7

$u = 5, \quad v = 1 + 2k – j, \quad w = 1 + 2j – k, \ d = 1, \quad u^3 = 125, \quad v^3 = 1 + 8 – 1 + 6k – 3j + 12j – 12k + 3k + 6j – 12 = – 4 – 3k + 15j,$. $w^3 = – 4 – 3j +15k, \quad x = (125 – 4 – 3k + 15j – 4 – 3j + 15k)/3 = 35,$
$$y = [125 + k(– 4 – 3k +15j) + j(– 4 – 3j + 15k)]/3 = 54,$$
.
$$z = [125 + j(– 4 – 3k +15j) +k(– 4 – 3j + 15k)]/3 =36$$
$$x = 35, \quad y = 54, \quad z = 36,\ t = 7.5 = 35, \quad 35^3 + 54^3 + 36^3 – 3.35.54.36 = 35^3 = 42875$$
Formül, x, y, z sayılarının, karmaşık sayılar cisminde geçerlidir. Tam sayı koşulu, Diofantın anısınadır.

(134) $$m = 3,\ n = 2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

Diofant denklemini çözelim. Dik üçlü envolüsyon denklemini göz önüne alalım.
$$D = J_1 + \lambda J_2 + \lambda^2 J_3,\ E = J_1 + j\lambda J_2 + k\lambda^2 J_3,\ F = J_1 + k\lambda J_2 + j\lambda^2 J_3,$$
$$J_1(1, k, j),\ J_2(1,1,1),\ J_3(1, j, k),\ D(1 + \lambda + \lambda^2,\ k + \lambda + j\lambda^2,\ j + \lambda + k\lambda^2),$$
.. $$E(1 + j\lambda + k\lambda^2,\ k + j\lambda + \lambda^2,\ j + j\lambda + j\lambda^2),\ F(1 + k\lambda + j\lambda^2,\ k + k\lambda + k\lambda^2,\ j + k\lambda + \lambda^2),$$
$$n = (k + \lambda + j\lambda^2)/(1 + \lambda + \lambda^2)$$
olur. Soru dikdörtgenler prizmasında Pisagor teoremidir. x, y, z bileşenleri, prizmanın ikişer, ikişer dik ayrıtlarıdır. Bu nedenle x, y, z bileşenleri, dik üçlü envolüsyon denklemini sağlar. Çözüm dik harmonik eşlenik üçlülerde aranmalıdır. Bu üçlüler içinde, tam sayı ve kareleri toplamı tam kare olan bir üçlü varsa, çözüm vardır ve sözü geçen harmonik üçlü çözümdür. Eğer koşullardan bir tanesi gerçekleşmiyorsa, çözüm yoktur.

D noktasının koordinatlarında, λ parametresinden n parametresine geçelim. Bu işlem ile, j ve k sanal sayıları kalkacaktır. λ'yı son denklemden çekip, D nin koordinatlarında yerine koyalım. n ve λ'lı ifade düzenlenir ve sıfıra eşitlenirse,
$$(j – n)\lambda^2 + (1 – n)\lambda + k – n = 0, \quad \lambda_{1,2} = [\ (n – 1) \pm (– 3n^2 – 6n – 3)^{1/2}]\ /\ [2(j – n)]$$
$$\lambda_1 = [(– 1 + \sqrt{3}\ i)/2 + (1 + \sqrt{3}\ i)\ n\ /2]\ /\ (j – n), \quad \lambda_2 = [(–1 – \sqrt{3}\ i)/2 + (1 – \sqrt{3}\ i)\ n/2]\ /\ (j – n)$$
$$\lambda_1 = (j – k\ n\ )\ /\ (j – n), \qquad \lambda_2 = (\ k – j\ n)\ /\ (j – n)$$
$1 + \lambda + \lambda^2 =1+ (j – kn) / (j – n)+(j – kn)^2 / (j – n)^2 = [(j – n)^2 + (j – kn)(j – n) + (j – kn)^2]/(j – n)^2 = (k – 2jn + n^2 + k – jn – n + kn^2 + k – 2n + jn^2) / (j – n)^2 =$
$$(3k – 3nj – 3n)/(j – n)^2 = (3kn +3k) / (j – n)^2 = 3k(n + 1) / (j – n)^2$$
bulunur. Benzer işlemler tekrarlanırsa,
$$D[(3k(n + 1)/(j – n)^2, \quad 3k(n + n^2)/(j – n)^2, \quad –3kn/(j – n)^2]$$
(135) $D[(n +1),\ n(n + 1),\ – n\ ], \quad E[n(n + 1),\ – n,\ (n + 1)], \quad F[– n,\ (n + 1),\ n(n + 1)]$

ifadeleri bulunur. Üçlü dik envolüsyon olduğu, **OD, OE, OF** vektörlerinin iç çarpımlarının sıfır olduklarından, görülür.
$$\mathbf{OD}^2 + \mathbf{OE}^2 + \mathbf{OF}^2 = 3[n^2 + (n + 1)^2 + n^2(n + 1)^2] =3(n^2 + n + 1)^2 = 3d^2$$

olur. İkinci yanların çözüm olduğu görülmektedir. Burada vektörlerin iç çarpım kareleri alınmıştır. Pisagor teoreminde bu değerler gereklidir. D, E, F noktalarının barisantrik koordinatlarının kareleri, Diofant denklemin çözümleridirler. n rasyonel değerler almalıdır.

D, E, F noktalarının koordinatlarını, satır kabul eden matrisi yazalım.

$$(136) \qquad R_1 = \begin{matrix} (n+1)/d & n(n+1)/d & -n/d \\ n(n+1)/d & -n/d & (n+1)/d \\ n/d & (n+1)/d & n(n+1)/d \end{matrix}$$

R_1 matrisi rasyonel ortogonaldir. Satırlar yer değiştirirse, ortogonallik bozulmaz. Problem, uzayın izotrop noktalarının, üçlü envolüsyonun ve barisantrik karmaşık sayıların bir uygulaması olması bakımından değer taşır.

(120) de verilen izotrop noktaların ikinci, üçüncü ve dördüncü çözümlerinden de, benzer biçimde Diofant denklemin çözümleri bulunur. Bunlar sıra ile,

(137) $D[(1-n),\ n(1-n),\ -n],\quad E[n,\ (n-1),\ n(1-n)],\quad F[n(n-1),\ -n,\ (n-1)]$

$$d^2 = (1-n)^2 + n^2(1-n)^2 + n^2 = (n^2 - n + 1)^2$$

$$D[n(n-1),\ -n,\ (1-n)],\quad E[(1-n),\ n(1-n),\ n],\quad F[n,\ (n-1),\ n(n-1)]$$

$$D[(n+1),\ n(n+1),\ n],\quad E[-n,\ (n+1),\ -n(n+1)],\quad F[n(n+1),\ -n,\ -(n+1)]$$

dır. D, E, F noktalarının koordinatlarını, satır kabul eden rasyonel ortogonal matrisler sıra ile, R_2, R_3, R_4 olsunlar. Rasyonel ortogonal matrislerin çarpımı ve bölümü, rasyonel ortogonal matrislerdir. Ortogonal matrislerin satır elemanlarının kareleri toplamı 1 dir. Rasyonel ortogonal matrislerin, bu toplamda paydası, ikinci yana geçirilirse, satır elemanlarının Diofant denklemin çözümü oldukları görülür. (73) de verilen P ve Q matrisleri ile (88) de verilen matrisler rasyonel ortogonal matrislerdir. Rasyonel ortogonal matrisler arasında yapılacak çarpma ve bölme işlemleri ile, bulunacak rasyonel ortogonal matrislerin satır elemanlarının payları, bağımsız çözümlerdir. Yani böylece bulunacak çözümler, önceki formüllerle bulunamazlar.

$$d^2 = n^4 + (n^4 - n^2 - 2n)^2 + (2n^3 + n^2 - 1)^2 = (n^4 + n^2 + 1)^2$$

$$R_3 R_4 = \begin{matrix} n^2/d & (n^4 - n^2 - 2n)/d & (2n^3 + n^2 - 1)/d \\ (2n^3 - n^2 + 1)/d & (-2n^3 - n^2 + 2n)/d & (n^4 - 3n)^2/d \\ (n^4 - n^2 + 2n)/d & (3n^2 - 1)/d & (-2n^3 + n^2 + 2n)/d \end{matrix}$$

Q' matrisi (74) de verilmiştir. $R_1Q'R_1^{-1}$ çarpımından,

$$d^2 = (-2n^2 - 2n)^2 + (-n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n + 1)^2 + (2n^3 + 4n^2 + 2n)^2 = (n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1)^2$$

$$R_1Q'R_1^{-1} = \begin{matrix} (-2n^2 - 2n)/d & (-n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n + 1)/d & (2n^3 + 4n^2 + 2n)/d \\ (-2n^3 - 2n^2)/d & (2n^3 + 4n^2 + 2n)/d & (n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n - 1)/d \\ (-n^4 - 2n^3 - n^2 - 2n - 1)/d & (-2n^2 - 2n)/d & (-2n^3 - 2n^2)/d \end{matrix}$$

matrisi bulunur. Bu matrislerin satır elemanlarının payları, Diofant denklemin çözümleridir. Rasyonel ortogonal matrislerin çeşitli işlemleri ile, sonsuz tane Diofant denklemlerin çözüm formülleri verilebilir. Eğer terimlerden sıfır gelenler varsa, araya bir Q' matrisi koymalıdır. Q' matrisinin birim matrisin küp kökü olması zorunlu değildir. Rasyonel ortogonal olması yeterlidir.

(138) $\qquad m = 4, \quad n = 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = w^2$

olsun. Soru dört boyutlu uzayda Pisagor teoreminin konusudur. Dört boyutlu uzayda dikdörtgenler prizmasının köşegen uzunluğu, tam sayılarla aranmaktadır. x, y, z, t bileşenleri, geometrik yorumda, birbirlerine diktirler. Bu bileşenler, dörtlü dik envolüsyonda harmonik dörtlüler olmalıdırlar. Harmonik dik dörtlülerin dışında, çözüm aramak yersizdir. (129) dan dik dörtlü envolüsyon denklemi,

(139) $\qquad E(1 + 2\lambda + \lambda^2,\ \ i - i\lambda^2,\ \ -1 + 2\lambda - \lambda^2,\ \ -i + i\lambda^2),$

$\qquad F(1 - \lambda^2,\ \ i + 2i\lambda + \lambda^2,\ \ -1 + \lambda^2,\ \ -i + 2i\lambda - i\lambda^2)$

$\qquad G(1 - 2\lambda + \lambda^2,\ \ i - i\lambda^2,\ \ -1 - 2\lambda - \lambda^2,\ \ -i + i\lambda^2),$

$$H(1-\lambda^2,\quad i-2i\lambda+i\lambda^2,\quad -1+\lambda^2,\quad -i-2i\lambda-\lambda^2)$$

dır. Bu noktaların koordinatlarını tam sayı yapmak için parametre dönüşümü yapalım.

(140) $$n = (i - i\lambda^2)/(1 + 2\lambda + \lambda^2)$$

koyalım ve n parametresine geçelim. Bu dönüşümle sanal sayılar gider.

$$\lambda^2(n+i) + 2\lambda n + n - i = 0, \qquad \lambda_1 = (i-n)/(i+n), \qquad \lambda_2 = -1$$

$E[1 + 2(i-n)/(i+n) + (i-n)^2/(i+n)^2,\quad i + i(i-n)^2/(i+n)^2,\quad -1 + 2(i-n)/(i+n) - (i-n)^2/(i+n),\quad -i + i(i-n)^2/(i+n)^2]$, $\quad E(-1 + 2in + n^2 - 2 - 2n^2 - 1 - 2in + n^2,$
$1 - 2in - n^2 - 2 - 2in + n^2,\quad 1 - 2in - n^2 - 2 - 2n^2 + 1 + 2in - n^2,$
$i + 2n - in^2 - i + 2n + in^2),\quad E(-4,\ -4n,\ -4n^2,\ 4n),\quad E(-1,\ -n,\ -n^2,\ n)$

Benzer işlemler tekrarlanırsa,

$$E(-1, -n, -n^2, n),\quad F(n, -1, -n, -n^2),\quad G(n^2, -n, 1, n),\quad H(n, n^2, -n, 1)$$

bulunur. Dört boyutlu uzaydaki dik prizmanın köşegeni,

$$\mathbf{OE}^2 + \mathbf{OF}^2 + \mathbf{OG}^2 + \mathbf{OH}^2 = 4(1 + n^2 + n^4 + n^2) = [2(n^2+1)]^2 = 4d^2$$

olur. E, F, G, H noktalarının koordinatları Diofant denklemin çözümleridir. Koordinat matrisi rasyonel ortogonaldir.

(141)
$$R_1 = \begin{matrix} -1/d & -n/d & -n^2/d & n/d \\ n/d & -1/d & -n/d & -n^2/d \\ n^2/d & -n/d & 1/d & n/d \\ n/d & n^2/d & -n/d & 1/d \end{matrix}$$

Başka bir çözüm olarak, (130)'un birincisi olan, izotrop noktalar ile, Diofant denklem çözümünü bulalım.

$$J_1(1, -i, -1, -i),\quad J_2(1, -1, 1, 1),\quad J_3(1, i, -1, i),\quad J_4(1, 1, 1, -1)$$

Bu noktalar (124) de yerine konulursa,

(142) $$E = (1, -i, -1, -i) + \lambda(1, -1, 1, 1) + \lambda^2(1, i, -1, i) + \lambda(1, 1, 1, -1)$$

$$E(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda,\quad -i - \lambda + i\lambda^2 + \lambda,\quad -1 + \lambda - \lambda^2 + \lambda,\quad -i + \lambda + i\lambda^2 - \lambda)$$

$$E(1 + 2\lambda + \lambda^2,\quad -i + i\lambda^2,\quad -1 + 2\lambda - \lambda^2,\quad -i + i\lambda^2)$$

olur. λ parmetresinden, n tam sayı parametresine geçelim.

$(-i + i\lambda^2)/(1 + 2\lambda + \lambda^2) = n,\quad \lambda^2(n-i) + 2n\lambda + n - i) = 0,\quad \lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = (i+n)/(i-n)$
$E(1 + 2(i+n)/(i-n) + (i+n)^2/(i-n)^2,\quad -i + i(i+n)^2/(i-n)^2,\quad -1 + 2(i+n)/(i-n) -$
$(i+n)^2/(i-n)^2,\quad E(-1 - 2in + n^2 - 2 - 2n^2 - 1 + 2in + n^2,\quad i - 2n - in^2 - i - 2n + in^2,$
$1 + 2in - n^2 - 2 - 2n^2 + 1 - 2in - n^2,\quad i - 2n - in^2 - i - 2n + in^2)$

$$E(-4,\ -4n,\ -4n^2,\ -4n),\qquad E(-1,\ -n,\ -n^2,\ -n)$$

Benzer işlemler yürütülürse,

(143) $$E(-1, -n, -n^2, -n),\quad F(-n, 1, n, -n^2),\quad G(n^2, -n, 1, -n),\quad H(-n, -n^2, n, 1)$$

bulunur. Koordinat matrisi rasyonel ortogonaldir. Rasyonel ortogonal matrislerin çarpımı ve bölümü, gene rasyonel ortogonaldir.

(144) $$d^2 = 1 + n^2 + n^4 + n^2 = (1 + n^2)^2$$

$$R_2 = \begin{matrix} 1/d & -n/d & -n^2/d & -n/d \\ -n/d & 1/d & n/d & -n^2/d \\ n^2/d & -n/d & 1/d & -n/d \\ n/d & -n^2/d & n/d & 1/d \end{matrix}$$

$$d^2 = (n^3 + 2n^2 + n)^2 + (2n^3 - n^2 - 1)^2 + (n^4 - n^2)^2 + (n^3 - n)^2 = (n^2 + 1)^4$$

$$R_1.B.R_2 = \begin{matrix} (n^3 + 2n^2 + n)/d & (2n^3 - n^2 - 1)/d & (n^4 - n^2)/d & (n^3 - n)/d \\ (-n^4 - n^2 + 2n)/d & (n^3 + 2n^2 + n)/d & (n^3 - n)/d & (n^2 - 1)/d \\ (n^2 - 1)/d & (n^3 - n)/d & (n^3 - 2n^2 + n)/d & (-n^4 - n^2 - 2n)/d \\ (-n^3 + n)/d & (n^4 + n^2)/d & (2n^3 + n^2 + 1)/d & (-n^3 + 2n^2 - n)/d \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} d^2 = (n - n^3)^2 + (1 - n^2)^2 + (-n^4 - n^2 + 2n)^2 + (-n^3 - 2n^2 - n)^2 \\ d^2 = (n^2 + 1)^4 \end{matrix}$$

$$R_1BR_1^{-1} = \begin{matrix} n - n^3 & 1 - n^2 & -n^4 - n^2 + 2n & -n^3 - 2n^2 - n \\ -n^2 + n^4 & -n + n^3 & -n^3 - 2n^2 - n & 2n^3 - n^2 - 1 \\ 1 - n^2 - 2n^3 & n - 2n^2 + n^3 & n - n^3 & n^4 - n^2 \\ n - 2n^2 + n^3 & -n^2 - 2n - n^4 & 1 - n^2 & -n + n^3 \end{matrix} \quad \mathbf{:}\ d^4$$

B matrisi birim matrisin dördüncü kökü olup, rasyonel ortogonaldir. Rasyonel ortogonal matrislerin satır elemanlarının payları, Diofant denklemin çözümleridir. Formül istenildiği kadar çoğaltılabilir. Eğer terimlerden sıfır gelenler varsa, araya bir B matrisi koymalıdır. B matrisinin birim matrisin dördüncü kökü olması zorunlu değildir. Rasyonel ortogonal olması yeterlidir.

Uzunluk ve Açıların Belirlenmesi

Her bilimde, düşüncelerin bir dayanağı olması istenir. Bu gereksinim matematikte çok daha önemli olup, uygarlıkla beraber yeni dayanaklar geliştirilmektedir. Bugüne kadar kullanılan dayanaklardan bir özetleme yapalım. Bir boyutlu uzayda iki nokta arasındaki uzunluğu belirlemek için, dayanak olarak iki nokta seçilir. Burada temel ilke, dayanak alınacak nokta sayısı, belirlenen nokta sayısına eşit olmasıdır. Dayanak noktaların biri B(1,1) birim noktası, diğeri $P_\infty(0,1)$ sonsuz noktasıdır. Belirlenmesi istenilen uzunluk O ile A noktaları arasındaki uzunluk olsun.

$$OA/OB = (OP_\infty, AB) = OA$$

formülü ile, OA uzunluğu belirlenir. P_∞ notası, bir boyutlu uzayın izotrop noktasıdır. İki boyutlu uzayda, uzunluk belirleyelim. Burada da iki nokta dayanak alınacaktır. Biri OA doğrusunun sonsuzdaki doğruyu kestiği nokta olacak, diğeri birim noktası olacaktır. Fakat yukarda verilen çifte oranı uygulamak için, dört nokta bir doğru üzerinde değildir ve izotrop noktalardan geçmez. Bu durumda uzunluk belirlenmesini, sonsuzda alınan izotrop noktalara dayandıramayız.

$$d_1 = x_1 + ix_2, \qquad d_2 = x_1 - ix_2, \qquad d_1.d_1 = x_1^2 + x_2^2 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Verilen fonksiyonlardan birincisi, izotrop doğru çiftinin denklemi, izotrop daire denklemi, ikincisi birim daire denklemidir. Her ikisi de matematik olarak daire denklemidir. Özelikleri aynıdır, yalnız yarıçapları farklıdır. Dayanak görevi yapan izotrop noktalar, matematik işlemleri basite indirgeyecek ve çıkmaza götürmeyecek biçimde belirlenmiştir. Bu işlevin gerçekleşmesi için, aynı matematik yapıda ve aynı özeliklerde, matematik eşdeğeri olan, birim daire de kullanılabilir. $P(1, p_1, p_2)$, $Q(1, q_1, q_2)$ noktaları arasındaki uzaklığı belirleyelim. OA doğru parçası, PQ doğru parçasına eşit ve paralel olsun. $A(1, q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ notasını O(1,0,0) ya birleştiren doğrunun denklemi ve birim çemberi kestiği noktalar $B(1, x_1, x_2)$,

$$x_2 = (q_2 - p_2)x_1/(q_1 - p_1), \quad B = A + \lambda O, \quad B(1 + \lambda, q_1 - p_1, q_2 - p_2),$$

$$(q_1 - p_1)^2/(1 + \lambda)^2 + (q_2 - p_2)^2/(1 + \lambda)^2 = 1, \quad d = 1 + \lambda$$

$$d^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2, \quad x_1 = (q_1 - p_1)/d, \quad x_2 = (q_2 - p_2)/d$$

dır. x_1 ve x_2, birim daire üzerinde, dayanak olacak birim noktasının koordinatlarıdır. OA doğrusunun sonsuzdaki doğruyu kestiği nokta, doğru koordinatlarının matrisinin, minörleri ile hesaplanır.

$$\begin{matrix} 0 & (q_2 - p_2) & -(q_1 - p_1) \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad P_\infty[0, -(q_1 - p_1), -(q_2 - p_2)]$$

Noktalar bir doğru üzerine geldiği için, bir boyutlu uzayın, uzaklık formülünü uygulanır.

$$OA = OA/OB = (OP_\infty, AB) = (|oa|/|ob|) \mathbf{:} (|p_\infty a|/|p_\infty b|)$$

$$|oa| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & q_1 - p_1 \end{vmatrix}, \quad |ob| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}, \quad |p_\infty a| = \begin{vmatrix} 0 & q_1 - p_1 \\ 1 & q_1 - p_1 \end{vmatrix}, \quad |p_\infty b| = \begin{vmatrix} 0 & q_1 - p_1 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$OA = PQ = [(q_1 - p_1)/x_1] : [-(q_1 - p_1)/(-(q_1 - p_1))] = (q_1 - p_1)/x_1 =$$
$$d = [(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2]^{1/2}$$

Düzlemde açının belirlenmesi için, doğruların sonsuzdaki doğru ile kesim noktaları bulunur ve bu iki noktanın izotrop çifte oranı alınır

$$e^{-2i\theta} = (AB, JJ') = (dd', JJ')$$

d, d' doğruları, açının kenarlarıdır. Düzlemde birim daireye dayalı olarak ölçülen uzunluklara ve açılara, **Öklidsel uzunluklar** ve **Öklidsel açılar**, birim daireyi içeren, başka bir izotrop nokta içermeyen düzlemlere de, **Öklid düzlemleri** denilir.

Bu düşünceleri uzaya genelleştirelim.

(145) $\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

Denklemlerinden birincisi izotrop küre, ikincisi birim küredir. Her ikisi de matematik eşdeğerdir. Aynı özeliklere sahiptirler. Yalnız yarıçapları farklıdır. Uzaklıkların belirlenmesinde, her ikisi de dayanak olarak kullanılabilir. $P(1, p_1, p_2, p_3)$, $Q(1, q_1, q_2, q_3)$ doğru parçasına paralel ve eşit OA doğru parçasını çizelim. $A(1, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$, $O(1., 0, 0, 0)$ olur. OA doğrusunun birim küreyi ve sonsuzdaki düzlemi, deldiği noktaları bulalım. $B(1, x_1, x_2, x_3)$ birim küreyi deldiği nokta olsun.

$$B = A + \lambda O,\ B(1 + \lambda, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3), \qquad P_\infty = A + \mu O, \qquad \mu = -1,$$
$$P_\infty(0, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$$

B noktası küre denklemini sağlasın.

$$(q_1 - p_1)^2/(1 + \lambda)^2 + (q_2 - p_2)^2/(1 + \lambda)^2 + (q_3 - p_3)^2/(1 + \lambda)^2 = 1, \qquad d = 1 + \lambda$$
$$d^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2, \quad x_1 = (q_1 - p_1)/d,\ x_2 = (q_2 - p_2)/d,\ x_3 = (q_3 - p_3)/d$$

Dört nokta bir doğru üzerine gelmiştir. Bir boyutlu uzayın yöntemi ile OA uzunluğu belirlenir. İşlemler düzlemde olduğundan farksızdır.

$$OA = PQ = d = [(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2]^{1/2}$$

Uzayda bir düzlem üzerindeki açının belirlenmesi için, açının düzlemi ile izotrop kürenin arakesiti alınır. Bu ara kesit, iki noktaya soysuzlaşmış izotrop dairedir. Soysuzlaşmış noktalar da, o düzlemin **izotrop** noktalarıdır. Düzlemde olduğu gibi, açının kenarlarının sonsuzdaki düzlemi deldiği noktaların, izotrop nokta çiftine, çifte oranı, açının iki katının birim vektörünü, ters yönde verir. Uzayda birim küreye dayalı, ölçümü yapılan uzunluklara ve açılara, **Öklidsel uzunluklar** ve **Öklidsel açılar**, birim küreyi içeren, başka bir izotrop nokta içermeyen uzaylara da, **Öklid uzayları** denilir.

Bu düşünceler başka izotrop noktalar için de geçerlidir. Uzayın izotrop noktaları $J_1(1, k, j)$, $J_2(1, 1, 1)$, $J_3(1, j, k)$ olarak bulundu. Başlangıcı bu noktalara ikişer, ikişer birleştiren üç düzleme, izotrop düzlemler denilir. İzotrop düzlemlerin denklemleri, noktaların koordinat matrisinin minörleri ile bulunur.

(146) $\quad x_0 = x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0, \qquad x_1 = x'_1 + jx'_2 + kx'_3 = 0, \qquad x_2 = x'_1 + kx'_2 + jx'_3 = 0$

dır. Bu üç düzlemin ortak denklemi, üçünün çarpımı ile bulunur.

$$d^3 = x_0x_1x_2 = x'^3_1 + x'^3_2 + x'^3_3 - 3x'_1x'_2x'_3 = 0, \qquad x'^3_1 + x'^3_2 + x'^3_3 - 3x'_1x'_2x'_3 = 1$$

dır.Bu formüller **göreceli uzayda** bir noktanın başlangıca uzaklık formülüdür. Üslü harfler noktanın barisantrik koordinatlarını ve üssüz harfler de, göreceli uzayın barisantrik koordinatlarını gösterirler. (32) ve (33) formülleri ile, barisantrik ve karteziyen koordinatlar arasında, dönüşüm formülleri verildi. Bu formüller ile barisantrik koordinatlar, Öklidsel düzlemin karteziyen koordinatlarına bağlıdırlar.

(32) $\quad \rho' x'_0 = x_0 + 2x_1 + \ *$ $\qquad$ (33) $\quad \rho x_0 = x'_0 + x'_1 + x'_2$

$\rho' x'_1 = x_0 - x_1 + \sqrt{3}\, x_2$ $\qquad \rho x_1 = x'_0 - x'_1/2 - x'_2/2$

$\rho' x'_2 = x_0 - x_1 - \sqrt{3}\, x_2$ $\qquad \rho x_2 = * + \sqrt{3}x'_1/2 - \sqrt{3}x'_2/2$

Ek matris hesap edilerek, ters dönüşümler yazıldı. Üslü harfler barisantrik, üssüz harfler karteziyen koordinatları gösterirler. Karteziyen koordinatlar,

$$d'^2x_0^3 = d^3 = (x_0x_1x_2)_g = x_0(x_1^2 + x_2^2) = x'^3_1 + x'^3_2 + x'^3_3 - 3x'_1x'_2x'_3,$$

ifadesi ile, göreceli uzayın karteziyen koordinatlarına bağlıdır..d' Öklid düzleminde başlangıca karteziyen uzaklık, d ise göreceli uzayın başlangıca uzaklığıdır.(146) formülündeki x_i'ler göreceli uzayın karteziyen koordinatlarıdır. Bu formülde parantez içinde g ile yazılmışlardır.

Birinci denklem izotrop kübik yüzey, ikinci denklem, birim kübik yüzeydir. İkisi matematik eşdeğerdir. Aynı özeliklere sahiptir. Göreceli uzunlukların belirlenmesinde, her ikisi de, dayanak olarak alınabilir. PQ doğru parçasına OA paralel ve eşit doğru parçasını çizelim. $P(1, p_1, p_2, p_3)$, $Q(1, q_1, q_2, q_3)$, $O(1,0,0,0)$ olsun. $A(1, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$, $B(1, x_1, x_2, x_3)$, $B(1+\lambda, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ olur. OA doğrusunun, birim kübik yüzeyi kestiği noktalar,

$(q_1 - p_1)^3/(1 + \lambda)^3 + (q_2 - p_2)^3/(1 + \lambda)^3 + (q_3 - p_3)^3/(1 + \lambda)^3 - 3(q_1 - p_1)(q_2 - p_2)(q_3 - p_3)/(1 + \lambda)^3 =1$, $\quad d^3 = (q_1 - p_1)^3 + (q_2 - p_2)^3 + (q_3 - p_3)^3 - 3(q_1 - p_1)(q_2 - p_2)(q_3 - p_3) = (1 + \lambda)^3$

$x_1 = (q_1 - p_1)/d$, $\quad x_2 = (q_2 - p_2)/d$, $\quad x_3 = (q_3 - p_3)/d$, $\quad P_\infty(0, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ olur. O, A, B, P_∞ noktaları bir doğru üzerine gelmiştir. Çifte oranların işlemleri yapılırsa,

(147) $OA = PQ = d = [(q_1 - p_1)^3 + (q_2 - p_2)^3 + (q_3 - p_3)^3 - 3(q_1 - p_1)(q_2 - p_2)(q_3 - p_3)]^{1/3}$

olur. Bu uzunluğa, Öklid uzayının uzunluğundan ayırmak için, göreceli deyimi ile ifade edilecektir. Uzayda birim kübik yüzeye dayalı olarak ölçülen uzunluklara ve açılara, **göreceli uzaklıklar** ve **göreceli açılar**, birim kübik yüzeyi içeren, başka bir izotrop nokta içermeyen uzaylara da, **göreceli uzaylar** adı verilecektir. Göreceli uzayda, J_1 ve J_3 izotrop noktalarından geçen düzlemler **Öklidsel**, geçmeyen düzlemler ise, **Öklid dışı** düzlemlerdir. Göreceli uzayda, Öklidsel düzlemlerdeki uzunluklar ve açılar **Öklidsel uzunluklar** ve **Öklidsel açılar**, Öklidsel olmayan düzlemlerdeki uzunluklar ve açılar da, **Öklid dışı uzunluklar** ve **Öklid dışı açılardır.** d_2 düzlemi, birim kübik yüzeyin birinci tarafını sıfır yaptığından, asemptot düzlemdir. d_1 ve d_3 ün arakesiti gerçeldir. Bu arakesit doğru da, birinci 1/8'lik uzay diliminin açıortayı olup, birim kübik yüzeyin asemptotudur. Kübik yüzey N(0, 1, 1, 1) noktasından geçen açıortaya ON yönünde, huniye benzer biçimde, kendisini saran yüzeye asemptot giden, d_2 düzlemine yaklaştıkça, sonsuza yayılan ve bu düzleme de asemptot giden bir yüzeydir. ON açıortay etrafında sonsuza gittikçe ince bir boru gibi, açıortayı sarar. Yüzeyin her noktasında, ON açıortayına dik bir düzlemle kesiti dairedir. Dönel yüzeydir. Çünkü yüzey x, y, z değişkenlerine göre simetrik durumdadır. d_2 düzleminin N tarafında yüzey bulunur. d_2 düzleminin yüzey içermeyen bölgesinde, noktaların başlangıca uzaklıkları negatif, diğer bölgede pozitiftir. Çünkü yüzey ile OA doğrusunun kesim noktaları ve P_∞ noktası, başlangıca göre ters veya doğru tarafta bulunurlar. P_∞ noktası bir tanedir.

Birim kübik yüzey, altı noktada birim küreye teğettir. Bu noktaların dik koordinatları,

$B_1(1, 0, 0)$, $B_2(0, 1, 0)$, $B_3(0, 0, 1)$, $B_4[-1/3, (1+ \sqrt{3})/3, (1 - \sqrt{3})/3]$, $B_5(1/3, - 2/3, - 2/3)$,
$B_6[- 1/3, (1 - \sqrt{3})/3, (1 + \sqrt{3})/3]$

dır. Bu noktaları başlangıca birleştiren doğrultular Öklidseldir. Yani bu doğrultulardaki uzaklıklar, Öklid uzayında ve karmaşık uzayda aynıdır.

Uzayda Barisantrik Karmaşık Sayılar

Uzayda barisantrik karmaşık sayılar, düzgün dörtyüzlü üzerine kurulacaktır. Bir düzgün dörtyüzlünün B_0 tepesini Ox ekseni üzerinde 1 noktasına, ağırlık merkezini de, başlangıca koyalım. B_2 köşesini, Ox ekseninden ve yOz açısının açıortayından geçen düzlem üzerinde alalım. Köşelerin koordinatlarını hesaplayalım. Düzgün dörtyüzlüde B_2H, taban üçgeninde yüksekliğin 2/3'üdür.

$B_2H = \sqrt{3}/2\ a\ 2/3 = a/\sqrt{3}$, $\quad B_0H^2 = a^2 - a^2/3 = 2a^2/3$, $\quad B_0H = a\sqrt{2}/\sqrt{3}$, $\quad OB_0 = a\sqrt{3}/(2\sqrt{2})$

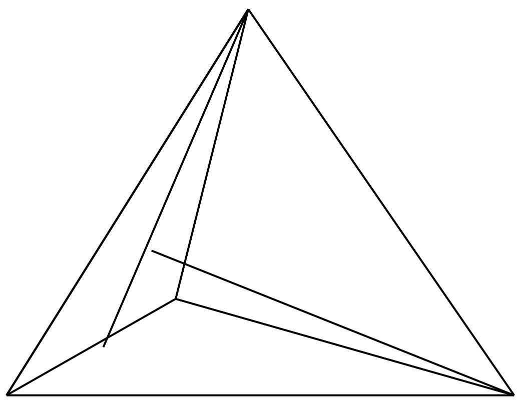
olur. O ağırlık merkezi, B_0H'nın 3/4 ünde bulunur. B_2H, Ox e dik, $B_1B_2B_3$, yOz düşey düzlemlerine paralel olur. B_2H'nın xOy ve xOz düzlemleri üzerindeki izdüşümleri hesaplayalım

$$B'_2H = B_2H \, Cos45^o = a/\sqrt{6}, \qquad B''H = a/\sqrt{6}$$

OB_0 uzunluğu birimdir. a'yı ve OH'yı hesaplayalım.

$$a = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}, \qquad B'_2H = 2/3, \qquad B''H = 2/3, \qquad OH = B_0H/4 = 1/3$$

Bu değerler B_2 nin koordinatlarıdır. $B_2(-1/3,\ 2/3,\ 2/3)$ olarak alınacaktır. Diğer köşelerin koordinatlarını bulmak için, üçlü eşkenar üçgen envolüsyonundan yararlanılacaktır.



Şekil 7

Şekil 7 düzgün dörtyüzlüsünde, sağ köşe B_0, sol köşe B_1, üst köşe B_2, arka köşe B_3 dür, $B_1B_2B_3$'ün ağırlık merkezi H ve düzgün dört yüzlünün ağırlık merkezi, O olup, koordinat sisteminin başlangıcıdır.

Uzayda Dönme Formülü

(148) $x'_1 = (\mathrm{Cos}2\theta + 2u_1^2\mathrm{Sin}^2\theta)x_1 + (2u_1u_2\mathrm{Sin}^2\theta - u_3\mathrm{Sin}2\theta)x_2 + (2u_1u_2\mathrm{Sin}^2\theta + u_2\mathrm{Sin}2\theta)x_3$

$x'_2 = (2u_1u_2\mathrm{Sin}^2\theta + u_3\mathrm{Sin}2\theta)x_1 + (\mathrm{Cos}2\theta + 2u_2^2\mathrm{Sin}^2\theta)x_2 + (2u_2u_3\mathrm{Sin}^2\theta - u_1\mathrm{Sin}2\theta)x_3$

$x'_3 = (2u_1u_3\mathrm{Sin}^2\theta - u_2\mathrm{Sin}2\theta)x_1 + (2u_2u_3\mathrm{Sin}^2\theta + u_1\mathrm{Sin}2\theta)x_2 + (\mathrm{Cos}2\theta + 2u_3^2\mathrm{Sin}^2\theta)x_3$

Formülleri ile uzayda dönme belirlenir. (Prof. Dr. Macit Büke Analitik Geometri I) dir. Uzayda dönmenin ortogonal matrisinde, dönme ekseni Ox ekseni olup, **u**(1,0,0) dır. Dönme açısı,

$$2\theta = \pm 120^o \text{ dir. } u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = 0,\quad \mathrm{Sin}120^o = \sqrt{3}/2,\quad \mathrm{Cos}120^o = -1/2,\quad q_o = -1/2,$$

$$q_1 = \sqrt{3}/2, \qquad q_2 = q_3 = 0$$

Bu değerlerle, (148) matrisi hesaplanırsa,

(149)
$$R = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{matrix}$$

olur. Şekil 7 de, B_2, B_3, B_1 köşeleri R matrisin değişmez noktalarıyla üçlü eşkenar üçgen envolüsyonu oluşturur. B_2 noktasıyla iki defa arka, arkaya dönüşüm yapılırsa, B_1 ve B_3 noktaları bulunur.

$$B_1 = R\,B_2, \qquad B_3 = R\,B_1$$

(150) $B_1[-1/3,\ (-1+\sqrt{3})/3,\ -(1+\sqrt{3})/3]$, $\qquad B_2(-1/3,\ 2/3,\ 2/3)$,

$B_3[-1/3,\ -(1+\sqrt{3})/3,\ (-1+\sqrt{3})/3]$

Düzgün dörtyüzlünün O ağırlık merkezini köşelere birleştiren vektörler sıra ile,

(151) $\mathbf{OB_0} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{OB}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{OB}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{OB}_3 = \mathbf{e}_3$

olsunlar. Bu vektörlerin sonsuzdaki düzlemi deldiği noktaların, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre barisantrik koordinatları, sıra ile

$B'_0(1,0,0)$, $B'_1[-1/3, (-1+\sqrt{3})/3, -(1+\sqrt{3})/3]$, $B'_2(-1/3, 2/3, 2/3)$,
. $B'_3[-1/3, -(1+\sqrt{3})/3, (-1+\sqrt{3})/3]$
olurlar. Bu noktaları, sonsuzdaki düzlem üzerinde, barisantrik karmaşık sayılarla ifade edelim.

(152) $B'_0 = 1$, $B'_1 = -1/3 + (-1+\sqrt{3})/3\, j - (1+\sqrt{3})/3\, k$, $B'_2 = -1/3 + 2/3\, j + 2/3\, k$
$B'_3 = -1/3 - (1+\sqrt{3})/3\, j + (-1+\sqrt{3})/3\, k$

Sonsuzdaki düzlem üzerinde alınan, bu barisantrik vektörlerin uç noktaları, uzayda alınan,

$\mathbf{OB}_1 = \mathbf{1}/3 + (-1+\sqrt{3})/3\, \mathbf{j} - (1+\sqrt{3})/3\, \mathbf{k}$, $\mathbf{OB}_2 = -\mathbf{1}/3 + 2/3\, \mathbf{j} + 2/3\, \mathbf{k}$
$\mathbf{OB}_3 = -\mathbf{1}/3 - (1+\sqrt{3})/3\, \mathbf{j} + (-1+\sqrt{3})/3\, \mathbf{k}$

karmaşık sayıların doğrultularının sonsuzdaki düzlemi deldiği noktalardır. Sonsuzdaki düzlem üzerinde barisantrik karmaşık sayılardan, sonsuzdaki düzlem üzerinde, karteziyen karmaşık sayılara geçelim. Sonsuzdaki düzlem üzerindeki vektörler ince harflerle, uzaydaki vektörler kalın harflerle gösterilecektir. Karteziyen karmaşık sayılara geçmek için (152) de, j ve k yerlerine,

$$j = (-1 + \sqrt{3}\, i)/2, \qquad k = (-1 - \sqrt{3}\, i)/2$$

değerlerini koymak yeterlidir. Sonuçlar,

(153) $B'_0 = 1$, $B'_1 = i$, $B'_2 = -1$, $B'_3 = -i$

olur. Sonsuzdaki düzlem üzerinde, karmaşık sayıların eksenleri, Şekil 1 de, koordinat dönüşümünde olduğu gibi alınacaktır. Şekil 1 de i noktası, yani B'_1 noktası Ox_2 ekseni üzerindedir. Ox_2 ekseni A_1A_2 ye paraleldir. Ox_2 ekseninin sonsuzdaki noktası $P_\infty(0,1,-1)$ dir. P_∞, B'_1, B(0,1,1,1) noktaları bir doğru üzerindedirler. Koordinat matrisinin determinantı sıfırdır. O halde i noktasını, B(0,1,1,1) noktasına birleştiren doğru, Ox_1 eksenine diktir. B(0,1,1,1) noktası başlangıç, BB'_0 Ox_1 ekseni, B den Ox_1'e çıkılan dik doğru, Ox_2 ekseni olup, $B'_0 B'_1$ doğrusundan tarafı pozitif olacak biçimde alınacaktır. Düzgün dörtyüzlünün köşelerinin, dörtyüzlünün ağırlık merkezine göre, yer vektörleri olan $\mathbf{1}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vektörleri, 1'in uzaydaki dördüncü kökleri olarak tanımlanacaktır. Çünkü bu vektörler, (154) nedeni ile sonsuzdaki karteziyen karmaşık sayılar düzlemini 1, i, – 1, – i noktalarında kesmektedirler. Sonsuzdaki düzlem üzerinde olan bu noktaları, sonsuzdaki karmaşık sayıların başlangıcına birleştiren doğrular, sıra ile, $\mathbf{1}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vektörlerine paraleldirler. Çünkü bu doğrular sonsuzda kesişiyorlar. Bu sonuçlar, karmaşık uzayda sonsuzdaki düzlemin, karmaşık düzlem olduğunu gösterirler. Eksenlerin konumu ortaya konulmuştur. Aralarındaki fark yalnız,

(154) $1 - 1 = 0$, $i - i = 0$, $\mathbf{1} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$, $\mathbf{1} + \mathbf{e}_2 \neq 0$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \neq 0$

dır. (130) da olduğu gibi, (1, i, – 1, – i) vektör sistemi ile, ($\mathbf{1}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) vektör sisteminin çarpımları aynı, toplamları farklıdır. $\mathbf{1}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vektörleri, barisantrik düzgün koordinat dörtyüzlüsünün ağırlık merkezini köşelere birleştiren vektörlerdir. Bu nedenle toplamları sıfırdır. Bu vektörlerin sonsuzdaki düzlemi deldiği noktalar, sıra ile, 1, i, – 1, – i dir. Birinciler, 1'in dördüncü kökleri olduklarından, ikinciler de, 1'in dördüncü kökleridir. Çünkü bu noktalardan, sonsuzdaki düzlem üzerinde olanları, B notasına, uzayda olanları O'ya birleştiren doğrular, sonsuzda kesiştiklerinden paraleldirler. Paralel vektörler ile yapılan işlemlerde, çarpımlar değişmez, yalnız toplamlar değişir. Uzayda karmaşık sayılar paragrafında açıklandı.

Uzayda 1'in üçüncü ve dördüncü kökleri, vektör olarak alınmıştır. Aralarındaki ilgi, şekil 7 de açıklanmıştır. Bu ilginin korunması için, barisantrik ve dik koordinatlar arasındaki dönüşümler, şekil 7 de olduğu gibi, ilerde yapılacaktır.

Üst karmaşık sayılar ve barisantrik karmaşık sayılar (39) ve (40) da tanımlandı. Üst karmaşık sayılar, kapalılık ve birleşim özeliklerine sahiptirler. Fakat birimi yoktur. 1+ j + k sayısının B(1, 1, 1) eşkenar üçgene dayalı barisantrik koordinatları ile verilen birim noktası, sonsuzdadır. Birinci sekizde bir uzay diliminin açıortayı üzerinde, birim noktası B(0,1, 1, 1) dir. Birim kübik yüzey üzerindeki noktaların, başlangıca uzaklıkları eşit değildir. Birim göreceli bir uzunluktur. Bu nedenle üst karmaşık sayılar, çarpma ve toplama işlemlerine göre gurup ve cisim oluşturmazlar. Üst karmaşık sayıların Öklid uzaylarında bir anlamı yoktur.

Fakat Öklid dışı uzaylarda bir değeri vardır. İlerde, genel görecelik kuramında, bir uygulaması verilmiştir.

Barisantrik karmaşık sayıların bileşenleri toplamı 1 veya – 1 dir. Bu özeliği sayesinde, barisantrik karmaşık sayıların birimi vardır ve Öklidseldirler. Bir karmaşık sayının eşleniği ile çarpımını göz önüne alalım.

$$A\bar{A} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Bu çarpımın kare köküne, karmaşık sayının **mutlak değeri** denilir. Bu değer Öklidsel olup, karmaşık sayı vektörünün şiddetinin ve uzunluğunun ölçümüdür. A(a, b) noktasının başlangıca uzaklığıdır. Bu nedenle karmaşık sayıların birimi vardır. Barisantrik karmaşık sayıyı eşleniği ile çarpalım.

$$A\bar{A} = (a_0 + ja_1 + ka_2)(a_0 + ka_1 + ja_2)/(a_0 + a_1 + a_2)^2 =$$
$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_0a_1 - a_0a_2 - a_1a_2)/(a_0 + a_1 + a_2)^2$$

Bu ifadenin kare köküne, barisantrik karmaşık sayının **mutlak değeri** denilir. Bu ifade Öklidsel olup, (34) den eşkenar üçgene dayalı barisantrik koordinatlarda, başlangıcın A(a_0, a_1, a_2) noktasına uzaklık formülü olduğu görülür. Barisantrik karmaşık sayıların birimi vardır. Kapalılık, birleşim, ters elemanı olma özelikleri biliniyor. Barisantrik karmaşık sayılar, çarpma işlemine göre gurup oluştururlar. İki barisantrik karmaşık sayının çarpımlarının bileşenleri toplamı, gene 1 dir. Fakat toplamlarının bileşenleri toplamı 2 dir. Toplama işlemine göre gurup oluşturmazlar. Cisim değildirler. Bu nedenle barisantrik vektörlerle işlem yaparken, toplama ve çıkarmalardan sonra, (41) kuralı ile karmaşık sayı, değeri değişmeden barisantrik konuma getirilmelidir. Kitabın sonunda, Program 6 ile, barisantrik karmaşık sayılarla, ikinci, üçüncü ve dördüncü derece denklemlerinin çözümü verilmiştir.

Göreceli Uzayda Pisagor Teoremi

Karşılıklı iki köşesinde düzgün üçyüzlü olan, bir paralelyüzün düzgün üçyüzlü olan köşelerinden geçen köşegeni d, paralelyüzün kenarları a, b, c olduğuna göre,

$$d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

dir. İşlem çokluğunu önlemek amacıyla, sayısal bir örnek üzerinde açıklamalar yapılacaktır. Sonsuzdaki düzlem üzerinde, eşkenar üçgen üçlü envolüsyonuna ait üç nokta D(0,1,2,3), E(0,2,3,1), F(0,3,1,2) olsun. ODEF üçyüzlüsü düzgündür. Bu noktaları Başlangıca birleştiren doğrular üzeride D'(λ,1,2,3), E'(μ,2,3,1), F'(ν,3,1,2) noktalarını alalım.Bu noktalardan diğer iki doğrunun oluşturduğu düzleme paralel düzlemler çizelim. Üç noktadan geçen düzlemin denklemini yazmak için, üç noktanın koordinatları ile, üzerinde bulunan değişken bir noktanın koordinatlarının, dördüncü mertebeden matrisinin, determinantı açılır ve sıfıra eşitlenir. Bulunan ifade düzlemin denklemidir. D'EF, E'FD, F'DE düzlemlerinin denklemleri sıra ile,

$$18x_o - 5\lambda x_1 + \lambda x_2 + 7\lambda x_3 = 0, \quad 18x_o + \mu x_1 + 7\mu x_2 - 5\mu x_3 = 0, \quad 18x_o + 7\nu x_1 - 5\nu x_2 + \nu x_3 = 0$$

dır. Bu üç düzlemin ortak noktası M(1, x_1, x_2, x_3), paralelyüzde O'nun karşısındaki köşedir.

$$x_1 = 1/\lambda + 2/\mu + 3/\nu, \qquad x_2 = 2/\lambda + 3/\mu + 1/\nu, \qquad x_3 = 3/\lambda + 1/\mu + 2/\nu$$

Göreceli uzaklık formülünden M noktasının başlangıca uzaklığı, x_i'ler yerine konulursa,

$$d^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$$

$d^3 = 36(1/\lambda^3 + 1/\mu^3 + 1/\nu^3 + 3/(\lambda^2\mu)(2 + 12 + 9) + 3/(\lambda^2\nu)(3 + 4 + 18) + 3/(\mu^2\lambda)(4 + 18 + 3)$ $3/(\mu^2\nu)(12 + 9 + 2) + 3/(\nu^2\lambda)(9 + 12 + 2) + 3/(\nu^2\mu)(18 + 3 + 4) + 6/(\lambda\mu\nu)(6 + 6 + 6) - 3[6(1/\lambda^3 + 1/\mu^3 + 1/\nu^3) + 1/(\lambda^2\mu)(2 + 9\ 12) + 1/(\lambda^2\nu)(4 + 3 + 18) + 1/(\mu^2\lambda)(18 + 4 + 3) + 1/(\ \mu^2\nu)\ (12 + 2 + 9) + 1/(\nu^2\lambda)(9 + 12 + 2) + 1/(\nu^2\mu)(3 + 8 + 4) + 1/(\lambda\mu\nu)(6 + 1 + 6 + 8 + 6 + 27)]$

olur. Kısaltalım. Göreceli uzaklık formülünden,

$$OD' = a, \qquad OE' = b, \qquad OF' = c$$

$$d^3 = 18(1/\lambda^3 + 1/\mu^3 + 1/\nu^3) - 54/(\lambda\mu\nu), \qquad a^3 = 1/\lambda^3 + 8/\lambda^3 + 27/\lambda^3 - 18/\lambda^3 = 18/\lambda^3$$
$$b^3 = 8/\mu^3 + 27/\mu^3 + 1/\mu^3 - 18/\mu^3 = 18/\mu^3, \qquad c^3 = 27/\nu^3 + 1/\nu^3 + 8/\nu^3 - 18/\nu^3 = 18/\nu^3$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 18(1/\lambda^3 + 1/\mu^3 + 1/\nu^3) - 54/(\lambda\mu\nu), \qquad d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

bulunur. Sayıların hiçbir özeliği yoktur. Sayılar yerine harfler alınarak, genel kanıtlama yapılır.

Uzayın Göreceli Ortogonal Matrisleri

Düzlemde barisantrik koordinatlarla sayı matrisi tanımlandı. Bir doğru üzerinde de, barisantrik koordinatlarla sayı matrisini tanımlayalım. Bir boyutlu barisantrik koordinatlarda, afin uzayın dayandığı izotrop noktalar, B(1, 1) ve B'(1, –1) dir. Bir doğru üzerinde, $P(x_o, x_1)$ noktasının sayı matrisi

$$M = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad N = \begin{matrix} 0 & -1, \\ 1 & 0 \end{matrix} \qquad P = x_0M + x_1N = \begin{matrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{matrix}$$

matrisi olacaktır. $\Delta = x_0^2 + x_1^2 = 0$ ise nokta sanaldır. Doğru üzerindeki J(1, i), J'(1, – i) izotrop notalarını verir. Bu matrisi düzlemde türdeş olmayan nokta koordinatlarına uygulayalım. Yukarda olduğu gibi çifte oranlarla hesaplama yapılırsa, $P(x_1, x_2)$ noktası için,

$$\Delta = x_1^2 + x_2^2 = d^2$$

olur. P matrisi, envolütüf M ve N, karesi birim ve eksi birim matrislerle doğrusal toplamı alınır ve $\sqrt{\Delta}$ ya bölünürse, ortogonal matris bulunur. Bu matrisin determinantı, bir boyutlu barisantrik koordinatlarda, afin uzayın dayandığı izotrop noktaları, yani bir doğru üzerinde sanal noktaları, düzlemde ise, noktanın başlangıca uzaklığını belirler. Sanal noktalar için, izotrop doğrular üzerinde iki nokta arasındaki uzaklık sıfırdır. Bu özelik burada görülmektedir. P noktası yerine PQ doğru parçası alınırsa, matriste koordinatların farkı gelecek ve bilinen uzaklık formülü ortaya konulacaktır.

(73) de verilen P matrisi envolütüf (küpü birim), ortogonal ve göreceli ortogonaldir. $P(x_0, x_1, x_2)$ noktasının sayı matrisi ve determinantı,

(155)
$$P = \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_0 \end{matrix} : d, \quad |P| = (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + jx_1 + kx_2)(x_0 + kx_1 + jx_2). \\ = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2 = d^3$$

dır. P matrisinin determinantı 0 ise, nokta izotrop doğrular üzerinde olup, sanaldır. Aynı matrisi uzayda türdeş olmayan koordinatlara uygularsak, determinant sıfırdan farklı ise, iki nokta arasındaki göreceli uzaklığı verir. Sayı matrisinde P noktası yerine PQ doğru parçası alınırsa, koordinatların farkı geleceğinden, iki nokta arasındaki göreceli uzaklık formülü, yeniden çıkarılmış olur. Öklid uzayında, yukarda verilen ikinci mertebe P ortogonal matrisiyle yapılan dönüşümlerde, uzaklıklar ve açılar değişmezler. Bu uzaklık ve açılar Öklidseldir. (155) de verilen, göreceli uzayın P**:**d matrisi, göreceli ortogonal matristir. Uzayda bu matrisle yapılan dönüşümlerde, göreceli uzaklıklar ve açılar değişmezler. Bir üçgenin dönüşümünde, kenar uzunlukları değişmeyeceğinden, açılar da değişmezler. Burada P**:**d matrisinin determinantı birimdir. Bu özeliğin sayısal örnekler üzerinde gerçekleştiği görülür. Bu teoremi kanıtlayalım. Burada d ile bölünen P matrisi, göreceli ortogonaldir. P(a, b, c) noktasının sayı matrisi P ile, R(p, q, r) noktasını sayı matrisi R ile gösterilsin. P matrisi ile R noktasını dönüştürelim ve kendisi ile dönüşmüşünün, başlangıca uzaklıklarını karşılaştıralım. Bu noktaların sayı matrisleri,

$$P = \begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{matrix} : d, \qquad R = \begin{matrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{matrix}$$

dır. P ve R nokta matrisleri çarpılır ve d ye bölünürse,

$$Q = PR = \begin{matrix} ap + br + cq & aq + bp + cr & ar + bq + cp \\ ar + bq + cp & ap + br + cq & aq + bp + cr \\ aq + bp + cr & ar + bq + cp & ap + br + cq \end{matrix} : d$$

$$Q = PR = Q(ap + br + cq, \quad aq + bp + cr, \quad ar + bq + cp) : d,$$

Q noktasının noktası ve nokta matrisi bulunur. Q noktasının başlangıca görel uzaklığı,

$$OQ^3 = (ap + br + cq + aq + bp + cr + ar + bq + cp)\,[ap + br + cq + j(aq + bp + cr) + k(ar + bq + cp)]\,[ap + br + cq + k(aq + bp + cr) + j(ar + bq + cp)] : d^3$$

dır. Uzaklık için (155) deki çarpanlara ayrılmış, formül yazılmıştır. Bu sonuç üzerinde çarpanlara ayırma işlemleri yapılırsa,

$$OQ^3 = (a + b + c)(p + q + r)[a(p + jq + kr) + jb(kr + p + jq) + kc(jq + kr + p)][a(p + kq + jr) + kb(jr + p + kq) + jc(kq + jr + p)] : d^3 =$$

$$(a + b + c)(p + q + r)(p + jq + kr)(a + jb + kc)(p + kq + jr)(a + kb + jc) : d^3$$

$$OR^3 = (p + q + r)(p + jq + kr)(p + kq + jr)$$

bulunur. İkinci yan, P ve R noktalarının başlangıca göreceli uzaklıklarının küplerinin çarpanları ayrılmışlarıdır. P sayı matrisi, göreceli ortogonal olduğundan, determinantının değeri birdir. P matrisinin determinant açılımı, P noktasının başlangıca uzaklığı olup, birdir.

$$OQ^3 = OR^3$$

Örnek 8

Göreceli uzayın ortogonal ve envolütüf matrisi ile dönüşmüş noktaların, eşkenar üçgen üçlü envolüsyonu oluşturduğunu gösteriniz. Konumuzla ilgili Diofant denklemi, bütün gerçel sayılar için geçerlidir. Burada anlatımı kolaylaştırmak için, tam sayı bir örnek üzerinde işlemler yürütülecektir. Diofant denkleminin bir çözümü, T(7, –12, 6) sayılarıdır. Uzayda dik koordinatları, bu sayılarla verilen noktaların başlangıca göreceli uzaklığı 7 birimdir.

$$T = \begin{matrix} 7 & -12 & 6 \\ 6 & 7 & -12 \\ 12 & 6 & 7 \end{matrix}$$

T göreceli ortogonal matrisi ile $M_1(1, 2, 3)$ noktasının dönüşmüşlerini, göz önüne alalım. Dönüşmüş noktalar, $M_2(1, -16, 21)$, $M_3(325, -358, 39)$ dur. Önce T matrisinin değişmez noktalarını bulalım.

$$K(\nu) = -\nu^3 + \nu^2(7 + 7 + 7) - \nu(49 + 72 + 49 + 72 + 49 + 72) - 343 = 0,$$

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 7 + 6j - 12k, \quad \nu_3 = 7 - 12j + 6k$$

Matrisin karakteristik denkleminde, bu değerleri yerine koyup, değişmez noktaları bulalım.

$$(7 - 1)x_0 - 12x_1 + 6x_2 = 0, \qquad 6x_0 + (7 - 1)x_1 - 12x_2 = 0$$

ν'nün diğer değerleri, sıra ile 1 yerine konulur ve türdeş denklemler çözülürse,

$J_2(1, 1, 1)$, $J_1(4 + j - 2k, 1 - 2j + 4k, -2 + 4j + k)$, $J_3(4 - 2j + k, 1 + 4j - 2k, -2 + j + 4k)$

Bulunur. $p(1 + j + k) = 0$ değerini ifadeleri kısaltmak için kullanalım.

$$J_2(1, 1, 1), \quad J_1(3 - 3k, \ -3j + 3k, \ -3 + 3j), \quad J_3(3 - 3j, \ 3j - 3k, \ -3 + 3k)$$

Türdeş olmayan koordinatlara geçilir, birinci koordinatlara bölünürse,

$J_2(1, 1, 1)$, $J_1[1, (-j + k)/(1 - k), (-1 + j)/(1 - k)]$, $J_3[1, (j - k)/(1 - j), (-1 + k)/(1 - j)]$

$$(-j + k)(1 - j)/[(1 - k)(1 - j)] = (-j + k + k - 1)/(1 - j - k + 1) = 3k/3 = k$$

$p(1 + j + k) = 0$ ifadesinde p ye uygun değerler vererek kısaltmalar yapılmıştır. Pay ve payda, paydanın eşleniği (j yerine k, k yerine j konularak elde edilir.) ile çarpılarak, payda gerçel kılınmıştır. Benzer işlemlerle,

$$J_2(1, 1, 1), \quad J_1(1, k, j), \quad J_3(1, j, k)$$

bulunur. Değişmez noktaları izotrop noktalar olan envolüsyonlar, eşkenar üçgen üçlü envolüsyonlarıdır. Öklid düzleminde ve uzayında, ortogonal matrislerin değişmez noktaları izotrop noktalar ve izotrop küre(mutlak konik), göreceli uzayda göreceli ortogonal matrislerin değişmez noktaları ise, göreceli uzayın izotrop noktalarıdır. Eşkenar üçgen üçlü envolüsyonunda, üçgenin göreceli kenar uzunlukları sıfırdır. $A(x_0, x_1, x_2)$, $B(x_1, x_2, x_0)$ eşkenar üçgenin iki köşesi olsunlar. AB ile verilen doğru parçasının göreceli uzunluğu (155) de yerine konularak hesaplanacaktır. (155) in çarpanlara ayrılmış ifadesinde, koordinatların toplamının çarpan olduğu görülmektedir. AB nin de koordinatları toplamı sıfırdır.

$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = 0$$

Göreceli uzayın iki göreceli ortogonal matrisinin, toplamları, çarpımları, evriği ve devriği, gene göreceli ortogonal matristir.

$$A = \begin{matrix} a & b & c \\ c & a & b \end{matrix} \qquad P = \begin{matrix} p & q & r \\ r & p & q \end{matrix}$$

b c a q r p

İki göreceli ortogonal matris olsun. Toplamlarında, birinci satır ikinci sütun elemanı, b + q dür. İkinci satır üçüncü sütun elemanı b + q dür. Eşit oldukları görülüyor. Çarpımlarında, birinci satır ikinci sütun elemanı, aq + bp + cr dir. İkinci satır üçüncü sütun elemanı, cr + aq + bp dir. Eşitlik görülüyor. Evriğinde, evriğinin birinci satır ikinci sütun elemanı, c^2 – ab dir. İkinci satır üçüncü sütun elemanı, c^2 – ab dir. Eşitlik görülüyor. Devriğinde, birinci satır ikinci sütun elemanı, c dir. İkinci satır üçüncü sütun elemanı, c dir. Eşitlik görülüyor. Benzer düşünce sürdürülürse, göreceli ortogonal matris için, gerekli olan eşitliklerin tümü görülür. Göreceli ortogonal matrisler bu özelikleri ile, matrislerin alt gurubu ve alt cismi olurlar.

VI

UZAYIN HİPERBOLİK TRİGONOMETRİSİ ve İKİNCİ KARMAŞIK SAYILARI

Düzlemde Hiperbolik Trigonometri ve Uzaya Genelleştirilmesi

Düzlemde dik koordinatlarda olduğu gibi, barisantrik koordinatlarda da, bir açının trigonometrisi yapılacaktır. Açının bir doğrusu Ox ekseni, ikinci doğrusu başlangıçtan geçen bir doğru olsun. İkinci doğru üzerinde barisantrik koordinatları ile, bir $A(a_1, a_2, a_3)$ noktasını alalım. Açının argümanı α ile gösterilirse (radyan değil),

(156) $OA= a = (a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1a_2a_3)^{1/3}$, $T_1(\alpha) = a_1/a$, $T_2(\alpha) = a_2/a$, $T_3(\alpha) = a_3/a$

ile, barisantrik trigonometri oranları tanımlanacaktır. a_1, a_2, a_3 değerleri birinci formülde yerine konulursa,

$$T_1^3(\alpha) + T_2^3(\alpha) + T_3^3(\alpha) - 3T_1(\alpha)T_2(\alpha)T_3(\alpha) = 1$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$$

Fonksiyonuna düzlemde kübik eğri, uzayda kübik yüzey denilecektir. Birim kübik yüzeyin B(1,1,1) birim noktası sonsuzda, diğer noktaları sonludadır. Uzunlukların görel olması bu nedenledir. OA uzunluğuna dayanak olan izotrop noktalar, (119) da diklik koşulu altında dik envolüsyon oluşturdu. (119) da, $j_1(1, j, k)$, $j_2(1, 1, 1)$, $j_3(1, k, j)$ izotrop noktaları, sonsuzdaki düzlem üzerindedir. (156)'nın tanımlandığı düzlem, sonsuzdaki düzlem olursa, bu noktalar izotrop noktalar olacak ve uzayda alınan koordinat sistemi de, ortogonal olacaktır. A noktası sonsuzdadır. A noktasının sonsuzdaki koordinat üçgenine göre, barisantrik koordinatları, OA vektörünün karteziyen bileşenleridir. A noktasının barisantrik koordinatlarından, (156) formülleri kullanılarak, OA vektörünün trigonometrik ifadesi bulunur. Bu trigonometri, Öklidsel değildir. Çünkü B(0, 1, 1, 1) noktası üçüncü izotrop noktası olarak eklenmiştir. Bu izotrop noktanın kullanılmadığı işlemler, Öklidseldir.

Uzayda karmaşık vektörler kalın harflerle yazılacaklardır.

$\mathbf{OA} = \mathbf{a} = a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3 = aT_1(\alpha) + \mathbf{j}aT_2(\alpha) + \mathbf{k}aT_3(\alpha)$, $\mathbf{a}/a = T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha)$

İkinci yan, karmaşık düzlemde, birim vektördür. α, açının açı eğrisi (helezonu) üzerinde, Ox gerçel eksenden itibaren ölçümüdür. Ölçüm, barisantrik koordinatlarda, (34) başlangıca uzaklık formülü ve Simpson kuralı ile hesaplanacak olan, göreceli uzunluktur.

$e^{j\alpha}$ ve $e^{k\beta}$ fonksiyonlarını Maklören serisine açalım.

(157) $T_1(\alpha) = 1 + \alpha^3/3! + \alpha^6/6! ...... \alpha^{3n}/3n!$, $T_2(\alpha) = \alpha + \alpha^4/4! + \alpha^7/7! ... \alpha^{3n+1}/(3n+1)!$

$T_3(\alpha) = \alpha^2/2! + \alpha^5/5! + \alpha^8/8! ..... \alpha^{3n+2}/(3n+2)!$,

$T_1(\beta) = 1 + \beta^3/3! + \beta^6/6! ... \beta^{3n}/3n!$ $T_3(\beta) = \beta^2/2! + \beta^5/5! + \beta^8/8! ... \beta^{3n+2}/(3n+2)!$,

. $T_2(\beta) = \beta + \beta^4/4! + \beta^7/7! ... \beta^{3n+1}/(3n+1)!$

olur. Bu seriler pozitif terimli seriler olduklarından, bu serilere dayalı trigonometriye **hiperbolik trigonometri** ve $\mathbf{OA} = \mathbf{a} = a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3 = aT_1(\alpha) + \mathbf{j}aT_2(\alpha) + \mathbf{k}aT_3(\alpha)$, karmaşık sayısına da, **uzayın ikinci üst karmaşık sayısı** veya **uzayın hiperbolik üst karmaşık sayısı** denilecektir. Gerçel terim Ox ekseni, **j** vektörü 1'in ikinci küp kökü olup, Oy ekseni üzerinde birim vektör, **k** vektörü, 1'in üçüncü küp kökü olup, Oz ekseni üzerinde birim vektörlerdir. Karteziyen koordinatlarda, sonsuzdaki düzlem üzerinde koordinat üçgenini, barisantrik koordinat üçgeni olarak alalım. T_1 gerçel, T_2 birincide j'li, ikincide k'lı terimdir. Değişken bir açının trigonometrik oranlarını, barisantrik koordinat düzleminde, koordinat olarak alan noktalar, başlangıç etrafında dolanarak (helezon) başlangıçta son bulan bir eğri belirlerler. Bu birim kübik eğriye, **açı eğrisi** denilecektir. Burada yorumlar uzayda yapılacaktır.

A noktası dik koordinatlarda, uzayın bir noktası olarak düşünülebilir. A noktası birim kübik yüzey üzerinde bir eğri çizecektir. Bu eğri de açı eğrisi olacaktır. (156) de tanımlanan trigonometrik oranlar, birim kübik yüzeyin, yalnız açı eğrisi üzerinde geçerlidir. Çünkü birinci yan bir değişkene bağlıdır. Trigonometrik işlemler hem barisantrik koordinat düzleminde, hem de uzayda dik koordinatlarda aynıdır.

(158) $e^{\mathbf{j}\alpha} = T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha)$, $z = \rho\, e^{\mathbf{j}\alpha} = \rho\, [T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha)]$

Barisantrik karmaşık sayının kutupsal gösterilimi, hem uzayda ve hem de düzlemin barisantrik koordinatlarında geçerlidir. Birim kübik yüzey, açıortay (birinci 1/8'lik dilimde) etrafında dönel bir yüzeydir. Başlangıçtan uzaklaştıkça, kesit daralır ve sonsuzda yüzey, açıortaya teğet olur. α, açının karşısındaki, eğri yayının göreceli uzunluğu ve ρ da, noktanın başlangıca göreceli uzaklığıdır. Bu gösterilimde, Moivre formülü geçerlidir. Bu konuda kitabın sonuna, Borland Pascal ile program 3 konulmuştur. Barisantrik koordinatlarda bir noktanın başlangıca, Öklidsel uzaklığı, koordinat dönüşümü ile, (34)'den

$$d^2_ö = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1 - x_1x_2 - x_2x_0)/(x_0 + x_1 + x_2)^2$$

dır. Bu değer $(x_o + x_1 + x_2)^3$ ile çarpılırsa,

$$d^3_g = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2$$

noktanın başlangıca göreceli uzaklık formülü bulunur. Yüzey, x + y + z = 0 düzlemine ve x = y = z açıortayına da asemptottur. Bir kaç örnek üzerinde, özelikler araştıralım.

α	T1	T2	T3	s	u
0.8	1.0856977	0.8171083	0.3227344	0.8000000000044	0.9008
3.6275964	12.432070	12.595104412	12.595104032	3.62759000	21.394
7.2551928	471.8296776	471.80309755	471.80309768	7.25519000	816.873
10.8827892	17750.638	17750.642522305	17750.64252254	10.8827730	30744.71

. α , T_1, T_2, T_3 trigonometrik oranlarının argümanı, s açı eğrisinin uzunluğunun Simpson formülü ile göreceli uzaklık ölçümü, u da bu yayın aynı diferansiyellerle, Öklid uzayının izotrop küresine dayalı olarak ölçümüdür. Bu örneklerde α ile s nin, ne kadar çakıştığı görülmektedir. Trigonometrik serilerin yavaş yakınsaması nedeni ile, serilerin hesabında alınan terim sayısı artırıldıkça, çakışma artmaktadır. u'nun α ile hiçbir ilgisi olmadığı görülmektedir. Bu problem, karmaşık uzayda göreceli uzaklığın ve yeni izotrop noktaların, gerekliliğini gösteren bir uygulamadır.

İkinci satırda, ikinci ve üçüncü oranlar eşit olmuştur. Birinci oran bunlardan küçüktür. Birim kübik yüzey, Ox ekseninden geçen açıortay düzlemine göre simetriktir. Bu nokta açıortay düzlemi üzerinde ve Oy, Oz eksenlerinden taraftadır. Açı eğrisinin başlangıç noktası B(1,0,0) noktasıdır. Birinci satırda, T_3 ün T_2 den küçük olduğu görülüyor. Nokta açıortay düzleminde ve buraya yüzeyin altından gelmiştir. Üçüncü satırda T_2 ve T_3 gene eşit olmuştur. Eğri gene açıortay düzlemindedir. T_1 diğerlerinden büyüktür. Dördüncü satırda durum gene aynıdır. Bu noktaların açı yayları (argümanları) birincinin tam katlarıdır. O halde trigonometrik fonksiyonlar peryodiktir. Açı eğrisi, birinci (1/8)'lik dilimde, açıortay etrafında dönen bir helistir. İkinci satırdaki açı yayı (argümanı) yarım, bir sonraki tam peryotdur. Peryot (178)'in dördüncü satırında verilmiştir.

$$e^{\mathbf{j}\alpha} = T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha), \qquad e^{\mathbf{k}\beta} = T_1(\beta) + \mathbf{k}T_2(\beta) + \mathbf{j}T_3(\beta)$$

α ve β açı eğrilerini göz önüne alalım. Birinci açı eğrisi, sağdan sola, matematik dönme yönünde, yüzeyin altından üstüne geçerek B(1,0,0) noktasından başlayıp, açıortay çevresinde bir helis çizerek sonsuza gider. İkinci ise, ters yönde helis çizerek sonsuza gider. Ox ekseninden geçen, açıortay düzlemi üzerinde kesişirler.

$e^{\mathbf{j}\alpha}$ ve $e^{\mathbf{j}\beta}$ açı eğrilerini çarpalım.

$$e^{\mathbf{j}(\alpha+\beta)} = [T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha)]\,[T_1(\beta) + \mathbf{j}T_2(\beta) + \mathbf{k}T_3(\beta)]$$

$$e^{\mathbf{j}(\alpha+\beta)} = [T_1(\alpha)T_1(\beta) + T(\alpha)\, T_3(\beta) + T_3(\alpha)T_2(\beta)] +$$

$$\mathbf{j}[T_1(\alpha)T_2(\beta) + T_2(\alpha)T_1(\beta) + T_3(\alpha)T_3(\beta)] +$$
$$\mathbf{k}\,[T_1(\alpha)T_3(\beta) + T_2(\alpha)T_2(\beta) + T_3(\alpha)T_1(\beta)]$$
$$e^{\mathbf{j}(\alpha+\beta)} = T_1(\alpha+\beta) + \mathbf{j}\,T_2(\alpha+\beta) + \mathbf{k}\,T_3(\alpha+\beta)$$

(159) $$T_1(\alpha+\beta) = T_1(\alpha)T_1(\beta) + T_2(\alpha)T_3(\beta) + T_3(\alpha)T_2(\beta),$$
$$T_2(\alpha+\beta) = T_1(\alpha)T_2(\beta) + T_2(\alpha)T_1(\beta) + T_3(\alpha)T_3(\beta),$$
$$T_3(\alpha+\beta) = T_1(\alpha)T_3(\beta) + T_2(\alpha)T_2(\beta) + T_3(\alpha)T_1(\beta)$$

formülleri bulunur. $\alpha = \beta$ alınırsa,

$$T_1(2\alpha) = T_1^2(\alpha) + 2T_2(\alpha)T_3(\alpha), \qquad T_2(2\alpha) = 2T_1(\alpha)T_2(\alpha) + T_3^2(\alpha),$$
$$T_3(2\alpha) = 2T_1(\alpha)T_3(\alpha) + T_2^2(\alpha)$$

olur. $e^{\mathbf{j}\alpha}$ ve $e^{\mathbf{j}\beta}$ açı eğrilerini bölelim. (144) den,

$$e^{\,\mathbf{j}(\alpha-\beta)} = [T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha)]/[T_1(\beta) + \mathbf{j}T_2(\beta) + \mathbf{k}T_3(\beta)] =$$
$$[T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha)]\{[T_1^2(\beta) - T_2(\beta)T_3(\beta)] + \mathbf{j}[T_3^2(\beta) -$$
$$T_1(\beta)T_2(\beta)] + \mathbf{k}[T_2^2(\beta) - T_1(\beta)T_3(\beta)]\}$$

Payda birim geldiği için yazılmamıştır. Burada ikinci satır paydadaki sayının tersidir. Barisantrik karmaşık sayının tersi, (45) ve (48) formülleri ile verilmiştir.

(160) $$T_1(\alpha-\beta) = T_1(\alpha)T_1^2(\beta) + T_2(\alpha)T_2^2(\beta) + T_3(\alpha)T_3^2(\beta) - T_1(\alpha)T_2(\beta)T_3(\beta) -$$
$$T_2(\alpha)T_1(\beta)T_3(\beta) - T_3(\alpha)T_1(\beta)T_2(\beta),$$
$$T_2(\alpha-\beta) = T_1(\alpha)T_3^2(\beta) + T_2(\alpha)T_1^2(\beta) + T_3(\alpha)T_2^2(\beta) - T_1(\alpha)T_1(\beta)T_2(\beta) -$$
$$T_2(\alpha)T_2(\beta)T_3(\beta) - T_3(\alpha)T_1(\beta)T_3(\beta)$$
$$T_3(\alpha-\beta) = T_1(\alpha)T_2^2(\beta) + T_2(\alpha)T_3^2(\beta) + T_3(\alpha)T_1^2(\beta) - T_1(\alpha)T_1(\beta)T_3(\beta) -$$
$$T_2(\alpha)T_1(\beta)T_2(\beta) - T_3(\alpha)T_2(\beta)T_3(\beta)$$

(161) $$e^{\alpha} = T_1(\alpha) + T_2(\alpha) + T_3(\alpha), \qquad e^{\mathbf{j}\alpha} = T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha),$$
$$e^{\mathbf{k}\alpha} = T_1(\alpha) + \mathbf{k}T_2(\alpha) + \mathbf{j}T_3(\alpha)$$

Uygun çarpanlarla doğrusal toplam alınırsa,

$$T_1(\alpha) = (e^{\alpha} + e^{\mathbf{j}\alpha} + e^{\mathbf{k}\alpha})/3, \quad T_2(\alpha) = (e^{\alpha} + ke^{\mathbf{j}\alpha} + je^{\mathbf{k}\alpha})/3, \quad T_3(\alpha) = ([e^{\alpha} + je^{\mathbf{j}\alpha} + ke^{\mathbf{k}\alpha})/3$$

bulunur. Birinci yan gerçel ve sayısal bir değer olduğundan, ikinci yan da, j ve k'lar, 1 in küp kökü olarak alınmıştır. Bu fonksiyonların türevlerini alalım.

(162) $$\partial T_1/\partial\alpha = T_3, \qquad \partial T_2/\partial\alpha = T_1, \qquad \partial T_3/\partial\alpha = T_2, \qquad \partial T_1/\partial T_2 = T_3/T_1,$$
$$\partial T_3/\partial T_2 = T_2/T_1 \qquad \alpha = \mathrm{Ln}(T_1 + T_2 + T_3)$$

T_2 değişken olarak seriye açılırsa,

$$\partial\alpha/\partial T_2 = (\partial T_1/\partial T_2 + 1 + \partial T_3/\partial T_2)/(T_1+T_2+T_3) = (T_3/T_1+1+T_2/T_1)/(T_1+T_2+T_3)$$
$$=1/T_1, \quad \partial^2\alpha/\partial T_2^2 = -T_3/T_1^3, \qquad \partial^3\alpha/\partial T_2^3 = 3T_1^{-5}T_3^2 - T_1^{-4}T_2^2,$$
$$\partial^4\alpha/\partial T_2^4 = -15T_1^{-7}T_3^3 + 10T_1^{-6}T_2T_3 - T_1^{-4}$$

$T_1 = 1$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ konulur, Maklören serisine açılırsa,

$$\alpha = T_2 - T_2^4/4! + 34T_2^7/7! - 5446T_2^{10}/10! + 2405116T_2^{13}/13! - 2261938588T_2^{16}/16! \ldots$$
$$T_1 = 1 + T_2^3/3! - 14T_2^6/6! + 1414T_2^9/9! - 378892T_2^{12}/12! \ldots.$$
$$T_3 = T_2^2/2! - 4T_2^5/5! + 254T_2^8/8! - 55482T_2^{11}/11! \ldots$$

Serileri bulunur. Türetilerek elde edilen katsayılar, bir cebirsel kurala bağlanamamıştır. Bu nedenle son üç serinin yakınsaklığı konusunda, yakınsaklık testi uygulanamamış ve yakınsaklığı konusunda bilgi edinilememiştir.

(159) formüllerinden yararlanılırak,

$$T_1(3\alpha) = 1 + 9T_1(\alpha)\,T_2(\alpha)\,T_3(\alpha),$$
$$T_2(3\alpha) = 3[T_1^2(\alpha)T_2(\alpha) + T_2^2(\alpha)T_3(\alpha) + T_3^2(\alpha)T_1(\alpha)]$$
$$T_3(3\alpha) = 3[T_1^2(\alpha)T_3(\alpha) + T_2^2(\alpha)T_1(\alpha) + T_3^2(\alpha)T_2(\alpha)]$$

bulunur. (161) de birinci tarafta, üsteki α lar yok edilirse,

(163) $$(T_1 + T_2\;\; T_3)^j = T_1 + jT_2 + kT_3, \qquad (T_1 + T_2 + T_3)^k = T_1 + kT_2 + jT_3$$

bulunur. Bu iki bağıntı bir yüzey gösterir. (161) de üç eşitlik çarpılırsa,

(164) $$T_1^3 + T_2^3 + T_3^3 - 3T_1\,T_2\,T_3 = 1$$

birim kübik yüzey bulunur. Trigonometrik oranlar, bu yüzeyleri sağlayacaktır. (163) de verilen iki yüzey, aralarında bağımlıdır. j yerine k, k yerine j yazılırsa, simetriden dolayı, yeni bir eşitlik bulunmaz. Trigonometrik oranların ancak, biri bağımsız olabilir.

İki Değişkenli Trigonometrik Oranlar

(161)'in birinci ve ikinci formüllerinde, açı eğrisi üzerindeki noktalar, trigonometrik oranlarla belirlendi. Açı eğrisi dışındaki noktalar kalmıştır. Burada bütün yüzey üzerindeki noktalar belirlenecektir. $e^{\mathbf{k}\beta}$ birim vektörü, birim kübik yüzeyin üstünden giden açı eğrisi üzerindeki noktaları, $e^{\mathbf{j}\alpha}$ birim vektörü ise, yüzeyin altından giden açı eğrisi üzerindeki noktaları belirler. Çok değişkenli trigonometrik fonksiyonlar ve türevleri aşağıdadır.

(165) $e^{\alpha+\beta} = T_1(\alpha,\beta) + T_2(\alpha,\beta) + T_3(\alpha,\beta)$, $\quad e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} = T_1(\alpha,\beta) + \mathbf{j}T_2(\alpha,\beta)+ \mathbf{k}T_3(\alpha,\beta)$

$$e^{\mathbf{k}\alpha+\mathbf{j}\beta} = T_1(\alpha,\beta) + \mathbf{k}T_2(\alpha,\beta) + \mathbf{j}T_3(\alpha,\beta)$$

$$T_1(\alpha,\beta) = (e^{\alpha+\beta} + e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} + e^{\mathbf{k}\alpha+\mathbf{j}\beta})/3, \qquad T_2(\alpha,\beta) = (e^{\alpha+\beta} +ke^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} + je^{\mathbf{k}\alpha+\mathbf{j}\beta})/3$$

$$T_3(\alpha,\beta) = (e^{\alpha+\beta} + je^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} +ke^{\mathbf{k}\alpha+\mathbf{j}\beta})/3$$

$$\partial T_1/\partial\alpha = (e^{\alpha+\beta}+je^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta}+ke^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta})/3, \qquad \partial T_2/\partial\alpha = (e^{\alpha+\beta} + e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} + e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta})/3$$

$$\partial T_3/\partial\alpha = (e^{\alpha+\beta} + ke^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} + je^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta})/3$$

$$\partial T_1/\partial\alpha = T_3(\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta), \qquad \partial T_2/\partial\alpha = T_1(\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta), \qquad \partial T_3/\partial\alpha = T_2(\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta)$$

$$\partial T_1/\partial\beta = (e^{\alpha+\beta} + ke^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} + je^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta})/3, \qquad \partial T_2/\partial\beta = (e^{\alpha+\beta} + je^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} + ke^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta})/3$$

$$\partial T_3/\partial\beta = (e^{\alpha+\beta} + e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} + e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta})/3$$

$$\partial T_1/\partial\beta = T_2(\alpha,\beta), \qquad \partial T_2/\partial\beta = T_3(\alpha,\beta), \qquad \partial T_3/\partial\beta = T_1(\alpha,\beta)$$

Bu fonksiyonların Maklören serileri,

$e^{\alpha+\beta} =1 + \alpha + \beta + ½!(\alpha^2 + 2\alpha\beta +\beta^2) +1/3!(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3) + ¼!(\alpha^4 + 4\alpha^3\beta +6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4) + 1/5!(\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 +\beta^5)...$

$e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} = 1 + j\alpha + k\beta + ½!(k\alpha^2 + 2\alpha\beta +j\beta^2) + 1/3!(\alpha^3 + 3j\alpha^2\beta + 3k\alpha\beta^2 + \beta^3) + ¼!(j\alpha^4 + 4k\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4j\alpha\beta^3 + k\beta^4) + 1/5!(k\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10j\alpha^3\beta^2 + 10k\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + j\beta^5)...$

$e^{\mathbf{k}\alpha+\mathbf{j}\beta} = 1 + k\alpha + j\beta + ½!(j\alpha^2 + 2\alpha\beta + k\beta^2) + 1/3!(\alpha^3 + 3k\alpha^2\beta +3j\alpha\beta^2 + \beta^3) + ¼!(k\alpha^4 + 4j\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4k\alpha\beta^3 + j\beta^4) + 1/5!(j\alpha^5 + 5\alpha^4\beta +10k\alpha^3\beta^2 + 10j\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + k\beta^5)...$

dır. Hesaplanan son üç fonksiyon, (165) in ikinci kısmında yerine konularak, trigonometrik seriler bulunur.

(166) $T_1(\alpha, \beta) =1 + 12!(2\alpha\beta) + 1/3!(\alpha^3+\beta^3) + ¼!(6\alpha^2\beta^2) + 1/5!(5\alpha^4\beta+5\alpha\beta^4) + 1/6!(\alpha^6 + C_6{}^3\alpha^3\beta^3 + \beta^6) + 1/7!(C_7{}^2\alpha^5\beta^2 + C_7{}^5\alpha^2\beta^5) + 1/8!(8\alpha^7\beta + C_8{}^4\alpha^4\beta^4 + 8\alpha\beta^7) + 1/9!(\alpha^9 + C_9{}^3\alpha^6\beta^3 + C_9{}^6\alpha^3\beta^6 + \beta^9) + ... + 1/n!(C_n{}^m \alpha^{n-m} \beta^m + C_n{}^{m+3}\alpha^{n-m-3} \beta^{m+3} + C_n{}^{m+6} \alpha^{n-m-6} \beta^{m+6}...)$ $\quad n + m = 3p$

$T_2(\alpha, \beta) = \alpha + ½!\beta^2 + 1/3!(C_3{}^1\alpha^2\beta) + ¼!(\alpha^4 +4\alpha\beta^3)+ 1/5!(C_5{}^2\alpha^3\beta^2+\beta^5) + 1/6!(6\alpha^5\beta + C_6{}^4\alpha^2\beta^4) + 1/7!(\alpha^7 + C_7{}^3\alpha^4\beta^3 + C_7{}^6\alpha\beta^6) + 1/8!(C_8{}^2\alpha^6\beta^2 + C_8{}^5\alpha^3\beta^5 + \beta^8) + 1/9!(9\alpha^8\beta + C_9{}^4\alpha^5\beta^4 + C_9{}^7\alpha^2\beta^7) +... \quad 1/n!(C_n{}^m \alpha^{n-m} \beta^m+ C_n{}^{m+3} \alpha^{n-m-3} \beta^{m+3}...)$ $\quad n + m = 3p+1$

$T_3(\alpha, \beta) = \beta + ½!\alpha^2 + 1/3!C_3{}^2\alpha\beta^2 + ¼!(4\alpha^3\beta +\beta^4) + 1/5!(\alpha^5 + C_5{}^3\alpha^2\beta^3) + 1/6!(C_6{}^2\alpha^4\beta^2 + C_6{}^5\alpha\beta^5) + 1/7!(7\alpha^6\beta + C_7{}^4\alpha^3\beta^4 + \beta^7) + 1/8!(\alpha^8 + C_8{}^3\alpha^5\beta^3 + C_8{}^6\alpha^2\beta^6) + 1/9!(C_9{}^2\alpha^7\beta^2 + C_9{}^5\alpha^4\beta^5 + 9\alpha\beta^8) + ... \quad + 1/n!(C_n{}^m \alpha^{n-m} \beta^m + C_n{}^{m+3} \alpha^{n-m-3} \beta^{m+3} ....)$ $\quad n + m = 3p + 2$

İki değişkenli trigonometrik oranlar ile, bir değişkenli trigonometrik oranlar, aynı tanıma dayandırılmıştır. Bu nedenle çıkartılan bütün özdeşlikler ve konulan özelikler, her ikisi için de geçerlidir.

(159) toplam formülünde,

$$\mathbf{T_1}(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = T_1(\mathbf{j}\alpha)T_1(\mathbf{k}\beta) + T_2(\mathbf{j}\alpha)\, T_3(\mathbf{k}\beta) + T_3(\mathbf{j}\alpha)T_2(\mathbf{k}\beta)$$

(161)'nin ikinci formülünde α yerine $\mathbf{j}\alpha$, β yerine $\mathbf{k}\beta$, koyarak argümanın katsayısını dışarı alalım.

$$\mathbf{T_1}(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = T_1(\alpha)T_1(\beta) + \mathbf{j}T_2(\alpha)\, \mathbf{j}\, T_2(\beta) + \mathbf{k}T_3(\alpha)\mathbf{k}T_2(\beta)$$
$$= T_1(\alpha)T_1(\beta) + \mathbf{k}T_2(\alpha)\, T_2(\beta) + \mathbf{j}T_3(\alpha)T_2(\beta)$$

Benzer olarak,

$$\mathbf{T_2}(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = \mathbf{k}T_1(\alpha)T_2(\beta) + \mathbf{j}T_2(\alpha)\, T_1(\beta) + T_3(\alpha)T_3(\beta)$$
$$\mathbf{T_3}(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = \mathbf{k}T_1(\alpha)T_3(\beta) + \mathbf{j}T_2(\alpha)\, T_2(\beta) + T_3(\alpha)T_1(\beta)$$

olur. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ iki değişkenlitrigonometrik oranlar, karmaşık sayı olduklarından, vektör olarak gösterilmişlerdir. **j** ve **k**, 1'in küp kökleri olup, barisantrik karmaşık sayılardır. Bu vektörlerin toplamının, birim kübik yüzey üzerindeki noktası M olsun. $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ karmaşık sayılarının toplamı, **OM** vektörünü verecektir. **OM** vektörünün oluşturulmasında, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ karmaşık sayılarının doğrudan toplamı alınır. Trigonometrik oranlar gerçel sayılardır.

$$\mathbf{OM} = \mathbf{T}_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{T}_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{T}_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = T_1(\alpha)T_1(\beta) + \mathbf{k}T_2(\alpha)T_3(\beta) + \mathbf{j}T_3(\alpha)\, T_2(\beta) + \mathbf{k}T_1(\alpha)T_2(\beta) + \mathbf{j}T_2(\alpha)T_1(\beta) + T_3(\alpha)\, T_3(\beta) + \mathbf{j}T_1(\alpha)T_3(\beta) + T_2(\alpha)T_2(\beta) + \mathbf{k}T_3(\alpha)\, T_1(\beta)$$

$$\mathbf{OM} = T_1(\alpha)T_1(\beta) + T_2(\alpha)\, T_2(\beta) + T_3(\alpha)T_3(\beta) + \mathbf{j}[T_1(\alpha)T_3(\beta) + T_2(\alpha)\, T_1(\beta) + T_3(\alpha)T_2(\beta)] + \mathbf{k}[T_1(\alpha)T_2(\beta) + T_2(\alpha)\, T_3(\beta) + T_3(\alpha)T_1(\beta)]$$

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = T_1(\alpha)T_1(\beta) + T_2(\alpha)\, T_2(\beta) + T_3(\alpha)T_3(\beta),$$

$$\mathbf{T}_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = T_1(\alpha)T_3(\beta) + T_2(\alpha)\, T_1(\beta) + T_3(\alpha)T_2(\beta)$$

$$\mathbf{T}_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = T_1(\alpha)T_2(\beta) + T_2(\alpha)\, T_3(\beta) + T_3(\alpha)T_1(\beta)$$

$$\mathbf{OM} = T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) =$$

$$[T_1(\alpha) + \mathbf{j}T_2(\alpha) + \mathbf{k}T_3(\alpha)]*[T_1(\beta) + \mathbf{k}T_2(\beta) + \mathbf{j}T_3(\beta)] = e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta}$$

Gerçel sayılarla trigonometrik oranların tanımları, (165) de yapılan tanımlarla aynıdır. (165) de üstel fonksiyonlar, bir değişkenli trigonometrik fonksiyonların toplamının çarpımı olarak yazılır ve işlemler kısaltılırsa, tanımların aynı olduğu görülür. Bu ve (172) deki tanımla trigonometrik oranlar, gerçel sayılarla verilmişlerdir. Çünkü,(172) deki tanımla trigonometrik oranlar, noktanın gerçel ve dik koordinatları ile tanımlanmışlardır. Bu tanımda M noktası değişmemiştir.

Trigonometrik oranlar barisantrik koordinatlarla sonsuzdaki düzlem üzerinde alındı. Bu koordinatlar, sonsuzdaki düzlemde belirlediği noktanın, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre barisantrik koordinatlarıdır.

$$\mathbf{OM} = \rho e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta} = \rho[T_1(\alpha,\beta) + \mathbf{j}T_2(\alpha,\beta) + \mathbf{k}T_3(\alpha,\beta)$$

OM 'nin ikinci yanı uzayda, M noktasının dik koordinatlarıdır. ρ noktanın görel uzaklığıdır. Çünkü M'nin sonsuzdaki düzlem üzerindeki barisantrik koordinatları, uzayda noktanın dik koordinatlarıdır.

Bu trigonometri Öklidsel değildir. Uzayda tanımlanmıştır, fakat uzayın izotrop koniği ile bir ilgi kurulmamıştır. Yalnız, Öklid düzleminin dayanağı olan, izotrop nokta çifti ile ilgi kurulmuştur. Bu nedenle ilk iki boyutu Öklidsel, üçüncü boyutu Öklid dışıdır. Bu özelik ilerde bir koordinat dönüşümü ile geçilecek, izotrop koordinatlarda, belirgin olarak görülecektir.

Uzayda Koordinat Dönüşümleri

$J_1(0,1, k, j)$, $J_2(0, 1, 1, 1)$, $J_3(0, 1, j, k)$, $O(1, 0, 0, 0)$ izotrop noktalarına dayalı, koordinat sistemine **sanal koordinat** sistemi denilecektir.

Sanal koordinatlarla dik koordinatlar arasında dönüşümü bulalım.

$$T = 1/3 \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & j \\ 0 & j & 1 & k \end{matrix} \qquad T^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j & k \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & j \end{matrix}$$

T matrisi ile sanal koordinatlardan, dik koordinatlara geçilir. T^{-1} matrisi ile de dik koordinatlardan sanal koordinatlara geçilir. Bir M noktasının sanal koordinatlarla sütun matrisi $M = B[[b_0, b_1, b_2, b_3]]$, dik koordinatlarının sütun matrisi, $M = X[[x_0, x_1, x_2, x_3]]$ olsun.

(167) $$X = T\,B, \qquad B = T^{-1} X$$

$$b_0 = x_0, \quad b_1 = x_1 + jx_2 + kx_3, \quad b_2 = x_1 + x_2 + x_3, \quad b_3 = x_1 + kx_2 + jx_3$$

İzotrop kübik yüzeyin ve birim kübik yüzeyin sanal koordinatlarda denklemleri,

$$b_1\, b_2\, b_3 = 0, \qquad b_1\, b_2\, b_3 = 1$$

olur. OM doğrusu üzerinde, $N(b_0 + \lambda, b_1, b_2, b_3)$ noktasının P_∞ olması için $b_0 + \lambda = 0$ olmalıdır. M noktasının başlangıca uzaklığı, $OM/OB = (OP_\infty, MB)$ çifte oranı ile hesaplanacaktır. OM doğrusunun birim kübik yüzeyi kestiği B noktası,

$b_1 b_2 b_3/(b_0+\lambda)^3 = 1, \quad b_0+\lambda = (b_1 b_2 b_3)^{1/3}, \quad B[(b_1b_2b_3)^{1/3}, b_1, b_2, b_3]$

$P_\infty(0, b_1, b_2, b_3), \quad OM/OB = (OP_\infty, MB) = OM = (b_1 b_2 b_3)^{1/3}$

olur. b_1, b_2, b_3 yerlerine değerleri yazılırsa, bilinen göreceli uzaklık bulunur. Başka bir deyişle, (167) dönüşüm formülünden bulunan b_i değerlerinin çarpımı alınır ve (147) formülü göz önüne alınırsa, uzaklık formülü bulunur.

Trigonometrik serilerin Matlab programı ile bulunması:

```
T(1) = 1; T(2) = 0; T(3) = 0; x = 7;  for i = 1:50  b = x^i/factorial(i); n = mod(i,3);
m = n + 1;  T(m) = T(m) + b; end
t,  d = T(1)^3 + T(2)^3 + T(3)^3 – 3*T(1)*T(2)*T(3),
 i = sqrt(– 1);  s = sqrt(3);   j = (– 1 + s*i)/2; k = (– 1 – s*i)/2;  a = T(1) + T(2) + T(3);
b = T(1) + j*T(2) + k*T(3); c = T(1) + k*T(2) + j*T(3);    g1 = a*b*c;
```

Son iki satır Öklidsel düzlemin barisantrik koordinatları ile, (36) formülü gereğince, sanal koordinatlar arsındaki dönüşüm formülüdür. Görel uzaklığın 1 olması da, bu ilgiyi destekler. T(1), T(2), T(3) ile ifade edilen seriler, göreceli uzayda birim kübik yüzey üzerinde bulunan, noktaların barisantrik koordinatları, a, b, c sayıları da, bu noktaların, göreceli uzayda $J_1(0, 1, j, k)$, $J_2(0, 1, 1, 1)$, $J_3(0, 1, k, j)$, $O(1, 0, 0, 0)$ izotrop noktaları ile oluşan dörtyüzlüyle belirlenen, sanal koordinatlarıdır. J_1 ve J_3 düzlemde barisantrik koordinatlardır. Göreceli uzayda karteziyen koordinatlardır.

g1 = a.b.c ifadesi de, göreceli uzayda, göreceli uzayın sanal koordinatları ile, bir noktanın başlangıca uzaklık formülüdür. (36) ve (167) formüllerinde açıklanmıştır

(168) $d^3 = x_1.x_2.x_3 = a.b.c = T(1)^3 + T(2)^3 + T(3)^3 – 3.T(1).T(2).T(3),$

Uzayda Bir Açının İzdüşümleri

$D = \lambda_1J_1 + \mu_1J_2 + \nu_1J_3, \qquad E = \lambda_2J_1 + \mu_2J_2 + \nu_2J_3$

$(DE, J_1J_2J_3)_1 = (\mu_1/\lambda_1) : (\mu_2/\lambda_2), \qquad (DE, J_1J_2J_3)_2 = (\nu_1/\lambda_1) : (\nu_2/\lambda_2)$

olur. $D(x_1,x_2,x_3)$, $E(1,0,0)$ sonsuzdaki noktaların barisantrik koordinatları ile, (68) determinantlarından λ, μ, ν değerleri hesaplanırsa,

$(DE, J_1J_2J_3)_1 = (x_1 + x_2 + x_3)/(x_1 + jx_2 + kx_3),$

$(DE, J_1J_2J_3)_2 = (x_1 + kx_2 + jx_3)/(x_1 + jx_2 + kx_3)$

olur. Bu oranlar açının izotrop sanal düzlemlerdeki izdüşümleri, barisantrik karmaşık sayılar olup, biri diğerinin üçlü eşleniğidir. Terslerini çarpalım.

(169) $1/[(DE, J_1J_2J_3)_1 (DE, J_1J_2J_3)_2] = (x_1 + jx_2 + kx_3)^2/[(x_1 + kx_2 + jx_3)(x_1 + x_2 + x_3)]$

$1/[(DE, J_1J_2J_3)_1 (DE, J_1J_2J_3)_2]^{1/3} = (x_1 + jx_2 + kx_3)/(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 – 3x_1x_2x_3)^{1/3}$

olur. İkinci yanın pay ve paydası $x_1 + jx_2 + kx_3$ ile çarpılmıştır. Bu değer uzayda bir düzlem üzerindeki açının ölçüsüdür. Buna EOD açısının **görel değeri** denilecektir.

$\mathbf{j}\alpha = – 1/3\mathrm{Ln}(DE, J_1J_2J_3)_1, \qquad \mathbf{k}\beta = – 1/3\mathrm{Ln}(DE, J_1J_2J_3)_2$

Uzayda Lagurre formülünün karşıtıdır. (169)'un ikinci denkleminde ikinci yan, mutlak değeri birim olan bir karmaşık sayıdır. Birinci yandaki çarpanların çarpımının mutlak değeri birim olması için, ya çarpanların mutlak değeri birim olmalı, ya da biri diğerinin tersi olmalıdır. Buradaki çarpanlar , biri diğerinin tersi değildir. Mutlak değerleri birim olan karmaşık sayıların, logaritmaları sanal argüman olacağından, **j** ve **k** çarpanları gelmiştir.

Bir barisantrik karmaşık sayı, iki bağımsız değişkene bağlıdır. Uzayda bir düzlem açı iki bağımsız değişkene bağlıdır. Uzayda bir düzlem açı, bir doğrusu Ox ekseni olan açı, kendi büyüklüğü ve xOy düzlemi ile oluşan iki düzlemli açının fonksiyonudur. Burada α ve β değişkenleri göz önüne alınacaktır. α, kübik yüzeyin birinci açı eğrisi üzerinde, A(1,0,0) noktasından başlayıp, sağdan sola doğru, matematik dönme yönünüde dönerek, çizilen yayın göreceli ölçüsüdür. β ise, bunun tersinde dönen ve x ekseninden geçen, açıortay düzlemi üzerinde, diğeri ile kesişen, açı eğrisi üzerinde çizilen, yayın göreceli ölçüsüdür.

(167)de dik koordinatlar yerine sanal koordinatlar alınıp, (168) de yerine konulursa,

(170) $(DE, J_1J_2J_3)_1 = b_2/b_1$, $(DE, J_1J_2J_3)_2 = b_3/b_1$,

$$1/[(DE, J_1J_2J_3)_1\ (DE, J_1J_2J_3)_2]^{1/3} = b_1/(b_1b_2b_3)^{1/3}$$

olur. (169)'un ikinci denkleminin ikinci yanı, trigonometrik oranların tanımıdır.

(171) $d = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3)^{1/3}$, $T_1(\alpha) = x_1/d$, $T_2(\alpha) = x_2/d$, $T_3(\alpha) = x_3/d$

Trigonometrik oranlar bir α argümanına bağlı olup, açı eğrisi üzerindeki noktalar için geçerlidir. Benzer biçimde,

(172) $T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = x_1/d$, $T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = x_2/d$, $T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = x_3/d$

Trigonometrik oranlar α ve β argümanlarına bağlı olup, birim kübik yüzeyin bütün noktalarında geçerlidir. Bu tanımlar yalnız uzayda geçerlidir. Çünkü iki parametreye bağlıdır.

(161) formülünün birincisinden, uzayda EOD göreceli açısının argümanı,

$$\alpha = \mathrm{Ln}[(x_1 + x_2 + x_3) /d]$$

dir. Burada üç tane trigonometrik oran bir α parametresine bağlanmıştır. Bu üç trigonometrik oran arasında iki bağıntı olmalıdır. Bunlar (163) ve (164) ile verilen bağıntılardır. Trigonometrik oranların üstel fonksiyonun serileri ile tanımı , (171) oranları ile uygun olması için, noktanın açı eğrisi üzerinde seçilmesi, yani (163) ve (164) nin sağlanması gerekir. Türdeş olmayan parametrelerle ifade edilirse, üçlü oranlar ayrı, ayrı bir parametreye bağlıdırlar. (170)'in ikinci denklemi, iki parametreye bağlı olur. O halde (170) in ikinci satırı, iki değişkenli trigonometrik oranlarla ifade edilmelidir. (158) ve (172) den,

$$e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} = T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$$

$$= (x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3)/(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3)^{1/3}$$

(173) $$e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta} = 1/[(DE, J_1J_2J_3)_1\ (DE, J_1J_2J_3)_2]^{1/3}$$

olur. Buradan logaritma alınarak, α ve β argümanları bulunur. (Laguerre formülü, karşıtı)

α ve β Argümanlarının Hesabı :

(168)'in terslerini alalım. Barisantrik karmaşık sayıyı üstel fonksiyonla ifade etmek istiyoruz. Öklid düzleminde olduğu gibi, terslerinin küp kökünün logaritmasına, birincisinde, α, **birinci argüman**, ikincisinde β, **ikinci argüman** adları verilecektir. (168)'in tersleri çarpımının, küp kökünün logaritmasına da, $\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta$, barisantrik karmaşık sayının **argümanı** adı verilecektir.

(174) $$1/(DE, J_1J_2J_3)_1 = (x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3)/(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$1/(DE, J_1J_2J_3)_2 = (x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3)/(x_1 + \mathbf{k}x_2 + \mathbf{j}x_3)$$

$$1/[(DE, J_1J_2J_3)_1(DE, J_1J_2J_3)_2]^{1/3} = (x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3)/(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3)^{1/3}$$

Barisantrik karmaşık sayıyı üstel fonksiyon olarak yazmak için, bunların logaritması alınacaktır. Logaritmanın belirlenmesi için, logaritma, Ln(1+x) serisi gibi, seriye açılmalıdır. Logaritma içinde üç terim geleceğinden, seri ıraksak gelir. Yakınsak bir seriye dönüştürülemez. Bu nedenle dik koordinatlara geçilecektir.

(175) $\rho x'_1 = x_1 + 2x_2$, $\rho x'_2 = x_1 - x_2 + \sqrt{3}x_3$, $\rho x'_3 = x_1 - x_2 - \sqrt{3}x_3$

$$x_2 = x_2/x_1 = (2x'_1 - x'_2 - x'_3)/[2(x'_1 + x'_2 + x'_3)],\quad x_3 = x_3/x_1 = \sqrt{3}(x'_2 - x'_3)/[2(x'_1 + x'_2 + x'_3)]$$

Üslüler düzlemde barisantrik, üssüzler dik ve türdeş koordinatlardır. Sonsuzdaki düzlem üzerinde barisantrik ve dik koordinatlar arasındaki dönüşüm denklemleri ile,

(176) $$(x'_1 + jx'_2 + kx'_3)/(x'_1 + x'_2 + x'_3) = x_2 + ix_3 = r\,e^{i\varphi},$$

$$r^2 = (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 - x'_1x'_2 - x'_2x'_3 - x'_3x'_1)/(x'_1 + x'_2 + x'_3)^2$$

$$(x'_1 + jx'_2 + kx'_3)/(x'_1 + kx'_2 + jx'_3) = (x_2 + ix_3)/(x_2 - ix_3) = e^{2i\varphi},$$

$$\varphi = \mathrm{Arctg}[\sqrt{3}(x'_2 - x'_3)/(2x'_1 - x'_2 - x'_3)] + k\pi$$

kutupsal koordinatlarda r kutupsal yarıçap ve φ kutup açısı hesaplanır. Bir ve üçüncü denklemlerin çarpımını, birincinin payı ile genişletir, küp kökünü alırsak, barisantrik karmaşık sayının birim vektörünü buluruz.

(177) $$(x'_1 + \mathbf{j}x'_2 + \mathbf{k}x'_3)/(x'^3_1 + x'^3_2 + x'^3_3 - 3x'_1x'_2x'_3)^{1/3} = e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta} = e^{1/3\,\mathrm{Ln}\,r + i\varphi}$$

eşitliği yazılır. Yukarda verilen üçlü oranlar, sonsuzdaki düzlem üzerindedir. Barisantrik karmaşık sayı, bu düzlem üzerindedir. (177)'nin logaritmasına, barisantrik karmaşık sayının **argümanı** denilecektir. Birinci yan barisantrik karmaşık sayının birim vektörü olup, trigonometrik oranların tanımıdır. Açıortay sonsuzdaki düzlemde barisantrik koordinat üçgeninin ağırlık merkezinden geçer. Açıortayla Ox ekseninin belirlediği düzlemin, sonsuzdaki düzlemle arakesiti, sonsuzdaki karmaşık düzlemin gerçel eksenidir. Sonsuzdaki düzlem üzerinde buna dik olan doğru da sanal eksendir. φ açısı, OM doğrusu ve açıortayın belirlediği düzlemle, açıortay ve Ox ekseninin belirlediği düzlemin, ölçek açısıdır. r ise, sonsuzdaki düzlem üzerinde, OM doğrusunun sonsuzdaki düzlemi deldiği noktanın, B(0, 1, 1, 1) başlangıç noktasına uzaklığıdır. Bu karmaşık sayı sonsuzdaki düzlem üzerinde alınacaktır. Yazılımda bu anlam görülmüyor. Bu nedenle sözle ifade etmek gerekir. $e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta}$ da buna gerek yoktur. Çünkü bu ifade barisantrik karmaşık sayıdır. Barisantrik koordinat sistemi sonsuzdaki koordinat üçgenidir. Her iki tarafın üsleri eşitlenmiştir.

(178) $$T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta} = e^{1/3\mathrm{Ln}\, r + i\varphi},$$

$$-(\alpha + \beta)/2 + \sqrt{3}\, i(\alpha - \beta)/2 = 1/3\ \mathrm{Ln}\, r + i\varphi + 2k\pi\, i, \qquad (\alpha + \beta)/2 = -1/3\ \mathrm{Ln}\, r$$

$$(\alpha - \beta)/2 = (\varphi + 2k\pi)/\sqrt{3}$$

$$\alpha = (\varphi + 2k\pi)/\sqrt{3} - 1/3\ \mathrm{Ln}\, r, \qquad \beta = -(\varphi + 2k\pi)/\sqrt{3} - 1/3\ \mathrm{Ln}\, r$$

k ya 0, 1, 2 değerleri verilerek üç tane kök bulunur. Yukarda bir noktanın barisantrik koordinatlarının bir açı belirlemesi için, (163) ve (164) denklemlerinin sağlanması gerektiğine, yani noktanın açı eğrisi üzerinde olması gerektiğine işaret edilmişti. İki bileşenli trigonometrik oranlar için, (163) koşulu kalkmıştır. Yalnız (164) koşulu, yani noktanın birim kübik yüzey üzerinde bulunması yeterlidir. Birim kübik yüzeyin her noktasına, bir tane iki bileşenli açı karşılık gelir.

Moivre formülü, barisantrik karmaşık sayılarda ve uzayda dik koordinatlarda da, geçerlidir. Kök ve kuvvet işlemlerinde α ve β argümanlarını, işlem üssü ile çarpmak veya bölmek suretiyle, bu işlemler gerçekleştirilir. Uygulaması Borlad Pascal programı 3 ile verilmiştir. Yukarda yapılan işlemde, dik koordinatlar α ve β argümanlarının hesabında parametre olarak yer almıştır.

α ve β göreceli açıları, sonsuzdaki düzlem üzerinde ölçülmüşlerdir. **j** ve **k** katsayıları sonsuzdaki düzlemin birim vektörleridir. Bu nedenle 1 in düzlemsel küp kökleridirler. Burada düzlem birim vektörlerinin özeliklerine sahiptir. Yani toplamları –1 dir.

(179) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, veya (178) nedeni ile, $r = 1$, $\varphi = 0$ için trigonometrik oranlar,

$$T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 1, \qquad T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0, \qquad T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0$$

$\alpha = 1{,}2091995762$, $\beta = -1{,}2091995762$, veya, $r = 1$, $\varphi = 2\pi/3 = 2{,}0943951024$

$$T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0, \qquad T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 1, \qquad T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0$$

$\alpha = -1{,}2091995762$, $\beta = 1{,}2091995762$, veya, $r = 1$, $\varphi = -2\pi/3 = -2.0943951024$

$$T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0, \qquad T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0, \qquad T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 1,$$

$\alpha = 2{,}4183991523$, $\beta = -2{,}4183991523$, veya $r = 1$, $\varphi = 4\pi/3 = 4{,}1887902048$

$$T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0, \qquad T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0, \qquad T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 1$$

$\alpha = -2{,}4183991523$, $\beta = 2{,}4183991523$, veya $r = 1$, $\varphi = -4\pi/3 = -4{,}1887902048$

$$T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0, \qquad T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 1, \qquad T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0$$

değerlerini alırlar. Trigonometrik oranların bulunması ile ilgili bir program, Borland Pascal ile, program 4 de kitabın sonunda verilmiştir.

İç Orta ve Dış çarpımlar

Önce iç ve dış çarpımların tanımlarını düzlemde yapalım. Karmaşık düzlemde,

$$\mathbf{d} = d_1 + id_2, \quad d^2 = d_1^2 + d_2^2, \quad \mathbf{e} = e_1 + ie_2, \quad e^2 = e_1^2 + e_2^2, \quad D_\infty(d_1, d_2), \quad E_\infty(e_1, e_2)$$

karmaşık sayılarını göz önüne alalım. D_∞, E_∞ noktaları, bu doğruların sonsuzdaki noktalarıdır. Bu vektörlerin bileşenleri, sonsuzdaki noktalarının, sonsuzdaki koordinat doğrusuna göre, barisantrik koordinatlarıdır. Düzlemde izotrop doğrular,

$$x_1 + ix_2 = 0, \qquad x_1 - ix_2 = 0$$

dır. Bu doğrular sonsuzdaki izotrop noktalardan geçerler. Bileşenleri sonsuzdaki izotrop noktaların sonsuzdaki doğruya göre, barisantrik koordinatlarıdır.

$$J_1(1, i), \qquad J_2(1, -i)$$

Sonsuzdaki doğruya göre, bir boyutlu uzay için, izotrop noktaların afin ve barisantrik koordinatları işaret farkı ile aynıdır. Dört noktanın çifte oranı ile Laguerre formülünü yazalım.

$$(D_\infty E_\infty, J_1J_2) = [(id_1 - d_2)/(-id_1 - d_2)] : [(ie_1 - e_2)/(-ie_1 - e_2)]$$

Pay, paydalarla genişletilirse,

$$(D_\infty E_\infty, J_1J_2) = [(d_1^2 + d_2^2)/(d_1 + id_2)^2] : [(e_1^2 + e_2^2)/(e_1 + ie_2)^2]$$

Tersleri çevrilir ve kare kökü alınırsa,

$$1/(D_\infty E_\infty, J_1J_2)^{1/2} = [(d_1 + id_2)/d] : [(e_1 + ie_2)/e] = [(d_1 + id_2)e]/[(e_1 + ie_2)d]$$

bulunur. İki karmaşık sayının bölümüdür. Aynı zamanda mutlak değerleri birim olduğundan, birinci terimler kosinis, ikinci terimler sinüs fonksiyonlarıdır. Bu iki karmaşık sayının bölümü için, paydanın eşleniği ile genişletilir. Kısaltmalar yapılırsa,

$$1/(D_\infty E_\infty, J_1J_2)^{1/2} = [(d_1e_1 + d_2e_2) + i(d_2e_1 - d_1e_2)]/(de)$$

olur. Birinci yan Laguerre formülü nedeni ile karmaşık sayıların argümanları farkıdır.

$$\omega = \alpha - \beta, \quad e^{i\omega} = \mathrm{Cos}\,\omega + i\mathrm{Sin}\,\omega = [d_1e_1 + d_2e_2 + i(d_2e_1 - d_1e_2)]/(de)$$

İç ve dış çarpımlar sıra ile,

$$\mathbf{d.e} = d_1e_1 + d_2e_2 = d\,e\,\mathrm{Cos}\,\omega, \qquad \mathbf{d \Lambda e} = d_2e_1 - d_1e_2 = d\,e\,\mathrm{Sin}\,\omega$$

dir. **d** ve **e** karmaşık sayıları bu son formülde gerçel vektörlerdir. Çünkü yukarda karmaşık sayı olarak alınmış ve karmaşık sayıların bölümünde, argümanların farkı alındığından, işlem Laguerre formülü ile kolayca yapılmıştır. Bulunan sonuç gerçel vektörlerin iç ve dış çarpımları olarak tanımlanmıştır. Birinci, yer değişmeli, ikinci, yer değişmeli değildir.

Başka bir anlatımla,

$$\mathrm{Cos}(\alpha - \beta) = \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}\beta, \qquad \mathrm{Sin}(\alpha - \beta) = \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta - \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sin}\beta$$

$$\mathrm{Cos}\alpha = d_1/d, \quad \mathrm{Cos}\beta = e_1/e, \quad \mathrm{Sin}\alpha = d_2/d, \quad \mathrm{Sin}\beta = e_2/e, \quad \alpha - \beta = \omega$$

değerleri uygun biçimde yerleştirilirse, aynı sonuçlar bulunur.

Üç boyutlu karmaşık uzayda **d** ve **e** karmaşık sayılarını göz önüne alalım.

$$\mathbf{d} = d_1 + \mathbf{j}d_2 + \mathbf{k}d_3, \qquad \mathbf{e} = e_1 + \mathbf{j}e_2 + \mathbf{k}e_3,$$

$$|\mathbf{d}|^3 = d^3 = d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 - 3\,d_1\,d_2\,d_3, \qquad |\mathbf{e}|^3 = e^3 = e_1^3 + e_2^3 + e_3^3 - 3\,e_1\,e_2\,e_3$$

olsunlar. Bu karmaşık sayıların bileşenleri, sonsuzdaki düzlemi deldiği noktalarının sonsuzdaki düzleme göre barisantrik koordinatlarıdır.Bir önceki paragrafta, (174) formülünde D ve E noktaları yerine, sonsuzdaki düzlem üzerinde, $D(d_1, d_2, d_3)$, $E(e_1, e_2, e_3)$ değerlerini koyalım ve üçlü oranları hesaplayalım.

(180) $(DE, J_1J_2J_3)_1 = [(d_1 + d_2 + d_3)/(d_1 + \mathbf{j}d_2 + \mathbf{k}d_3)] : [(e_1 + e_2 + e_3)/(e_1 + \mathbf{j}e_2 + \mathbf{k}e_3)]$

$(DE, J_1J_2J_3)_2 = [(d_1 + \mathbf{k}d_2 + \mathbf{j}d_3)/(d_1 + \mathbf{j}d_2 + \mathbf{k}d_3)] : [(e_1 + \mathbf{k}e_2 + \mathbf{j}e_3)/(e_1 + \mathbf{j}e_2 + \mathbf{k}e_3)]$

Bu iki üçlü oranı taraf tarafa çarpalım ve birinci köşeliyi $d_1 + \mathbf{j}d_2 + \mathbf{k}d_3$, ikinci köşeliyi $e_1 + \mathbf{j}e_2 + \mathbf{k}e_3$ ile genişletelim. Sonra ters çevirip, küp kökünü alalım.

$$1/[(DE, J_1J_2J_3)_1\,(DE, J_1J_2J_3)_2]^{1/3} = [(d_1 + \mathbf{j}d_2 + \mathbf{k}d_3)/d] : [(e_1 + \mathbf{j}e_2 + \mathbf{k}e_3)/e]$$

bulunur. İkinci köşeli içindeki karmaşık sayıya bölmek için, (45) deki tersi ile çarpılır. Yuvarlak parantez içindeki karmaşık sayılar, mutlak değerleri birim olduğundan, trigonometrik oranlardır. Buradaki mutlak değerler (45) de ifade edilen, göreceli mutlak değerdir. Uzayda bir karmaşık sayının **argümanı** diye, x, y, z koordinat eksenlerinin açıortayının Ox ile ve karmaşık sayı doğrultusu ile, oluşturduğu düzlemlerin ölçek açısına denilir. Bu açı (178) de φ ile gösterildi. (173) den görüleceği gibi, birinci tarafın logaritması, ikinci yandaki bölümün argümanıdır. Yani iki karmaşık sayının bölümünün argümanı, argümanlarının farkına eşittir. D nin ve E nin argümanları sıra ile,

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{j}\alpha_1 + \mathbf{k}\beta_1, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{j}\alpha_2 + \mathbf{k}\beta_2, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2$$

olsun. Mutlak değer 1 olduğundan, paydada yazılmamıştır.

$$e^{\boldsymbol{\omega}} = T_1(\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{j}T_2(\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{k}T_3(\boldsymbol{\omega}) = [(d_1 + \mathbf{j}d_2 + \mathbf{k}d_3)/d]\{[(e_1^2 - e_2e_3) + \mathbf{j}(e_3^2 - e_1e_2) + \mathbf{k}(e_2^2 - e_1e_3)]/e^2\}$$

$$T_1(\boldsymbol{\omega}) = (d_1e_1^2 + d_2e_2^2 + d_3e_3^2 - d_1e_2e_3 - d_2e_1e_3 - d_3e_1e_2)/(d.e^2),$$

$$T_2(\boldsymbol{\omega}) = (d_1e_3^2 + d_2e_1^2 + d_3e_2^2 - d_1e_1e_2 - d_2e_2e_3 - d_3e_1e_3)/(d.e^2),$$

$$T_3(\boldsymbol{\omega}) = (d_1e_2^2 + d_2e_3^2 + d_3e_1^2 - d_1e_1e_3 - d_2e_1e_2 - d_3e_2e_3)/(d.e^2)$$

olur. iç, orta ve dış çarpımlar sıra ile,

(181) $\mathbf{d.e} = d.e^2\, T_1(\boldsymbol{\omega}) = d_1(e_1^2 - e_2e_3) + d_2(e_2^2 - e_1e_3) + d_3(e_3^2 - e_1e_2)$,

$\mathbf{d_o e} = d.e^2\, T_2(\boldsymbol{\omega}) = d_1(e_3^2 - e_1e_2) + d_2(e_1^2 - e_2e_3) + d_3(e_2^2 - e_1e_3)$

$\mathbf{d\Lambda e} = d.e^2\, T_3(\boldsymbol{\omega}) = d_1(e_2^2 - e_1e_3) + d_2(e_3^2 - e_1e_2) + d_3(e_1^2 - e_2e_3)$

dır. Son formülde **d** ve $\mathbf{e}^{-}$ gerçel uzayın vektörleridir. Halbuki yukardakiler, karmaşık sayılardır. Önce formül karmaşık sayılarla çıkarılıp, sonucu gerçel uzayın vektörleri ile, iç, orta ve dış çarpımların, tanımları olarak konulmuştur. Karmaşık sayıların bölümü alındı. Çünkü iki vektör arasındaki açı, karmaşık sayıların argümanları farkıdır. (179)'dan vektörler paralelse, orta ve dış çarpımlar sıfır, vektörlerin argümanları farkı $2\pi/3$ ise, iç ve dış çarpımlar sıfır, $4\pi/3$ ise, iç ve orta çarpımlar sıfır, $-2\pi/3$ ise, iç ve orta çarpımlar sıfır, $-4\pi/3$ ise, iç ve dış çarpımlar sıfırdır. x, y, z eksenlerinin, sonsuzdaki birim çemberi deldiği noktaların argümanları sıra ile 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$ dür. Uzayda bu eksenler birbirlerine diktirler. Ancak sonsuzdaki düzlem üzerindeki noktalarının argümanları farkı değişik olduğundan, çarpım durumları (179)'dan görüleceği gibi değişiktir. Uzayda dik doğrular iki değişik biçimde bulunabilirler. Birinci tür dik doğrular, sonsuzdaki noktalarının argümanları farkı $2\pi/3$ olan dik doğrulardır. İkinci tür dik doğrular, sonsuzdaki düzlemi deldiği noktaların argümanları farkı $4\pi/3$ olan dik doğrulardır. Dik koordinatların Oy ekseni Ox eksenine birinci tür dik doğrudur. Oz ekseni Ox eksenine ikinci tür dik doğrudur. Her iki dik doğrular için, çarpımlar değişik değerler almaktadır. Çarpımlar yer değişmeli değildir. (179) incelendiği zaman, 2π radyanlık bir peryodu olduğu görülür. Vektörlerin argümanları farkı, pozitif veya negatif , 2π radyanlık farklı değerler aldığında, iç, orta ve dış çarpımlar değişmez.

Bu işlemleri gerçel uzayda da yaparak, çarpım işlemleri tanımlayabiliriz. Bir değişkenli trigonometrik fonksiyonlarda, (159) ve (160) formülleri ile verilen iki açının toplam ve farkının trigonmetrik oranları, iki değişkenli trigonometrik oranlar için de geçerlidir. (160) da,

$$\alpha \to \mathbf{j}\alpha_1 + \mathbf{k}\beta_1 = \boldsymbol{\omega}_1, \qquad \beta \to \mathbf{j}\alpha_2 + \mathbf{k}\beta_2 = \boldsymbol{\omega}_2, \qquad \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}$$

$T_1(\boldsymbol{\omega}_1) = d_1/d$, $T_2(\boldsymbol{\omega}_1) = d_2/d$, $T_3(\boldsymbol{\omega}_1) = d_3/d$, $T_1(\boldsymbol{\omega}_2) = e_1/e$, $T_2(\boldsymbol{\omega}_2) = e_2/e$, $T_3(\boldsymbol{\omega}_2) = e_3/e$ değerleri uygun biçimde yerleştirilirse, aynı sonuçlar bulunur.

VII
UZAYDA KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ ve KARMAŞIK SAYILAR
Uzayda Dik Koordinatlarla Barisantrik Koordinatlar Arasında Dönüşüm

Düzgün dört yüzlü, daha önce olduğu gibi, köşeleri, $A_0(1,1,0,0)$, $A_1(3, -1, -1 + \sqrt{3}, -1- \sqrt{3})$, $A_2(3, -1, 2, 2)$, $A_3(3, -1, -1- \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$ noktalarına konulsun. Dönüşüm matrisleri S,

(182)
$$S = 1/3 \begin{matrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1+\sqrt{3} & 2 & -1-\sqrt{3} \\ 0 & -1-\sqrt{3} & 2 & -1+\sqrt{3} \end{matrix} \qquad S^{-1} = 1/4 \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \end{matrix}$$

olur. Bir M noktasının karteziyen koordinatlarının sütun matrisi $M = X[[x_0, x_1, x_2 ,x_3]]$, barisantrik koordinatlarının sütun matrisi $M = X'[[x'_0, x'_1, x'_2, x'_3]]$, olsun.

(183) $$X = S\, X', \qquad X' = S^{-1} X$$

$x'_0 = (x_0 + 3x_1)/4$ $\qquad x_0 = x'_0 + x'_1 + x'_2 + x'_3$

$x'_1 = [x_0 - x_1, + (-1 + \sqrt{3})x_2 - (1 + \sqrt{3})x_3]/4$ $\qquad x_1 = (3x'_0 - x'_1 - x'_2 - x'_3)/3$

$x'_2 = (x_0 - x_1 + 2x_2 + 2x_3)/4$ $\qquad x_2 = [(-1 + \sqrt{3})\, x'_1 + 2x'_2 - (1 + \sqrt{3})x'_3]/3$

$x'_3 = [x_0 - x_1 - (1 + \sqrt{3})x_2 + (-1 + \sqrt{3})x_3]/4$ $\qquad x_3 = [-(1 + \sqrt{3})\, x'_1, + 2x'_2 + (-1 + \sqrt{3})x'_3]/3$

$$x_1 = (3x'_0 - x'_1 - x'_2 - x'_3) / [3(x'_0 + x'_1 + x'_2 + x'_3)]$$
$$x_2 = [(-1 + \sqrt{3})\, x'_1 + 2x'_2 - (1 + \sqrt{3})x'_3] / [3(x'_0 + x'_1 + x'_2 + x'_3)]$$
$$x_3 = [-(1 + \sqrt{3})\, x'_1, + 2x'_2 + (-1 + \sqrt{3})x'_3] / [3(x'_0 + x'_1 + x'_2 + x'_3)]$$

Üslü harfler barisantrik koordinatları, üssüz harfler de, karteziyen koordinatları gösterir.

Barisantrik ve Sanal Koordinatlar Arasında Dönüşüm

(167) den X i çekelim ve (183) de yerine koyalım. B, M noktasının sanal, A barisantrik

koordinatlardır.

(184) $X = T\,B, \qquad A = S^{-1}\,T\,B, \qquad B = T^{-1}\,S\,A$

$$S^{-1}T = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e_3 & e_2 & e_1 \\ 1 & e_2 & 1 & e_2 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \qquad T^{-1}S = 1/4 \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & e_2 & 1 & e_2 \\ 1 & e_3 & e_2 & e_1 \end{matrix}$$

olur. 1 in dördüncü kökleri 1, e_1, e_2, e_3 ile gösterilmiştir. Bunlar vektör değildir, sayıdır.

Uzayda Vektörler Arasında Dönüşüm

Başlangıcı, A_0, A_1, A_2, A_3 düzgün dörtyüzlüsünün, köşelerine birleştiren vektörler ile, dik koordinat sisteminin **1**, **j**, **k** vektörleri arasında dönüşüm kuralım. Düzgün dörtyüzlünün köşelerinin koordinatlarından ve tersine çözüm ile,

(185)
$$\mathbf{e}_1 = -1/3 + (-1 + \sqrt{3})/3\,\mathbf{j} - (1 + \sqrt{3})/3\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_2 = -1/3 + 2/3\,\mathbf{j} + 2/3\,\mathbf{k}, \qquad .$$
$$\mathbf{e}_3 = -1/3 - (1 + \sqrt{3})/3\,\mathbf{j} + (-1 + \sqrt{3})/3\,\mathbf{k}$$

(186)
$$\mathbf{1} = -(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$
$$\mathbf{j} = (-1 + \sqrt{3})/4\,\mathbf{e}_1 + 1/2\,\mathbf{e}_2 - (1 + \sqrt{3})/4\,\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{k} = -(1 + \sqrt{3})/4\,\mathbf{e}_1 + 1/2\,\mathbf{e}_2 + (-1 + \sqrt{3})/4\,\mathbf{e}_3$$

formülleri bulunur.

Uzayda Noktaların Matrisle Gösterilimi

Düzlemde olduğu gibi, uzayda da noktalar matrisle gösterilebilir. Uzayda, birim matrisin dördüncü kökleri olan, matrisler şunlardır.

.

(187)
$$P_1 = \begin{matrix} 0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0 \end{matrix} \quad Q_1 = \begin{matrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{matrix} \quad R_1 = \begin{matrix} 0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0 \end{matrix}$$

$$P_2 = \begin{matrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0 \end{matrix} \quad Q_2 = \begin{matrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{matrix} \quad R_2 = \begin{matrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{matrix}$$

$$P_3 = \begin{matrix} 0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{matrix} \quad Q_3 = \begin{matrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{matrix} \quad R_3 = \begin{matrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0 \end{matrix}$$

Q_i ve R_i'ler, P_i'lerin kuvvetleridir. Dördüncü kuvvet birim matristir. I birim matris ve M(a, b, c, d), M noktasının barisantrik koordinatları olduğuna göre,

(188) $$M = aI + dP_3 + cQ_3 + bR_3$$

doğrusal toplamı ile belirlenen matrislere, **sayı matrisi** denilecektir. İndisler diğerleri de olabilir. Bir sayı matrisinin O(1,0,0,0) başlangıç noktasını, dönüştürdüğü noktaya, **matrisin noktası** ve matrise de, sözü geçen noktanın **sayı matrisi** denilecektir.

(189)
$$M = \begin{matrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{matrix}$$

Matrisi sayı matrisidir. Düzlemde olduğu gibi, sayı matrisleri gurubu, uzayın karmaşık sayılar gurubuna izomorftur. M matrisinin determinantını inceleyelim. (184) de $T^{-1}S$ matrisi ile barisantrik koordinatlardan, sanal koordinatlara geçelim.

$b_0 = a + b + c + d$, $b_1 = a + be_1 + ce_2 + de_3$, $b_2 = a + be_2 + c + de_2$, $b_3 = a + be_3 + ce_2 + de_1$

Sanal koordinatlar, noktanın karmaşık sayı karşılığıdır.

(190) $\mathbf{r} = (a + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_3)/(a + b + c + d)$

vektörüne uzayda **barisantrik karmaşık sayı** denilecektir. Diğer koordinatlar bunun eşlenikleridirler.

Uzayda $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vektörleri doğrusal bağımsız olup, uzayın bir noktası, bu üç vektörün doğrusal toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\mathbf{OM} = u\mathbf{e_1} + v\mathbf{e_2} + w\mathbf{e_3}$$

Vektörel eşitliği ile tanımlanan, M noktasının barisantrik koordinatlarını bulalım. M noktasının sanal koordinatları, **OM** nin eşlenikleridir. (184) ün ikinci matrisinden,

$$M(1,\ ue_1 + ve_2 + we_3,\ \ ue_2 + v + we_2,\ ue_3 + ve_2 + we_1)$$

olur. (184) ün birinci formülünden, M noktasının barisantrik koordinatları,

$$M(1 + ue_1 + ve_2 + we_3 + ue_2 + v + we_2 + ue_3 + ve_2 + we_1,\quad 1 + ue_2 + ve_3 + w + u + ve_2 + w + ue_2 + ve_1 + w,\quad 1 + ue_3 + v + we_1 + ue_2 + v + we_2 + ue_1 + v + we_3,\quad 1 + u + ve_1 + we_2 + u + ve_2 + w + u + ve_3 + we_2)$$

dır. 1'in dördüncü köklerinin toplamı sıfırdır. Bir noktanın koordinatları sayılardır. M noktasının sanal ve barisantrik koordinatlarında görülen e_i'ler, 1 in dördüncü kökleri olup, 1, i, –1, – i anlamındadırlar. Aynı zamanda vektör olarak da kullanılacağından e_i olarak yazılmıştır. **OM** vektörünün ifadesindeki $\mathbf{e}_i$'ler, hem 1'in dördüncü kökleri ve hem de vektördürler. M'nin barisantrik koordinatları kısaltılır ve M(a, b, c, d) ile karşılaştırılırsa,

(191) $a = 1 – u – v – w, \quad b = 1 – u – v + 3w, \quad c = 1 – u + 3v – w, \quad d = 1 + 3u – v – w$

bulunur. (189) da M matrisinin satırlarını, birinci satıra ekleyip, birinci satırın son üç terimi sıfırlanırsa,

$$|M| = (a + b + c + d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & a – d & b – d & c – d \\ c & d – c & a – c & b – c \\ b & c – b & d – b & a – b \end{vmatrix}$$

bulunur. a, b, c, d yerlerine (191)'den değerlerini koyup, kısaltmaları yapalım.

$a – d = – 4u,\ \ b – d = 4(– u + w),\ \ c - d = 4(– u + v),\ \ d – c = 4(u – v),\ \ a – c = – 4v,$
$b – c = 4(– v + w),\ \ c – b = 4(v – w),\ \ d – b = 4(u – w),\ \ a – b = – 4w,\ \ a + b + c + d = 4,$

(192) $|M| = 256 [– u^3 + v^3 – w^3 + u^2(v + w) – v^2(u + w) + w^2(u + v) – 2uvw]$

(165) den yararlanarak, **OM** vektörü, dik koordinatlarda yazılırsa,.

$$\mathbf{OM} = u[–\mathbf{1}/3 + (–1 + \sqrt{3})/3\mathbf{j} – (1 + \sqrt{3})/3\mathbf{k}] + v[–\mathbf{1}/3 + 2/3\,\mathbf{j} + 2/3\mathbf{k}] + w[–\mathbf{1}/3 – (1 + \sqrt{3})/3\mathbf{j} + (–1+\sqrt{3})/3\mathbf{k}]$$

olur. M noktasının dik koordinatları $M(x_1, x_2, x_3)$ olsun.

$$x_1 = – 1/3(u + v + w),\quad x_2 = (–1 + \sqrt{3})u/3 + 2/3\,v – (1 + \sqrt{3})w/3,$$
$$x_3 = – (1 + \sqrt{3})u/3 + 2/3\,v + (–1 + \sqrt{3})w/3$$

u, v, w bilinmeyenlerini çözelim.

(193) $u = – x_1 + (–1 + \sqrt{3})x_2/4 – (1 + \sqrt{3})x_3/4, \qquad v = – x_1 + x_2/2 + x_3/2,$

. $w = – x_1 – (1 + \sqrt{3})x_2/4 + (– 1 + \sqrt{3})x_3/4$

|M| determinantı barisantrik koordinatları ile açılırsa,

(194) $|M| = a^4 – b^4 + c^4 – d^4 + 4(– a^2bd + ab^2c – bc^2d + acd^2) + 2(– a^2c^2 + b^2d^2)$

bulunur. Bunun üzerinde bu aşamada yorum yapmamız olanaksızdır. İlerde bu ifadenin yorumu yapılacaktır. Noktanın dik koordinatlarına geçelim. |M| determinantı, (192) de parametrelerine göre çarpanlara ayrılırsa,

(195). $|M| = 256(– u + v – w)[(u – w)^2 + v^2] = (– u + v – w)(u + iv – w)(u – iv – w)$ olur.

(193) yardımı ile, dik koordinatlara geçilir, i parantezine alınır ve $i = (j – k)/\sqrt{3}$ konulursa,

(196) $|M| = 256\, i\, (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + jx_2 + kx_3)(x_1 + kx_2 + jx_3)$

bulunur. Determinant dördüncü dereceden olduğu için, karakteristik denklemi dördüncü dereceden gelmelidir. Fakat parametreler problemin doğasına uygun seçildiğinden, |M| nin hesabında barisantrik koordinatların toplamı, determinantın bir çarpanı olup, sabit gelmiş ve denklem, üçüncü dereceye inmiştir. Bu özelik analitik geometride sıkça görülür. İkinci dereceden bir denklemin, ikinci dereceden teriminin katsayısı sıfır olursa, bir kök sonsuz olur. İkinci derece kök formülünde, a = 0 konulursa, bu özelik görülür. Determinant ifadesini dördüncü derece kılmak için, türdeş koordinatlara geçilmelidir. x_i yerine x_i/x_0 konulur ve determinantın mertebesi 4 olduğundan, x_0^4 ile çarpılırsa,

$$|M| = 256\, x_0(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + jx_2 + kx_3)(x_1 + kx_2 + jx_3)$$

olur. Sayı matrisinin determinantı çarpanlarına ayrılmıştır.

Bir noktanın veya sayının matrisi düzgün ise, **düzgün sayı** veya **nokta,** matrisi düzgün olmayan sayı ve noktalara, **düzgün olmayan sayı** veya **noktalar** denilecektir. Çarpanların her birisi, bir düzlem gösterir. Bu düzlemlere **izotrop düzlemler**, dört düzlemin oluşturduğu dörtyüzlüye **izotrop dörtyüzlü,** dörtyüzlünün ayrıtlarına **izotrop doğrular** ve köşelerine de **izotrop noktalar** denilecektir.

Determinantı sıfırdan farklı kılan, düzgün nokta veya sayılar, izotrop düzlemlerin üzerinde bulunmazlar. Bunların rangı 4 dür. Düzgün olmayan sayı ve noktalar, izotrop düzlemler üzerinde ise, rangı 3, izotrop doğrular üzerinde ise, rangı 2, izotrop noktalarda ise, rangı 1 dir. Determinantın birinci çarpanı sıfır olursa, sonsuzdaki düzlem bulunur. Birinci ve ikinci düzlemler gerçel, diğer ikisi sanaldır. Düzgün olmayan nokta ve sayılar üzerinde işlem yapılamaz ve karmaşık sayı tanımlanamaz. Düzgün olmayan sayılar kümesi, cisim ve gurup oluşturmaz.

Sanal düzlemlerin arakesiti gerçel olup, birinci 1/8'lik uzay diliminin açıortayıdır. Bu doğru izotrop doğrudur.

(197) $$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

noktaları bu doğru üzerinde bulunurlar. **ε** şiddeti sıfır olan bir vektördür. Çünkü izotrop doğru üzerindedir. İzotrop doğru üzerinde bulunan, doğru parçalarının uzunluğu sıfırdır. **ε** vektörü p ile çarpılırsa, gene bu doğru üzerinde bir vektör bulunur. Bunların hepsinin şiddeti sıfırdır. Fakat yerleri farklıdır. **ε** vektörünün mutlak değeri sıfır, fakat doğrultusu ve yönü olan bir vektör olduğundan, kendisi sıfır değildir. Düzlemdeki izotrop doğrular da aynı özeliklere sahiptirler. Bu noktalar düzgün nokta olmadıklarından, bunlar için karmaşık sayı tanımlanamaz. (197) eşitliğinin birinci yanı p ile çarpılırsa, birbirinden farklı sonsuz tane sıfır bulunur. Nokta sayısı sonsuz fakat sayı karşılığı bir tane olup, sıfırdır. **ε** sıfır vektörü olarak tanımlanmış, mutlak değeri sıfır, fakat doğrultu ve yön özelikleri ile, sonsuz nokta ifade edilmiştir. (197)'nin mutlak değeri sıfır olunca **1**, **j**, **k** birim elemanları uzayın doğrusal bağımsız vektörleri olurlar. Üçüncü derece denklemlerin çözümünde açıklanmıştı.

$$|\mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = 0$$

toplamın mutlak değeri sıfır olacak, fakat,

$$\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq -\mathbf{1}$$

toplamı – 1 olmayacaktır. (130) da açıklandı. Düzlemde başlangıç noktası, bir tane ve sıfır noktasıdır. $|\mathbf{1} + \mathbf{e}_2| = 0$, $|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3| = 0$ dır. Fakat **1** vektörü ile $\mathbf{e}_2$ vektörü, $\mathbf{e}_1$ vektörü ile $\mathbf{e}_3$ vektörü aynı doğrultuda değildirler. (154)'de açıklandı. Bu vektörler düzgün barisantrik koordinat dörtyüzlüsünün (Şekil 7) merkezini köşelere birleştiren vektörlerdir. Yalnız toplamlarının uç noktaları, izotrop doğru üzerindedirler. Düzlemdeki sıfır noktasının uzayda karşıtı, sözü edilen izotrop doğrudur. İzotrop doğru birinci 1/8'lik uzay diliminin açıortayıdır. Açıortay, B_2Ox_1 ve B_1OB_3 açılarının da ortayıdır. Bu açılar 180^o olmadığından, vektörlerin toplamları, sıfır değildir. $\mathbf{e}_2$ ile –1 in farkı, biri 1 e doğrusal bağımlı, diğeri 1 den doğrusal bağımsız olmasıdır. **1** ile $\mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_1$ ile $\mathbf{e}_3$ vektörlerinin toplamının mutlak değeri sıfır, fakat kendileri ayrı, ayrı 1 den ve birbirlerinden doğrusal bağımsızdırlar. Bu özelikler uzayın sanallık özelikleridir. İzotrop doğru üzerinde bulunan, iki nokta arasındaki doğru parçasının uzunluğu sıfırdır. Bu doğru parçası vektör ise, şiddeti sıfır, fakat doğrultusu ve yönü vardır.

Daha önce izotrop noktalar, koordinat sisteminin dik olması koşulu ile belirlendi ve tanımlandı. Burada koordinat sisteminin dik olması konusunda, bir koşul ve bir veri getirilmemiştir. Yalnız, doğal birim vektörlerinin yerleştirilmesi, dik koordinat sistemi içerisindeki gibi olmuştur. Sonuçta izotrop dörtyüzlü, kendiliğinden karşımıza çıkmıştır. Bu sonuç, izotrop noktaların doğallığını ve gerekliliğini gösterir.

Teorem: $\boldsymbol{\varepsilon}^n = 3^{n-1}\,\boldsymbol{\varepsilon}$

dur. Bu teoremi tümevarımla kanıtlayalım. n için doğru olsun. n + 1 için doğru olacağını gösterelim.

$$(\mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k})^n = 3^{n-1}\,(\mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

her iki tarafını **1** + **j** + **k** ile çarpalım.

$$(\mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k})^{n+1} = 3^{n-1}\,(\mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k})^2 = 3^{n-1}\,(\mathbf{1} + \mathbf{k} + \mathbf{j} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + 2\mathbf{1}) = 3^{n-1}\,3(\mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$(\mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k})^{n+1} = 3^n\,(\mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

olur. n = 1 için doğru olduğu açıktır.

Üç Boyutlu Uzayda Dik Karmaşık Sayılar

(198) $\mathbf{u} = a + \mathbf{j}b + \mathbf{k}c$

Sayısı uzayın bir karmaşık sayısıdır. Uzayda barisantrik biçim olması zorunlu değildir. Çünkü değişken sayısı boyut sayısına eşittir. a, b, c dik bileşenlerdir. **1**, Ox ekseni üzerinde **j**, Oy ekseni üzerinde, **k**, Oz ekseni üzerinde birim vektörlerdir. İşlem kuralları paralelkenar kuralı olup, düzlemin barisantrik karmaşık sayıları ile aynıdır.

Uzayda Barisantrik Karmaşık Sayılar

(199) $\mathbf{u} = (a + \mathbf{e}_1 b + \mathbf{e}_2 c + \mathbf{e}_3 d)/(a + b + c + d)$

Sayısı uzayın barisantrik karmaşık sayısıdır. Barisantrik biçim zorunludur. Çünkü değişken sayısı, boyut sayısından fazladır. **1**, Ox ekseni üzerinde, $\mathbf{e}_1$, (153) de koordinatları verilen OB_1 ekseni doğrultusunda, $\mathbf{e}_2$, OB_2 doğrultusunda, $\mathbf{e}_3$, OB_3 doğrultusunda birim vektörler olup, birin dördüncü kökleridir. İşlem kuralları, çarpımlarında birin dördüncü köklerinin kurallarıdır. Birim vektörler arasındaki bağıntı (185) ve (186) de verildi.

Trigonometrik Karmaşık Sayılar

(200) $\mathbf{u} = \rho\,[T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)]$

ρ noktanın başlangıca olan göreceli uzaklığıdır. α noktanın birinci açı eğrisi üzerinde, β ise α ikinci açı eğrisi üzerinde ayrılan yayın göreceli uzunluğudur. ve β karmaşık sayının argümanlarıdırlar.

Üstel ve Göreceli Karmaşık Sayılar

(201) $\mathbf{u} = \rho\, e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta}$

Karmaşık sayısı göreceli uzayın karmaşık sayısıdır. Değişkenlerin her üçü de göreceli büyüklüklerdir. Karmaşık sayının doğrultu vektörünün bileşenleri, (200) de verilen. trigonometrik oranlardır. Bu oranların serileri (166) de verilmiş

Üstel ve Öklidsel Karmaşık Sayılar

(202) $\mathbf{u} = \rho\, e^{\mathrm{Ln}\, r + i\varphi}$

Üstel karmaşık sayısında uzay göreceli ise, ρ göreceli uzaklık, uzay Öklidsel ise, ρ Öklidsel uzaklıktır. r ve φ sonsuzdaki düzlem üzerinde ölçülmüş olup, Öklidseldirler. Çünkü dik koordinatların sonsuzdaki koordinat üçgeni eşkenar olup, barisantrik koordinat üçgeni olarak alınmıştır. Böylece sonsuzdaki düzlemin bir sonsuzda doğrusu ve bu doğru üzerinde izotrop noktaları vardır. Sonsuzdaki düzlem artık Öklidsel düzlemdir. Sonsuzdaki karmaşık düzlemde, r $e^{i\varphi}$ karmaşık sayısının gösterdiği M noktasının barisantrik koordinatları M(a_1, a_2, a_3) olsun. (33) den,

$$\rho a_1 = x_0 + 2x_1, \quad \rho a_2 = x_0 - x_1 + \sqrt{3}x_2, \quad \rho a_3 = x_0 - x_1 - \sqrt{3}x_2$$

$$\rho a_1 = 1 + 2r\,\mathrm{Cos}\varphi, \quad \rho a_2 = 1 - r\,\mathrm{Cos}\varphi + \sqrt{3}\,r\,\mathrm{Sin}\varphi, \quad \rho a_3 = 1 - r\,\mathrm{Cos}\varphi - \sqrt{3}\,r\,\mathrm{Sin}\varphi$$

$$\mathbf{v} = (a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3)/(a^3{}_1 + a^3{}_2 + a^3{}_3 - 3\,a_1a_2\,a_3)^{1/3}, \qquad \mathbf{u} = \rho\,\mathbf{v}$$

formülü ile verilen **v** vektörü, göreceli uzayın birim vektörüdür. Bu vektör, (202) karmaşık sayısının doğrultu vektörüdür. r sonsuzdaki düzlem üzerinde olduğundan, r ile ρ gerçel sayıları birbirlerine karışmazlar. Aşağıdaki formüllerle, α ve β değişkenlerine geçilerek, doğrultu vektörü onlarla da belirlenebilir.

(201) ve (202) eşit olarak düşünüldüğünde, argümanlar arasındaki bağıntılar (178) de hesaplanmıştı. Bunlar (177) ve (178) nedeni ile,

$$\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta = 1/3\mathrm{Ln}\,r + i\varphi \quad \alpha = (\varphi + 2k\pi)/\sqrt{3} - 1/3\,\mathrm{Ln}\,r, \quad \beta = -(\varphi + 2k\pi)/\sqrt{3} - 1/3\,\mathrm{Ln}\,r$$

dir. 1/3Lnr + iφ ifadesi sonsuzda alınacağından, vektörün doğrultusunu gösterir. Bu formüllerin çıkartılmasında kullanılan, dik koordinatlarla barisantrik koordinatlar arasındaki dönüşüm formülleri, Şekil 1 de, (32) ve (33) formülleridir. Şekil 1 de, B(0,1,1,1) noktası başlangıç, A_1(0,1,0,0) olmak üzere, BA_1 doğrusu x_1 ekseni ve buna dik doğru da, x_2 ekseni olarak alınmıştır. BA_1 uzunluğu birim olacak biçimde, dik koordinatların birim noktası yerleştirilmiştir. φ açısı

$$\varphi = \mathrm{Arctg}\; x_2/x_1$$

formülü ile tanımlandı. Bu formüle göre, φ açısı, OM doğrusu ve birinci 1/8'lik uzay diliminin açıortayının belirlediği düzlemle, bu açıortayla Ox ekseninin belirlediği düzlemin, iki düzlemli açısının ölçek açısıdır. Laguerre formülü ile hesaplanmıştır. r uzaklığı, OM doğrusunun sonsuzdaki düzlemi deldiği noktanın B(0,1,1,1) noktasına uzaklığıdır. OM doğrusu ile OB açıortay doğrusu arasındaki açı, sonsuzdaki düzlem üzerinde, barisantrik koordinatların uzaklık formülü ile hesaplanmış ve r ile gösterilmiştir. r ve φ, düzlemsel açıları, iki farklı işlemle ölçümü yapılır. r nin ölçümüne **hiperbolik ölçüm** ve MOB açısına da, **hiperbolik açı**, φ nin ölçümüne, **dairesel ölçüm** ve φ açısına da **dairesel açı** adı verilecektir. r hiperbolik açısı, sonsuzdaki düzlem üzerinde alınan, r doğru parçasını, sonludaki bir noktadan gören açıdır. Bunlar Öklidsel büyüklüklerdir. (178) deki hesaplamalar, bu kavramların barisantrik koordinatlardaki değerleri ile yapılmıştır. Yarıçapı ∞ olan çembere **doğru,** yarıçapı ∞ olan küre yüzeyine **düzlem**, yarıçapı ∞ ve merkezi bulunduğumuz yer olan küreye de **gök küresi** denilir. ∞'daki düzlemle gök küresi özdeştir. Burada ∞'daki düzlem yerine, gök küresi deyimi daha uygundur. ∞'daki düzlem üzerinde B(0,1,1,1) A_1(0,1,0,0) doğru paçası birim alındı. BA_1 doğrusu φ açısının başlangıç doğrusudur. ∞'daki düzlemle, yani gök küresi ile, birim küre arasında bir dönüşüm kurulacaktır. Yani O başlangıcından geçen doğruların gök küresini ve birim küreyi deldiği noktalar birbirlerinin karşıtı olarak alınacaktır. 0 =< r <= 1, 0 =< φ <= 2π olursa, gök küresi Ox ekseninden geçen ve koordinat düzlemlerinin açıortay düzlemi üzerinde, yarım birim küre yüzeyine dönüşür. ρ karmaşık sayısının mutlak değeri, karmaşık sayılarda daima pozitiftir. Argümanın peryotu 2π olduğundan, 0 dan 2π ye kadar değişir ve negatif ρ değerleri, argümanın π değerinin karşılığıdır. Uzayda ρ pozitif ve negatif olacaktır. Argümanın π değeri sonsuzdaki düzlem üzerinde BA_1 in uzantısındaki noktaları gösterir, ρ'yu etkilemez. Gök küresinin ufkumuzun altındaki yarım küresinin noktalarının mutlak değerleri, negatif işaretle gösterilecektir. Burada ρ'nun pozitif ve negatif olması, argümanla ilgili değildir.

Sonsuzdaki düzlem üzerinde r$e^{i\varphi}$ karmaşık sayısı alındı. Gerçekte sonsuzdaki düzlem izotrop olup, üzerindeki noktalar düzgün değildir. Uzaydaki noktaların rangı 3, izotrop düzlemler üzerindeki noktaların rangı ise 2 dir. İzotrop düzlemler üzerindeki noktalar, bu düzlemin ölçü sistemine göre, yani kendi düzleminin izotrop noktalarına göre düzgün noktadırlar. Sonsuzdaki, düzlem üzerindeki izotrop noktalara göre düzgündür. Sonsuzdaki düzlem Öklid düzlemidir. Öklid düzleminin birim dairesi barisantrik koordinat üçgeninin çevrel çemberidir. Sonsuzdaki ölçek için birim uzunluk bu çemberin yarıçapı olup, B(0,1,1,1) A_1(0,1,0,0) doğru parçasıdır. BA_1 ekseni açı ölçümü için başlangıç eksenidir. ρ uzayın ölçü birimine göre, r ise sonsuzdaki düzlemin ölçü birimine göre ölçülecektir.

Kitabın sonunda Borland Pascal ile verilen program 3 te, r barisantrik koordinatların uzaklık formülü ile hesaplanmış, sonra göreceli açılara geçilmiş, çarpma ve bölme işlemleri ondan sonra yapılmıştır. Moivre formülü ile üçüncü derece denkleminin çözümü, istenilen köklerin bulunması göreceli açılarla olmuştur. Bu program burada verilen işlemlerin somut bir uygulamasıdır.

İzotrop Karmaşık Sayılar ve İzotrop Koordinatlar

İzotrop noktaların düzgün olmayan noktalar oldukları ve karmaşık sayılarla ifade edilip, işlemlere sokulamayacağı, yukarda açıklandı. Bir vektörün bileşenleri, sonsuzdaki düzlemi deldiği noktanın, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre, barisantrik koordinatlarıdır. O halde bu düzlemde barisantrik koordinatların birim doğrusu, sonsuzdaki düzlemin sonsuzdaki doğrusudur. Yani sonsuzdaki düzlem afindir. Eğer sonsuzdaki doğru üzerinde izotrop noktalar da alınırsa, sonsuzdaki düzlem Öklid düzlemi olur. Sonsuzdaki düzlem üzerinde karteziyen karmaşık sayılar kullanılabilir. Bu özelik genelleştirilirse, izotrop noktalar rangı ile uygun düşen uzayda, düzgün sayı olurlar. Sonsuzdaki düzlem üzerinde olan bir noktanın rangı üçtür. İki boyutlu uzayın karmaşık sayısı ile ifade edilebilir. Bu özelik çerçevesinde, izotrop doğru ve düzlemler üzerine de, izotrop koordinat sistemi ve karmaşık sayılar kurulacaktır.

(203) $P_0 = x_0 = 0$, $P_1 = x + y + z = 0$, $P_2 = x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = 0$, $P_3 = x + \mathbf{k}y + \mathbf{j}z = 0$

Düzlemleri izotrop dörtyüzlünün yüzleridir. P_1 düzlemi, sonsuzdaki P_0 düzlemini birim doğrusu boyunca keser. Birim doğrusu, sonsuzdaki düzlemin sonsuzdaki doğrusudur. İzotrop noktalar aynı zamanda P_1 düzlemi üzerindedir. Bu nedenle P_1 düzlemi Öklidsel ve gerçeldir. Birinci koordinat düzlemi P_1 düzlemi olacaktır. $P_2 \cap P_3$ doğrusu, izotrop doğrudur, P_1 düzlemine diktir ve birinci 1/8'lik uzay diliminin açıortayıdır. Bu doğru üçüncü koordinat ekseni olacaktır. Ox ekseninden ve bu açıortaydan geçen düzlem ile, P_1 düzleminin arakesiti, birinci koordinat ekseni ve her ikisine dik olan doğru da, ikinci koordinat ekseni olacaktır. Yeni izotrop koordinat sistemi de, dik olduğundan, göreceli uzay ile dönüşüm matrisi ortogonal olacaktır. Ox ile $P_2 \cap P_3$ (açıortay doğrusu) doğrusunun belirlediği düzlem, Q_1, P_1 ve Q_1 e dik olan düzlem Q_2 olsun.

(204) $Q_1 = -y + z = 0$, $Q_2 = 2x - y - z = 0$

Düzlem normallerinin iç çarpımlarının sıfır olması ile, birbirlerine dik oldukları görülür.

(205) $B_1 = P_0 \cap P_1 \cap Q_1 = (0, 2, -1, -1)$, $B_2 = P_0 \cap P_1 \cap Q_2 = (0, 0, 1, -1)$,
$B_3 = P_0 \cap Q_1 \cap Q_2 = (0, 1, 1, 1)$

Noktaları, koordinat eksenleri olarak alınan doğruların sonsuzdaki noktaları olurlar. Bu noktalar, sonsuzdaki düzlem üzerinde bulunan sanal koniğin, kutupsal üçgeninin köşe noktalarıdır. Aynı zamanda, barisantrik koordinatlar biliniyorken, karteziyen koordinatların bulunmasını sağlayan koordinat dönüşümünün matrisini oluşturur. Bu noktaları sütun matris olarak yazalım. Projektif uzayda dönüşüm matrisi elde edilir. İki dik koordinat sistemi arasında dönüşüm matrisi ortogonaldir. Elde edilen matris ortogonalleştirilirse, istenilen dönüşüm matrisi bulunur. Devriği aynı zamanda evriğidir.

(206)
$$A = \begin{matrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/2 & 1/\sqrt{3} \end{matrix} \qquad A^{-1} = \begin{matrix} 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{matrix}$$

Ortogonal matrisleri ile, dönüşüm ve ters dönüşüm denklemleri yazılır.

(207)
$$x_1 = k(2/\sqrt{6}x'_1 + \quad 0 \quad + 1/\sqrt{3}x'_3) \qquad x'_1 = (2/\sqrt{6}x_1 - 1/\sqrt{6}x_2 - 1/\sqrt{6}x_3)/k$$
$$k^3 = 2/(3\sqrt{3}), \quad x_2 = k(-1/\sqrt{6}x'_1 + 1/\sqrt{2}x'_2 + 1/\sqrt{3}x'_3) \qquad x'_2 = (\,0 \quad 1/\sqrt{2}x^2 - 1/\sqrt{2}x_3)/k$$
$$x_3 = k(-1/\sqrt{6}x'_1 - 1/\sqrt{2}x'_2 + 1/\sqrt{3}x'_3) \qquad x'_3 = (1/\sqrt{3}x_1 + 1/\sqrt{3}x_2 + 1/\sqrt{3}x_3)/k$$

Üssüz harfler noktanın göreceli dik koordinatlarını, üslü harfler ise noktanın izotrop koordinatlarını gösterir. k çarpanı metrikte gelecek katsayıyı bire indirgemek için konuldu. Başka bir anlatımla, P_1 düzlemi üzerinde alınacak, dik koordinat eksenleri, sonsuzdaki düzlemin barisantrik koordinat üçgeni ile, uygun düşmelidir. Birin, üçüncü ve dördüncü kökleri, vektör olarak kullanılacağından, bu köklerin aralarındaki ilgi, korunmalıdır. Sonsuzdaki koordinat üçgeninde, Şekil 1 de olduğu gibi dik koordinatları ve barisantrik koordinatlar yerleştirilmelidir. Sonsuzdaki düzlemin, sonsuzdaki doğrusunu(barisantrik koordinatlarda birim doğrusu), sonsuzdaki eksenlerin kestiği noktaların, dik koordinatları $B_1(0, 1, 0)$, $B_2(0, 0, 1)$ dır. Bunların barisantrik koordinatları, (32) den, $B_1(2, -1, -1)$, $B_2(0, 1, -1)$ dir. P_1 düzleminde alınacak dik koordinat eksenleri, sonsuzda tasarladığımız dik koordinat eksenlerine paralel olursa, birin kökleri arasındaki ilgi korunmuş olur. OB_1 birinci ve OB_2 de ikinci dik koordinat ekseni olmalıdır. Bir noktanın sonsuzdaki düzlem üzerinde, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre, barisantrik koordinatları, uzaydaki dik koordinat sistemine göre, dik koordinatlarıdır. Bu özelik (117) de açıklandı. Barisantrik koordinatlar ve dik koordinatlar Şekil 1 de olduğu konuşlandırılmalı ve sonsuzdaki koordinat sistemleri ile uygun düşmelidir. Eksenler sonsuzda aynı noktadan geçmelidir. Yani eksenler paralel olmalıdır.

Koordinat eksenlerinin, sonsuzdaki noktalarının sonsuzdaki düzleme göre karmaşık sayıları,

(208) $B_1 = (2 - j - k)/3, \quad B_2 = (j - k)/\sqrt{3}, \quad B_3 = (1 + j + k)/3$

olur. Bu noktaların barisantrik koordinatları, uzayın başlangıcını sözü edilen noktalara birleştiren vektörlerin bileşenleridir. Uzayda bu vektörler sıra ile,

(209) $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (\mathbf{2} - \mathbf{j} - \mathbf{k})/3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (\mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (\mathbf{1} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/3$

olurlar. Karşıt olarak,

(210) $\mathbf{1} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad \mathbf{j} = -1/2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \sqrt{3}/2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad \mathbf{k} = -1/2\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \sqrt{3}/2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3$

bulunur. İzotrop karmaşık sayıların birim vektörleri arasında işlem özelikleri, (188) den, dik karmaşık sayıların birim vektörleri ile kolayca bulunur.

(211) $\boldsymbol{\varepsilon}_1^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1^3 = \boldsymbol{\varepsilon}_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1^4 = \boldsymbol{\varepsilon}_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2^2 = -\boldsymbol{\varepsilon}_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2^3 = -\boldsymbol{\varepsilon}_2,$
$\boldsymbol{\varepsilon}_2^4 = \boldsymbol{\varepsilon}_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_3 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3^3 = \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3^4 = \boldsymbol{\varepsilon}_3$

bağıntıları vardır. $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ kümesinin, (1, i) karmaşık sayılar cismine izomorf olduğu bu işlem özeliklerinden görülmektedir. $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 1/8'lik uzay diliminin açıortay doğrusu üzerindedir ve birim vektördür. Bu doğru izotrop doğrudur, üzerindeki noktaların rangı 2 dir. Bu noktalar yalnız kendi doğrusu üzerinde düzgündür ve bu doğrunun izotrop noktalarına göre belirlenebilirler. $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, P_1 düzlemi üzerindedirler ve Öklidseldirler. $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ Öklidsel değildir.

$$\mathbf{u} = x\boldsymbol{\varepsilon}_1 + y\boldsymbol{\varepsilon}_2 + z\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

sayısına **İzotrop Karmaşık Sayı** ve koordinat sistemine de, **İzotrop Koordinatlar** denilecektir. İzotrop koordinatlarda iki nokta arasındaki uzaklık, (207) dönüşümü ile (147) göreceli uzaklık formülü göz önüne alınırsa,

(212) $s'^3 = k^3(2/\sqrt{6}x'_1 + 1/\sqrt{3}x'_3)^3 + k^3(-1/\sqrt{6}x'_1 + 1/\sqrt{2}x'_2 + 1/\sqrt{3}x'_3)^3 +$
$k^3(-1/\sqrt{6}x'_1 - 1/\sqrt{2}x'_2 + 1/\sqrt{3}x'_3)^3 - 3k^3(2/\sqrt{6}x'_1 + 1/\sqrt{3}x'_3)(-1/\sqrt{6}x'_1 + 1/\sqrt{2}x'_2 +$
$1/\sqrt{3}x'_3)(-1/\sqrt{6}x'_1 - 1/\sqrt{2}x'_2 + 1/\sqrt{3}x'_3), \qquad k^3 = 2/(3\sqrt{3})$

olur. Parantezler açılır ve kısaltmalar yapılırsa, izotrop koordinatlarda başlangıca uzaklık formülü bulunur.

(213) $s' = (x'^2_1 + x'^2_2)x'_3$

Bu işlemler oldukça uzundur. (207) den, izotrop doğruların üzerinde, önce dönüşüm uygulaması yapalım, sonra çarpalım.

$$P_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3\,k/\sqrt{3}\,x'_3, \quad P_2 = x_1 + jx_2 + kx_3 = k[\,(2 - j - k)/\sqrt{6}\,x'_1 + (j - k)/\sqrt{2}\,x'_2\,],$$
$$P_3 = x_1 + kx_2 + jx_3 = k[(2 - k - j)/\sqrt{6}\,x'_1 + (k - j)/\sqrt{2}\,x'_2]$$
$$P_2\,P_3 = k^2[\,(2 - j - k)^2/6\,x'^2_1 - (j - k)^2/2\,x'^2_2] = 3/2(x'^2_1 + x'^2_2)\,k^2,$$
$$s^3 = P_1\,P_2\,P_3 = k^3\,3\sqrt{3}/2\,(x'^2_1 + x'^2_2)\,x'_3 = (x'^2_1 + x'^2_2)\,x'_3$$

bulunur.

İzotrop Silindirik Karmaşık Sayılar ve İzotrop Silindirik Koordinatlar

İzotrop Karmaşık Sayının P_1 Öklid düzlemi üzerinde bulunan bileşenlerini, kutupsal koordinatlarda yazalım.

(214) $$\mathbf{u} = r\,\mathrm{Cos}\varphi\, \boldsymbol{\varepsilon}_1 + r\,\mathrm{Sin}\varphi\, \boldsymbol{\varepsilon}_2 + z\, \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

sayısına **İzotrop Silindirik Karmaşık Sayı** ve koordinat sistemine de, **İzotrop Silindirik Koordinatlar** denilecektir. Burada geçen φ açısı ile, (178) ve (202) de geçen φ açısı aynı açıdır.

VIII
UZAYDA KARMAŞIK ANALİZ

Karmaşık Değişken ve Fonksiyon

Uzayda bir noktayı herhangi bir işlem kuralı ile, uzayın bir başka notasına tekabül ettirelim. Uzayın bir noktası ve işlem kuralı sıra ile,

$$\mathbf{w} = x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \qquad \mathbf{u} = f(w)$$

yazılımı ile gösterilecektir. **w** yi oluşturan x, y, z sayıları, gerçel sayılar kümesinde olup, **değişken** adını alırlar. Gerçel sayılar kümesi içinde değişkenlerin alabildiği nokta kümesine, değişkenlerin **değişim kümesi** veya **değişim bölgesi** denilecektir. İşlem kuralı ile belirlenen **u** değerine, **karmaşık fonksiyon** denilecektir. Eğer bir noktaya, bir nokta tekabül ettirilmişse, **tek değerli** fonksiyon denilecektir. Değişkenlerin değişim bölgesine, fonksiyonun **tanım kümesi** veya **tanım bölgesi** denilecektir.

Limit

Limit , süreklilik ve türev kavramları için, aynı anlamda üç değişik tanım verilecektir. $\mathbf{w}_0$ noktası $\mathbf{u} = f(\mathbf{w})$ fonksiyonunun tanım bölgesinde bir nokta olsun.

1) ε > 0 seçilen bir sayı olsun. Eğer δ = δ(ε) > 0 olacak biçimde, fonksiyonun tanım bölgesinde bulunan,

$$0 < |\mathbf{w} - \mathbf{w}_0| < \delta \ \text{ için,} \qquad |f(\mathbf{w}) - \mathbf{u}_0| < \varepsilon,$$

oluyorsa,

2) $f(\mathbf{w})$ fonksiyonunun tanım bölgesinde, $\mathbf{w}_0$ a yaklaşan $\mathbf{w}_n$ dizisi ile, $\mathbf{u}_0$ a yaklaşan $\mathbf{u}_n$ dizisi için,

$$u_n = f(\mathbf{w}_n)$$

oluyorsa, $f(\mathbf{w})$ fonksiyonu $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$ için **u** ya yaklaşıyor veya

$$\mathbf{w} \to \mathbf{w}_0 \ \text{ için } f(\mathbf{w}) \to \mathbf{u} \ \text{ veya } \ \mathbf{u} \to \mathbf{u}_0$$

denilir.

3) $$\mathrm{Lim}_{\,w \to w_0} f(\mathbf{w}) = \mathbf{u}$$

denilir.

Süreklilik

1) $\mathbf{w}_0$ noktası $f(\mathbf{w})$ fonksiyonunun tanım bölgesinde,

$$\mathrm{Lim}_{\,w \to w_0} f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{w}_0)$$

ise, f(w) fonksiyonu w_0 noktasında **sürekli** denilir.

2) Her ε > 0 için δ = δ(ε) bulunsun, öyle ki, $|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her **w** için,

$$|f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{w}_0)| < \varepsilon$$

oluyorsa, fonksiyon $\mathbf{w}_0$ da **sürekli** denilir.

3) $f(\mathbf{w})$ fonksiyonunun tanım bölgesinde alınan ve $\mathbf{w}_n \to \mathbf{w}_0$ olan her $(\mathbf{w}_n)$ sayı dizisi için, $f(\mathbf{w})$ fonksiyonunun değerler dizisi, $f(\mathbf{w}_0)$ a yaklaşıyorsa, $f(\mathbf{w})$ $\mathbf{w}_0$ da süreklidir, yani,

$$f(\mathbf{w}_n) \to f(\mathbf{w}_0)$$

dır denilir.

Türev

1) **u**, $f(\mathbf{w})$ tanım bölgesi içinde bir $\mathbf{w}_0$ noktasında,

$$\mathrm{Lim}_{\,w \to w_0} [f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{w}_0)]/(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)$$

limiti varsa, fonksiyonun $\mathbf{w}_0$ da **türevi** vardır denilir ve

$$f'(\mathbf{w}_0),\ df(\mathbf{w})/d\mathbf{w},\ d\mathbf{u}/d\mathbf{w},\ \mathbf{u}'_0$$

ifadelerinden biri ile gösterilir.

2) Her $\varepsilon > 0$ a bağlı olan öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır ki, $0 < |\mathbf{w} - \mathbf{w}_0| < \delta$ oldukça

$$|[f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{w}_0)]/(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) - \mathbf{u}'_0| < \varepsilon$$

olan $\mathbf{u}'_0$ a **türev** denilir.

3) Öyle bir $\mathbf{u}'_0$ sayısı varsa ki, $\mathbf{w}_0$ a yaklaşan bir $(\mathbf{w}_n)$ sayı dizisi için,

$$(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0)/(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_0) \rightarrow \mathbf{u}'_0, \quad [\mathbf{u}_n = f(w_n)]$$

ise, $\mathbf{u}'_0$ a **türev** denilir.

Süreklilik koşulları

x, y, z, P, Q, R gerçel sayılar olmak üzere,

(215) $\mathbf{w} = x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,\ P = P(x, y, z),\ Q = Q(x, y, z),\ R = R(x, y, z),$

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{w}) = P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R$$

olsun. **u** fonksiyonunun türevi olması için, gerekli koşulları araştıralım. Türevin bulunması,

$$(\Delta u/\Delta w)_{w\rightarrow w0} = \{[P(x,y,z) + \mathbf{j}Q(x,y,z) + \mathbf{k}R(x,y,z)] - [P(x_0,y_0,z_0) + \mathbf{j}Q(x_0,y_0,z_0) + \quad .$$

$$.. \quad \mathbf{k}R(x_0,y_0,z_0]\}: [(x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) - (x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0)]$$

bölümünün bir limiti olmasına bağlıdır. **w** değişkeni, ayrı ayrı x ekseni, y ekseni ve z ekseni boyunca $\mathbf{w}_0$ a yaklaşsın. Eğer limit varsa, bu limit değişmeyecektir. Eksenler boyunca sıra ile değişkenlerin değişimini, diğerlerini sabit bırakarak gerçekleştirelim.

$$(\Delta\mathbf{u}/\Delta\mathbf{w})_{w\rightarrow w0} = \partial\mathbf{u}/\partial x = [(\Delta P + \mathbf{j}\Delta Q + \mathbf{k}\Delta R)/\Delta x]_{x = x0} = \partial P/\partial x + \mathbf{j}\partial Q/\partial x + \mathbf{k}\partial R/\partial x$$

$$(\Delta\mathbf{u}/\Delta\mathbf{w})_{w\rightarrow w0} = \partial\mathbf{u}/\partial y = [(\Delta P + \mathbf{j}\Delta Q + \mathbf{k}\Delta R)/\mathbf{j}\Delta y]_{y = y0} = \mathbf{k}\partial P/\partial y + \partial Q/\partial y + \mathbf{j}\partial R/\partial y$$

$$(\Delta\mathbf{u}/\Delta\mathbf{w})_{w\rightarrow w0} = \partial u/\partial z = [(\Delta P + \mathbf{j}\Delta Q + \mathbf{k}\Delta R)/\mathbf{k}\Delta z]_{z = z0} = \mathbf{j}\partial P/\partial z + \mathbf{k}\partial Q/\partial z + \partial R/\partial z$$

Bu türevlerin birinci yanları, süreklilik gereği olarak aynıdır. Çünkü değişim yolu değişmekle limit (türev) değişmez. Gerçel kısımlar, **j**'li kısımlar ve **k**'lı kısımlar ayrı, ayrı eşit olmalıdır.

(216) $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial y = \partial R/\partial z, \quad \partial P/\partial z = \partial Q/\partial x = \partial Rr/\partial y, \quad \partial P/\partial y = \partial Q/\partial z = \partial R/\partial x$

Eğer fonksiyon sürekli ise, bu eşitlikler sağlanır. Karşıt olarak bu eşitlikler sağlanıyorsa, fonksiyon süreklidir. Bu eşitlikleri sağlayan fonksiyonlara **düzgün** (regüler, analitik) fonksiyonlar, (216) eşitliklerine de **süreklilik koşulları** denilecektir.

Örnek 9

(217) $\mathbf{u} = \mathbf{w}^3 = (x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3\mathbf{j}(x^2y + y^2z + xz^2)$

$$+ 3\mathbf{k}(x^2z + xy^2 + yz^2)$$

fonksiyonunun düzgün olduğunu gösteriniz.

$\partial P/\partial x = 3x^2 + 6yz,\ \partial P/\partial y = 3y^2 + 6xz,\ \partial P/\partial z = 3z^2 + 6xy,\ \partial Q/\partial x = 6xy + 3z^2,\ \partial Q/\partial y = 3x^2 + 6yz,\ \partial Q/\partial z = 3y^2 + 6xz,\ \partial R/\partial x = 6xz + 3y^2,\ \partial R/\partial y = 6xy + 3z^2,\ \partial R/\partial z = 3x^2 + 6yz$

(216) Eşitlikleri görülmektedir.

. Örnek 10

$\mathbf{u} = T_1(\mathbf{w})$ fonksiyonunun düzgün olduğunu gösteriniz.

$T_1(x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)$ fonksiyonunu, (159) toplam formülüne göre açalım.

$$T_1(x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = T_1(x)T_1(\mathbf{j}y)T_1(\mathbf{k}z) + T_1(x)T_3(\mathbf{j}y)T_2(\mathbf{k}z) + T_1(x)T_2(\mathbf{j}y)T_3(\mathbf{k}z) +$$
$$T_2(x)T_1(\mathbf{j}y)T_3(\mathbf{k}z) + T_2(x)T_2(\mathbf{j}y)T_2(\mathbf{k}z) + T_2(x)T_3(\mathbf{j}y)T_1(\mathbf{k}z) + T_3(x)T_1(\mathbf{j}y)T_2(\mathbf{k}z) +$$
$$T_3(x)T_2(\mathbf{j}y)T_1(\mathbf{k}z) + T_3(x)T_3(\mathbf{j}y)T_3(\mathbf{k}z)$$

$T_1(\mathbf{j}y)$ yi hesaplamak için, (157) de verilen seilerde, α yerine **j**y konulmalıdır.

$$T_1(\mathbf{j}y) = T_1(y),\quad T_1(\mathbf{k}z) = T_1(z),\quad T_2(\mathbf{j}y) = \mathbf{j}T_2(y),\quad T_2(\mathbf{k}z) = \mathbf{k}T_2(z),$$
$$T_3(\mathbf{j}y) = \mathbf{k}T_3(y),\quad T_3(\mathbf{k}z) = \mathbf{j}T_3(z)$$

$$T1(x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = P(x, y, z) + \mathbf{j}Q(x, y, z) + \mathbf{k}R(x, y, z)$$
$$P = T_1(x)T_1(y)T_1(z) + T_2(x)T_2(y)T_2(z) + T_3(x)T_3(y)T_3(z)$$
$$Q = T_1(x)T_3(y)T_2(z) + T_2(x)T_1(y)T_3(z) + T_3(x)T_2(y)T_1(z)$$
$$R = T_1(x)T_2(y)T_3(z) + T_2(x)T_3(y)T_1(z) + T_3(x)T_1(y)T_2(z)$$

Trigonometrik fonksiyonların türev kuralları, (148) ve (151) de verilmiştir.

$$\partial P/\partial z = T_1(x)T_1(y)T_3(z) + T_2(x)T_2(y)T_1(z) + T_3(x)T_3(y)T_2(z)$$
$$\partial Q/\partial x = T_3(x)T_3(y)T_2(z) + T_1(x)T_1(y)T_3(z) + T_2(x)T_2(y)T_1(z)$$
$$\partial R/\partial y = T_1(x)T_1(y)T_3(z) + T_2(x)T_2(y)T_1(z) + T_3(x)T_3(y)T_2(z)$$
$$\partial P/\partial x = T_3(x)T_1(y)T_1(z) + T_1(x)T_2(y)T_2(z) + T_2(x)T_3(y)T_3(z)$$
$$\partial Q/\partial y = T_1(x)T_2(y)T_2(z) + T_2(x)T_3(y)T_3(z) + T_3(x)T_1(y)T_1(z)$$
$$\partial R/\partial z = T_1(x)T_2(y)T_2(z) + T_2(x)T_3(y)T_3(z) + T_3(x)T_1(y)T_1(z)$$
$$\partial P/\partial y = T_1(x)T_3(y)T_1(z) + T_2(x)T_1(y)T_2(z) + T_3(x)T_2(y)T3(z)$$
$$\partial Q/\partial z = T_1(x)T_3(y)T_1(z) + T_2(x)T_1(y)T_2(z) + T_3(x)T_2(y)T_3(z)$$
$$\partial R/\partial x = T_3(x)T_2(y)T_3(z) + T_1(x)T_3(y)T_1(z) + T_2(x)T_1(y)T_2(z)$$

(216) Eşitlikleri görülmektedir.

Süreklilik koşullarının kutupsal koordinatlara nasıl yansıdığını araştıralım. (200) den,

(218) $x = \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$, $y = \rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$, $z = \rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$

$$\partial x/\partial \rho = T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta),\quad \partial y/\partial \rho = T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta),\quad \partial z/\partial \rho = T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$$
$$\partial x/\partial \alpha = \rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta),\quad \partial y/\partial \alpha = \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta),\quad \partial z/\partial \alpha = \rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$$
$$\partial x/\partial \beta = \rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta),\quad \partial y/\partial \beta = \rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta),\quad \partial z/\partial \beta = \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$$

yazılır.

(219) $\partial P/\partial \rho = \partial P/\partial x\ \partial x/\partial \rho + \partial P/\partial y\ \partial y/\partial \rho + \partial P/\partial z\ \partial z/\partial \rho$

$$\partial Q/\partial \alpha = \partial Q/\partial x\ \partial x/\partial \alpha + \partial Q/\partial y\ \partial y/\partial \alpha + \partial Q/\partial z\ \partial z/\partial \alpha$$
$$\partial R/\partial \beta = \partial R/\partial x\ \partial x/\partial \beta + \partial R/\partial y\ \partial y/\partial \beta + \partial R/\partial z\ \partial z/\partial \beta$$

Değişkenlerin türevleri yerine, (218) den değerlerini yerlerine koyalım.

(220) $\partial P/\partial \rho = \partial P/\partial x\ T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \partial P/\partial y\ T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \partial P/\partial z\ T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$

$$\partial Q/\partial \alpha = \partial Q/\partial x\ \rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \partial Q/\partial y\ \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \partial Q/\partial z\ \rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$$
$$\partial R/\partial \beta = \partial R/\partial x\ \rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \partial R/\partial y\ \rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \partial R/\partial z\ \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)$$

(216) dan süreklilik koşulları göz önüne alınırsa, kısmi türevlerin arasındaki ilgi görülür.

Benzer olarak işlemler yürütülürse, kutupsal koordinatlarda süreklilik koşulları için,

(221) $\rho\partial P/\partial \rho = \partial Q/\partial \alpha = \partial R/\partial \beta$, $\partial P/\partial \alpha = \partial Q/\partial \beta = \rho\partial R/\partial \rho$, $\partial P/\partial \beta = \rho\partial Q/\partial \rho = \partial R/\partial \alpha$

eşitlikleri bulunur.

Örnek 11

$$\mathbf{u} = \mathrm{Ln}\ \mathbf{w}$$

fonksiyonunun düzgün olduğunu gösteriniz.

$$\mathbf{w} = x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = \rho e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta},\quad \mathrm{Ln}\ \mathbf{w} = \mathrm{Ln}\ \rho + \mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta$$
$$P = \mathrm{Ln}\rho,\quad Q = \alpha,\quad R = \beta,\quad \partial P/\partial \rho = 1/\rho,\quad \partial Q/\partial \alpha = 1,\quad \partial R/\partial \beta = 1$$

Diğer türevler sıfırdır. (221) süreklilik koşulları sağlanmaktadır. Fonksiyon düzgündür. $\rho = 0$ için süreklilik koşulları sağlanmadığından, fonksiyon düzgün değildir.

Konform Tasvir

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{w}) = P(x,y,z) + \mathbf{j}Q(x,y,z) + \mathbf{k}R(x,y,z)$$

Karmaşık fonksiyon düzgün fonksiyon olsun. Altı boyutlu bir uzayın ilk üç boyutunu **w** uzayına, diğer üç boyutunu da **u** uzayına ayıralım. **w** uzayının her bir noktası bu fonksiyon aracılığı ile, **u** uzayının P, Q, R fonksiyonlarının değerlerini, koordinat kabul eden bir noktasına dönüşür. Yapılan bu dönüşümle genelde, doğrular eğrilere, düzlemler yüzeylere, sonsuz küçük doğru parçalarının açıları, bu açıya eşit olan sonsuz küçük eğri parçalarının açısına ve sonsuz küçük doğru parçalarının üç boyutlu uzay açıları (üçyüzlüleri), sonsuz küçük eğri parçalarının uzay açılarına dönüşürler. **w** uzayında y ve z sabit, x değişsin. Bu **w** uzayında bir doğrudur. Bu doğru **u** uzayında verilen, x, y, z değerlerine karşılık gelen P, Q ve R değerlerinin belirlediği noktalar kümesine dönüşür. Bu küme bir değişkenli olduğundan, genelde bir uzay eğrisidir. z sabit olsun, x ve y değişsin. **w** uzayında bir düzlem belirlenir. Bu noktaların **u** uzayındaki karşıtları bir yüzey oluşturur. Benzer dönüşüm **u** uzayından **w** uzayına da yapılır. Düzlemin karmaşık fonksiyonlarında bu dönüşümler, eşit açılı ve en küçük kısımlarda benzerlik dönüşümleridir. $\Phi(x,y)$ = sabit ve $\psi(x,y)$ = sabit fonksiyonları teknik uygulamaları nedeni ile önem kazanmışlardır.

Düzlemin karmaşık fonksiyonunun üstel ifadesi ile, uzayın karmaşık fonksiyonunun üstel ifadesi karşılaştırılırsa, aynı türden olduğu ve aynı konform tasvir özeliklerine sahip olacağı görülür.

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{w}) = P(x,y,z) + \mathbf{j}Q(x,y,z) + \mathbf{k}R(x,y,z)$$

düzgün fonksiyonu ile yapılan dönüşümde, $\mathbf{w}_n$ $\mathbf{w}_0$'a ve $\mathbf{u}_n$ de $\mathbf{u}_0$'a bir γ eğrisi üzerinden yaklaşsın.

(222) $(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0)/(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_0) \rightarrow f'(\mathbf{w}_0)$, $\quad \arg(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0) - \arg(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_0) \rightarrow \arg f'(\mathbf{w}_0)$

olur. Birinci taraf, değişkeni ve fonksiyonu limite götüren doğru parçalarının ilk doğrultu açılarını gösterirler. Fonksiyon düzgün olduğundan, bu limit yaklaşım doğrultusuna ve yönüne bağlı değildir.

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \arg(\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_0) = \alpha, \qquad \lim_{n\rightarrow\infty} \arg f'(\mathbf{w}_0) = \beta$$

ile gösterilirse,

$$\arg(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0) \rightarrow \alpha + \beta$$

olur. Dönüşümden sonra $\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0$ doğru parçası, değişkenin yaklaşım doğrultusundan, β açısı kadar pozitif yönde dönmüştür. Her doğru parçası ayni miktar dönme yapacağından, dönüşüm sonunda göreceli açılar korunur. (222) den

$$|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0|/|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_0| \rightarrow |f'(\mathbf{w}_0|$$

ifadesinden, limit noktası civarında sonsuz küçük doğru parçasının, dönüşmüşüne oranının sabit olduğu görülür. Dönüşüm sonsuz küçüklerde benzerlik dönüşümüdür. Açıları koruyan benzerlik dönüşümlerine **konform tasvir** (dönüşüm) denilir.

Başka bir anlatımla,

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^3 = P(x,y,z) + \mathbf{j}Q(x,y,z) + \mathbf{k}R(x,y,z)$$

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{w}) = (x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3\mathbf{j}(x^2y + y^2z + z^2x) + 3\mathbf{k}(x^2z + y^2x + z^2y)$$

$P = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = c_1$, $\quad Q = 3(x^2y + y^2z + z^2x) = c_2$, $\quad R = 3(x^2z + y^2x + z^2y) = c_3$

düzgün fonksiyonu ile yapılan dönüşümün konform olduğunu gösterelim.

$$P(x,y,z) = \text{sabit}, \qquad Q(x,y,z) = \text{sabit}, \qquad R(x,y,z) = \text{sabit}$$

Bu yüzeylerin göreceli ortogonal olduğunu görelim. Yüzeylerin normal vektörleri sıra ile,

$$\mathbf{n}_P = \mathbf{grad}\, P, \qquad \mathbf{n}_Q = \mathbf{grad}\, Q, \qquad \mathbf{n}_R = \mathbf{grad}\, R$$

dir. Uzayın her noktasından geçen, P, Q, R yüzeyleri vardır. Uzayın her noktasında göreceli ortogonallik koşulu sağlanmalıdır. P, Q, R fonksiyonları ve kısmi türevleri (217) de verildi. Bu değerleri (181) deki çarpımlarda yerlerine koyalım. Önce P ve Q yüzeylerinin göreceli ortogonal olduğunu araştıralım. **d** yerine $\mathbf{n}_P$, **e** yerine $\mathbf{n}_Q$ koyalım.

$$\mathbf{n}_P.\mathbf{n}_Q = (x^2 + 2yz)[(2xy + z^2)^2 - (x^2 + 2yz)(y^2 + 2xz)] + (y^2 + 2xz)[(x^2 + 2yz)^2 - (2xy + z^2)(y^2 + 2xz)] + (z^2 + 2xy)[(y^2 + 2xz)^2 - (2xy + z^2)(x^2 + 2yz)] = 0$$

(46) ve (47) özelikleri göz önüne alınır, orta ve dış çarpımlar da, benzer biçimde yapılırsa,

$$|\mathbf{d}|^3 = d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 - 3d_1d_2d_3, \qquad |\mathbf{e}|^3 = e_1^3 + e_2^3 + e_3^3 - 3e_1e_2e_3, \qquad |\bar{\mathbf{e}}| = |\mathbf{e}|^2$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0, \qquad T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 0, \qquad T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 1$$

değerleri bulunur. (179) dan bu değerlerin belirlediği göreceli açının, sonsuzdaki düzlem üzerinde Öklidsel karşılığı $\varphi = 4\pi/3$ radyandır. Uzayda Dik Karmaşık Sayılar paragrafında açıklandığı gibi, dik koordinat eksenleri sonsuzdaki düzlem üzerinde birim dairenin 0, $2\pi/3$ ve $4\pi/3$ noktalarından geçerler. $\mathbf{n}_P$ ve $\mathbf{n}_Q$ normalleri ikinci tür diktirler. Benzer işlemlerle, $\mathbf{n}_P$, $\mathbf{n}_R$ ve $\mathbf{n}_Q$, $\mathbf{n}_R$ vektörlerinin de dik oldukları görülür. **u** uzayının koordinat yüzeylerinin göreceli ortogonal oldukları anlaşılır. Düzgün fonksiyonlarla yapılan dönüşümlerde, göreceli açılar korunmuştur.

Uzayda Karmaşık Fonksiyonlar ve Entegral Teoremleri

Karmaşık fonksiyonların türevi olması için, gereken süreklilik koşulları çıkarıldı. Entegral türevin karşıtı olduğundan, bir fonksiyonun entegralinin alınması için de, süreklilik koşullarını sağlaması gereklidir. Uzayda düzgün karmaşık fonksiyonların entegrali, yola bağlı olmayıp, yalnız başlangıç ve uç noktalarına bağlıdır. Başka bir deyimle, izotrop doğruyu(1/8'lik uzay diliminin açıortayı) çevrelemeyen, kapalı bir yol boyunca entegral sıfırdır.

$$\dot{\mathbf{I}} = \int \mathbf{dw}$$

Entegralini $\mathbf{w}_0$ ile $\mathbf{w}_n$ noktaları arasında, herhangi bir yol üzerinden alalım. Yol üzerinde alınacak $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ... $\mathbf{w}_\nu$ noktaları aracılığı ile, yolu n eşit parçaya bölelim. Bu parçaların toplamını alalım. Entegralin Riemann anlamında yorumunu göz önüne alıp, sözü geçen entegrali ve aşağıdaki entegralleri, toplamlar yaparak bulalım.

$$d\mathbf{w} = \mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1} \qquad \dot{\mathbf{I}} = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1}) = \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_0$$

$$\dot{\mathbf{I}} = \int \mathbf{w}\, \mathbf{dw}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_1 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_{\nu-1}, \quad \dot{\mathbf{I}}_2 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_\nu,$$

$$\dot{\mathbf{I}} = (\dot{\mathbf{I}}_1 + \dot{\mathbf{I}}_2)/2 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu\mathbf{w}_{\nu-1} - \mathbf{w}_{\nu-1}^2 + \mathbf{w}_\nu^2 - \mathbf{w}_{\nu-1}\mathbf{w}_\nu)/2 = (\mathbf{w}_n^2 - \mathbf{w}_0^2)/2$$

$$\dot{\mathbf{I}} = \int \mathbf{w}^2\, d\mathbf{w}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_1 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_{\nu-1}^2, \quad \dot{\mathbf{I}}_2 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_{\nu-1}\mathbf{w}_\nu, \quad \dot{\mathbf{I}}_3 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_\nu^2,$$

$$\dot{\mathbf{I}} = (\dot{\mathbf{I}}_1 + \dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_3)/3 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu\mathbf{w}_{\nu-1}^2 - \mathbf{w}_{\nu-1}^3 + \mathbf{w}_{\nu-1}\mathbf{w}^2_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1}^2\mathbf{w}_\nu + \mathbf{w}_\nu^3 - \mathbf{w}_\nu^2\mathbf{w}_{\nu-1})/3 =$$
$$(\mathbf{w}_n^3 - \mathbf{w}_0^3)/3$$

$$\dot{\mathbf{I}} = \int \mathbf{w}^3\, d\mathbf{w}$$

$$\dot{\mathbf{I}}_1 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_{\nu-1}^3, \quad \dot{\mathbf{I}}_2 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_{\nu-1}^2\mathbf{w}_\nu, \quad \dot{\mathbf{I}}_3 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_{\nu-1}\mathbf{w}_\nu^2$$

$$\dot{\mathbf{I}}_4 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_\nu^3, \quad \dot{\mathbf{I}} = (\dot{\mathbf{I}}_1 + \dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_3 + \dot{\mathbf{I}}_4)/4 = (\mathbf{w}_n^4 - \mathbf{w}_0^4)/4$$

$$\dot{\mathbf{I}} = \int \mathbf{w}^m\, d\mathbf{w}$$

(224) $\dot{\mathbf{I}}_1 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_{\nu-1}^m, \quad \dot{\mathbf{I}}_2 = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_{\nu-1}^{m-1}\mathbf{w}_\nu, \ \ldots \quad \dot{\mathbf{I}}_{m+1} = \Sigma(\mathbf{w}_\nu - \mathbf{w}_{\nu-1})\mathbf{w}_\nu^m$

$$\dot{\mathbf{I}} = \Sigma\, \dot{\mathbf{I}}_j/(m+1) = \Sigma(\mathbf{w}_\nu\mathbf{w}_{\nu-1}^m - \mathbf{w}_{\nu-1}^{m+1} + \mathbf{w}_\nu^2\mathbf{w}_{\nu-1}^{m-1} - \mathbf{w}_{\nu-1}^m\mathbf{w}_\nu + \ldots$$
$$+ \mathbf{w}_\nu^{m+1} - \mathbf{w}_{\nu-1}\mathbf{w}_\nu^m)/(m+1)$$

$$\dot{\mathbf{I}} = (\mathbf{w}_n^{m+1} - \mathbf{w}_0^{m+1})/(m+1)$$

Bu işlemler $\dot{\mathbf{I}}$ entegrallerinin sonucunu göstermektedir. Tam fonksiyonların tamamı ve seriye açılabilen fonksiyonların yakınsaklık bölgesinde entegral, yola bağlı olmayıp, yalnız başlangıç ve uç noktalarına bağlıdır. İzotrop doğruyu çevrelemeyen, kapalı bir eğri boyunca entegralin değeri sıfırdır.

Uzayda $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$, $\mathbf{w}_5$, $\mathbf{w}_6$ noktalarından geçen kapalı bir eğri boyunca,

$$\mathbf{u} = \int \mathbf{w}^m\, d\mathbf{w}$$

belirli entegralini alalım.

(225) $\dot{\mathbf{I}} = |\mathbf{w}^{m+1}/m+1|^{\mathbf{w}2}_{\mathbf{w}1} + |\mathbf{w}^{m+1}/m+1|^{\mathbf{w}3}_{\mathbf{w}2} + |\mathbf{w}^{m+1}/m+1|^{\mathbf{w}4}_{\mathbf{w}3} + |\mathbf{w}^{m+1}/m+1|^{\mathbf{w}5}_{\mathbf{w}4} +$
$|\mathbf{w}^{m+1}/m+1|^{\mathbf{w}6}_{\mathbf{w}5} + |\mathbf{w}^{m+1}/m+1|^{\mathbf{w}1}_{\mathbf{w}6} = 0$

Bütün entegral sınırları hem +, hem de – işareti ile gelmiştir. Bu kanıt rasyonel ve irrasyonel fonksiyonları da, kapsamına alır. Yalnız $m \neq -1$dir.

Entegral teoremini Stoks formülü ile kanıtlayalım.

(226) $\mathbf{A}(x, y, z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}, \qquad \iint \text{rot}\, \mathbf{A}\, \mathbf{n}\, dS = \int \mathbf{A}\, d\mathbf{r},$

$$\iint(\partial R/\partial y - \partial Q/\partial z)dydz + \iint(\partial P/\partial z - \partial R/\partial x)dxdz + \iint(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)dxdy = \int Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\mathbf{u}(x, y, z) = P(x, y, z) + \mathbf{j}Q(x, y, z) + \mathbf{k}R(x, y, z), \qquad \mathbf{w} = x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

$$\mathbf{u}d\mathbf{w} = (P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R)(dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz) = Pdx + Qdz + Rdy + \mathbf{j}(Pdy + Qdx + Rdz) +$$
$$\mathbf{k}(Pdz + Qdy + Rdx)$$

Stoks teoreminin karmaşık sayılara uygulanmasında, ikinci yanın gerçel kısmında, Stoks teorminin Q ile R si, **j** li kısımda, P ile Q sü, **k** lı kısımda da P ile R si, yer değiştirecektir. Bu özelik, ikinci satırın ikinci yanı ile, dördüncü satırın ikinci yanındaki gerçel kısım, karşılaştırılırsa, kolayca görülür. Dördüncü satırın ikinci yanının, Stoks teoremindeki karşıtını yazalım.

(227) $\int \mathbf{u}d\mathbf{w} = \iint (\partial Q/\partial y - \partial R/\partial z)dydz + \iint(\partial P/\partial z - \partial Q/\partial x)dxdz + \iint(\partial R/\partial x - \partial P/\partial y)dxdy +$
$\mathbf{j}[\iint(\partial R/\partial y - \partial P/\partial z)dydz + \iint(\partial Q/\partial z - \partial R/\partial x)dxdz + \iint(\partial P/\partial x - \partial Q/\partial y)dxdy] +$
$\mathbf{k}[\iint(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial z)dydz + \iint(\partial R/\partial z - \partial P/\partial x)dxdz + \iint(\partial Q/\partial x - \partial R/\partial y)dxdy] = 0$

(216) da süreklilik koşulları göz önüne alınırsa, bütün entegrallerin sıfır olduğu görülür.

m = –1 olsun. Trigonometri değer tablosunda iki açı eğrisinin, (178) den, $\pi' = 2k\pi/\sqrt{3}$ argüman değerinde, Ox ekseninden geçen açıortay düzlemi üzerinde kesiştiklerine değinilmişti. İki açı eğrisi A(1, 0, 0) başlangıcından ikinci kesim noktasına kadar, birim kübik yüzeyin altından, diğeri üstünden geçerek, kesim noktasına gelirler. İki eğri birlikte simetrik bir uzay eğrisi oluştururlar. Açı eğrileri uzay helisi olarak, açıortay doğrultusunda açıortayın çevresini sararak, sonsuza kadar giderler. Ortasından, 1/8'lik uzay diliminin açıortayı olan, izotrop doğru geçer. Bu açıortay , belirsizlik eksenidir. Kapalı bir uzay eğrisi olan, açı eğrileri üzerinden entegral alalım. (201) den,

(228) $\mathbf{w} = \rho e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta}$, ρ = Sabit, $\mathbf{u} = 1/\mathbf{w}$, $\dot{\mathbf{I}} = \int_0^{pi} \rho e^{\mathbf{j}\alpha+k\beta} (\mathbf{j}d\alpha + \mathbf{k}d\beta)/(\rho e^{\mathbf{j}\alpha+\mathbf{k}\beta}) =$

$$\int_0^{pi} (\mathbf{j}d\alpha + \mathbf{k}d\beta) =|\ \mathbf{j}\alpha|^{\pi'}_{\alpha=0} + |\mathbf{k}\ \beta|^{\pi'}_{\beta=0} = \pi'(\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

bulunur. (202) den,

(229) $\mathbf{w} = \rho e^{1/3 Ln\, r+i\varphi}$, $\mathbf{u} = 1/\mathbf{w}$, $\rho = 1$, $r = 1$

olsun. r = 1 ve $0 =< \varphi <= 2\pi$ olması, gök küresi ile, Ox ekseninden geçen açıortay düzleminin arakesiti olan çember ifade edilir. Bu çemberin ortasından izotrop doğru geçer. A(0, 1, 0, 0), B(0, 1, 1, 1) olmak üzere, r = AB = 1 uzunluğudur. İzotrop doğruyu çevreleyen kapalı bir eğri boyunca entegral,

(230) $\dot{\mathbf{I}} = \int_0^{2pi} d\mathbf{w}/\mathbf{w} = \int_0^{2pi} e^{i\varphi}/ e^{i\varphi}\, id\varphi = \int_0^{2pi} id\varphi = 2\pi i$

olur. Sözü edilen çemberin çevresi, $\rho = 1$ olması nedeni ile, sanal birim dairenin çevresine dönüşmüştür.

$$\dot{\mathbf{I}} = \iint d\mathbf{w}^2 /\mathbf{w}^2 = \int d\mathbf{w} \int d\mathbf{w}/\mathbf{w}^2$$

İki katlı entegralini göz önüne alalım. Bu entegral izotrop doğruyu çevrelemeyen bir eğri boyunca sıfırdır. Belirsiz entegralinde, entegral sabitinin sıfır değerine karşılık gelen özel çözüm ile, yani $\rho = \infty$, r = 1, $\varphi = 0$ başlangıç değerleri ile entegrale girelim.

$$\dot{\mathbf{I}} = -\int d\mathbf{w}/\mathbf{w}$$

değeri bulunur. Bir peryot boyunca entegral alalım. (230) dan,

(231) $\rho = 1$, $r = 1$, $\dot{\mathrm{I}} = -\int_0^{2pi} d\mathbf{w}/\mathbf{w} = -2\pi i$

olur. İzotrop doğruyu çevreleyen bir eğri boyunca, tam bir dönme sonunda, argüman 2π artar. Bunun dışında bir eğri boyunca, tam bir dönme sonunda 2π artmaz, sabit kalır. Entegral sıfır olur. r ve φ sonsuzdaki düzlem üzerinde, yani gök küresi üzerinde alınmıştır. $\rho = 1$ değeri ile Ox ekseninden geçen, açıortay düzlemi üzerinde bulunan, yarım gök küre yüzeyi, sanal yarım birim küre yüzeyine dönüşür. İ entegrali, r = 1 in $d\varphi$ ile çarpımı olduğundan, sonuç yarım gök küresi yüzeyinin alanıdır. Gök küresi yüzeyinin alanı, $\rho = 1$ alınarak sanal yarım birim küre yüzeyinin alanına dönüşmüştür.

$$\dot{\mathbf{I}} = -2\pi i$$

Düzlemde karmaşık sayıların mutlak değeri, daima pozitiftir. Önüne konulan eksi işareti, argümanın π değerine karşı gelen, fonksiyon değeridir. Uzay karmaşık sayılarında, argümanla bu işaret sağlanamaz, ρ'nun negatif değeri ile sağlanır. Çünkü argümanın π değeri BA_1 doğrusunun karşıtıdır. OB nin karşıtı, yani ufkun alt yarım küresinin noktaları, ancak $-\rho$ ile gösterilebilirler. ρ'nun negatif değerleri ile, gök küresinin alt yarım küre yüzeyinin alanı da, alt sanal yarım birim küre yüzeyinin alanına dönüşecektir. Entegral,

$$\dot{\mathbf{I}} = -4\pi i$$

olur. Uzayda başlangıç noktasını çevreleyen kapalı bir yüzey boyunca, İ entegrali

(232) $\dot{\mathbf{I}} = \iint_s d\mathbf{w}^2/\mathbf{w}^2 = -4\pi i$

dir. Uzayın karmaşık entegral teoremidir.

Düzlemde karmaşık fonksiyonlarla, entegral işlemi yapılmaz, entegral teoremleri uygulanır. Uzayın karmaşık sayıları için de, aynı özelik olacaktır. Benzer olarak düzlemin karmaşık sayı özelikleri, hiç değişikliğe uğramadan, uzayın karmaşık sayılarına aktarılacaktır. Yukarda uzayın bir ve iki katlı entegral teoremleri verilmiştir. Hesaplamalarda yapılacak iş, bu teoremlerin uygulanmasıdır. Bu nedenle entegral işlemlerine ve diğer özeliklere girilmemiştir. Entegral işlemlerinde yapılacak iş, entegral yoluna göre, değişkenleri bir veya iki parametreye bağlamaktır.

Gauss Teoremi

Kapalı S yüzeyi ile çevrilmiş hacim V olsun.

(233) $$\iint_s \mathbf{n.r}/r^3\, dS = \iiint_v \nabla.\, \mathbf{r}/r^3\, dV$$

Formülüne Diverjans formülü denilir. ∇ Harfine nabla denilir. Vektör ve türev işlemcisidir. Türev alma kurallarına sahiptir. **r**,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

yer vektörü adını alır. İkinci yanı açalım.

$$(\nabla.\, \mathbf{r}/r^3) = (\nabla\ 1/r^3).\, \mathbf{r} + 1/r^3(\nabla.\, \mathbf{r}) = -3r^{-4}\, (\partial r/\partial x\ \mathbf{i} + \partial r/\partial y\ \mathbf{j} + \partial r/\partial z\ \mathbf{k}).\mathbf{r} +$$
$$1/r^3(\partial \mathbf{r}/\partial x\ \mathbf{i} + \partial \mathbf{r}/\partial y\ \mathbf{j} + \partial \mathbf{r}/\partial z\ \mathbf{k})$$

r nin kısmi türevleri **i**, **j**, **k** dır. r nin kısmi türevleri ise,

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \qquad \partial r/\partial x = x/r, \quad \partial r/\partial y = y/r, \quad \partial r/\partial z = z/r$$

dir. Bu değerler yerlerine konulursa,

$$(\nabla.\mathbf{r}/r^3) = -3\, r^{-5}\, \mathbf{r.r} + 3\, r^{-3} = 0$$

olur. İkinci yanın sıfır olduğu görülmektedir. $1/r^2$ fonksiyonunun kapalı bir yüzey boyunca entegrali, başlangıç noktası içinde değilse, sıfırdır. Başlangıç noktası yüzeyin içinde ise, r = 0 için süreksizlik vardır. Bu durumda başlangıç noktası, tanım bölgesinin dışına atılır. Bu amaçla başlangıç merkez, a yarıçaplı, diğer kapalı yüzeyin içinde, bir S' küre yüzeyi alalım.

$$\iint_{s+s'} \mathbf{n.r}/r^3\, dS = \iint_s \mathbf{n.r}/r^3\, dS + \iint_{s'} \mathbf{n.r}/r^3\, dS = \iiint_v \nabla.\mathbf{r}/r^3\, dV = 0$$

Son üç katlı entegral ara bölgede, başlangıcı içermeyen bölgede alınmıştır. Çünkü iki yüzey ince bir kesimle birleştirilirse, başlangıç noktası dışlanır.

$$\iint_s \mathbf{n.r}/r^3\, dS = -\iint_{s'} \mathbf{n.r}/r^3\, dS$$

S' üzerinde

$$r = a, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{r}/a, \quad \mathbf{n.r}/r^3 = -\mathbf{r.r}/a^4 = -1/a^2$$

dır.

$$\iint_s \mathbf{n.r}/r^3\, dS = -\iint_{s'} \mathbf{n.r}/r^3\, dS = \iint_{s'} 1/a^2\, dS = 1/a^2 \iint_{s'} dS = 4\pi a^2/a^2 = 4\pi$$

olur. S yüzeyi içinde başlangıç noktası varsa, S yüzeyi boyunca iki katlı entegralin değeri 4π dir. Gauss teoremi olarak bilinir.

Mekanikte İş Formülleri

Düzlemde olduğu gibi, kuvvetin eşleniğinin, yolun diferansiyeli ile çarpımına, **işin diferansiyeli** denilir.

$$F = X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z, \qquad dr = dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$$

(223) $$d\mathbf{İ} = \bar{F}\, dr = (X + \mathbf{k}Y + \mathbf{j}Z)(dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz) = Xdx + Ydy + Zdz$$
$$+ \mathbf{j}(Xdy + Ydz + Zdx) + \mathbf{k}(Xdz + Ydx + Zdy)$$

Kuvvetin uygulanması ile cisim hareket ediyorsa, gerçel bileşene öteleme işi, **j**'li bileşene **negatif dönme işi**, **k**'lı bileşene de, **pozitif dönme işi** adı verilecektir. İkinci ve üçüncü bileşenlerde kuvvet yola diktir. Bu iki bileşen moment bileşenidir. Her terimde iki değişken vardır. İki değişkenin bulunduğu eksenlere dik olan eksenin, pozitif tarafı, gözlemcinin baş tarafı olduğu zaman, sağdan sola olan dönmeler pozitif, soldan sağa olan dönmeler negatif alınmıştır. Burada pozitif ve negatif sözcükleri, kuvvet bileşenlerinin koordinat düzlemleri üzerinde yaptıkları dönmelerin, matematik dönme yönünde olanını ve olmayanını anlatır. Eğer cisim kuvvet uygulanması ile hareket etmiyorsa, birinci bileşen çizgel şekil değiştirme ve moleküllerin sürtünmeleri ile oluşan, elastik ve termik işlerin toplamını verir. İkinci ve üçüncü bileşenler, açısal şekil değiştirme nedeni ile oluşan, elastik işi verir. Momentler dönme işi yaparlar.

Hız ve İvme Formülleri

Dik koordinatlarda hız ve ivme ifadeleri şunlardır.

$\mathbf{s} = x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, $\mathbf{v} = dx/dt + \mathbf{j}dy/dt + \mathbf{k}dz/dt$, $\mathbf{a} = d^2x/dt^2 + \mathbf{j}d^2y/dt^2 + \mathbf{k}d^2z/dt^2$

Kutupsal koordinatlarda hız ve ivme ifadeleri şunlardır.

(234) $\mathbf{s} = \rho\, e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt = (d\rho/dt + \mathbf{j}\rho d\alpha/dt + \mathbf{k}\rho d\beta/dt)e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta} = (\rho' + \mathbf{j}\rho\alpha' + \mathbf{k}\rho\beta')e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta}$

Cismin bulunduğu noktada, biri radyal doğrultu olmak üzere, birbirine dik üç doğrultuyu göz önüne alalım.Bu doğrultular ve bu doğrultudaki hızlar sıra ile şunlardır

$$\mathbf{v}_r = \rho' [T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)],$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \rho\, \alpha'[T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)]\,,$$

$$\mathbf{v}_\beta = \rho\, \beta'[T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)]$$

Doğrultular trigonometrik biçimden türev alarak bulunmuştur. İvme formülleri şunlardır

(235) $\mathbf{a} = [\rho'' + \mathbf{j}(\rho'\alpha' + \rho\alpha'') + \mathbf{k}(\rho'\beta' + \rho\beta'') + (\rho' + \mathbf{j}\rho\alpha' + \mathbf{k}\rho\beta')(\mathbf{j}\alpha' + \mathbf{k}\beta')]e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta}$

$$\mathbf{a} = [\rho'' + 2\rho\alpha'\beta' + \mathbf{j}(\rho\alpha'' + 2\rho'\alpha' + \rho\beta'^2) + \mathbf{k}(\rho\beta'' + 2\rho'\beta' + \rho\alpha'^2)]e^{\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta}$$

$$\mathbf{a}_\rho = (\rho'' + 2\rho\alpha'\beta')[T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)]$$

$$\mathbf{a}_\alpha = (\rho\alpha'' + 2\rho'\alpha' + \rho\beta'^2)[T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)]$$

$$\mathbf{a}_\beta = (\rho\beta'' + 2\rho'\beta' + \rho\alpha'^2)[T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{j}T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \mathbf{k}T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)]$$

Üstel Öklidsel karmaşık sayıda, kinematik formülleri elde etmek için, (178) formüllerinden α ve β'nın türevleri, r ve φ cinsinden hesaplanarak, (234) ve (235) formüllerinde yerlerine konulur.

Metrik

Dik koordinatlarda metrik, göreceli uzaklık formülünden kolayca yazılır.,

(236) $$ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\, dx\, dy\, dz$$

Bu formülde kutupsal koordinatların trigonometrik değerleri yerine konularak, kutupsal koordinatlarda metrik bulunur. Türev kuralları (165) de verilmiştir.

$$x = \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta),\quad y = \rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta),\quad z = \rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)]$$

$$ds^3 = [d\rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \rho T3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\alpha + \rho T2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\beta]^3 + [d\rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\alpha + \rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\beta]^3 + [d\rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\alpha + \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\beta]^3$$
$$-3\,[d\rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\alpha + \rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\beta]\,[d\rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\alpha + \rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\beta]\,[d\rho T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + \rho T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\alpha + \rho T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)d\beta]$$

Bu parantezler açılır, ortak olanlar yeniden parantezlere alınır ve

$$T_1^3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + T_2^3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) + T_3^3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)] - 3\, T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)\, T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta)\, T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta) = 1$$

özdeşliği göz önüne alınırsa,

(237) $$ds^3 = d\rho^3 + \rho^3 d\alpha^3 + \rho^3 d\beta^3 - 3\,\rho^2 d\rho\, d\alpha\, d\beta$$

bulunur. (178) den α, β'nın diferansiyelleri r ve φ cinsinden hesaplanır, yukarda yerine konulursa, üstel Öklidsel karmaşık sayının metriği bulunur.

(213) formülünden izotrop koordinatlarda, başlangıca uzaklık ve metrik,

(238) $s^3 = (x_1^2 + x_2^2)\, x_3$, $ds^3 = (dx_1^2 + dx_2^2)\, dx_3$

olur. İzotrop silindirik koordinatlar için başlangıca uzaklık ve metrik,

(239). $s^3 = r^2\, x_3$, $ds^3 = (dr^2 + r^2\, d\varphi^2)\, dx_3$

olur.

IX
GÖRECELİK KURAMI

Özel Görecelik Kuramı

Düzlemsel bir hareket için, iki boyut uzunluk ve bir boyut da zaman olmak üzere, üç boyutlu uzay-zamanda, biri sabit ikincisi hareketli iki tane eylemsizlik sistemi göz önüne alalım. xy düzlemi hareket düzlemi, z ekseni de zaman ekseni olsun. İkinci sistem $\mathbf{v} = v_1 + \mathbf{j}v_2$ hızı ile hareket etsin. Üç boyutlu uzay-zamanda herhangi bir olayın başlangıca göreceli uzaklıkları, en kısa yol olmalıdır. Çünkü zaman belirlenmesi ışık aracılığı ile olmaktadır. Bu nedenle uzaklık ifadesinin türevi sıfır olmalıdır.

(240) $ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 – 3\, dx\, dy\, dz$, $ds'^3 = dx'^3 + dy'^3 + dz'^3 – 3\, dx'\, dy'\, dz'$

Türevin sıfır olması, bu diferansiyellerin sıfır olması demektir. Bu iki diferansiyel,

$$ds^3 = f(x,y,z)\, ds'^3, \qquad ds^3 = ds'^3$$

fonksiyonu ile birbirine bağlı olmalıdır. Eğer her iki sistemde duruyorsa, eşitlik gerçekleşir. Bu nedenle f(x,y,z) fonksiyonu özdeş olarak 1 dir. İki yay diferansiyelinin eşit olması, bu iki eylemsizlik sistemleri arasında, göreceli uzunlukları değişmez bırakan bir dönüşümün varlığını gösterir. Göreceli uzunlukları, göreceli ortogonal matrislerin değişmez bıraktığı ve göreceli ortogonal matrisler, (155) de açıklandı. İki Galile sistemi arasında göreceli ortogonal matrisle (155) e dayalı olarak bir dönüşüm kuralım.

(241) $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta$, $x = x'T_1(\boldsymbol{\omega}) + y'T_2(\boldsymbol{\omega}) + z'T_3(\boldsymbol{\omega})$, $x' = xT_1(\boldsymbol{\omega}) + yT_3(\boldsymbol{\omega}) + zT_2(\boldsymbol{\omega})$

$y = x'T_3(\boldsymbol{\omega}) + y'T_1(\boldsymbol{\omega}) + z'T_2(\boldsymbol{\omega})$ $y' = xT_2(\boldsymbol{\omega}) + yT_1(\boldsymbol{\omega}) + zT_3(\boldsymbol{\omega})$

$z = x'T_2(\boldsymbol{\omega}) + y'T_3(\boldsymbol{\omega}) + z'T_1(\boldsymbol{\omega})$ $z' = xT_3(\boldsymbol{\omega}) + yT_2(\boldsymbol{\omega}) + zT_1(\boldsymbol{\omega})$

$\boldsymbol{\omega}$ sabit alınır, diferansiyelleri (240) da yerine konulursa, $ds^3 = ds'^3$ bulunur.

x, y uzunluk, z = c t zaman ekseni olduğuna göre,

(242) $T_1(\boldsymbol{\omega}) = dx/ds$, $T_2(\boldsymbol{\omega}) = dy/ds$, $T_3(\boldsymbol{\omega}) = dz/ds = c\, dt/ds$

$ds/dt = v$, $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$, $dz/dt = c$, $v^3 = v_x^3 + v_y^3 + c^3 – 3\, c\, v_x\, v_y$

$x = x'\, v_x/v + y'v_y/v + z'\, c/v$ $x' = x\, v_x/v + y\, c/v + z\, v_y$

$y = x'\, c/v + y'\, v_x/v + z'\, v_y/v$ $y' = x\, v_y/v + y\, v_x/v + z\, c/v$

$z = x'\, v_y/v + y'\, c/v + z'\, v_x/v$ $z' = x\, c/v + y\, v_y/v + z\, v_x/v$

formülleri yazılır. Lorentz dönüşümlerinin düzlemsel hareketlere genelleştirilmesi olan, bu formüllere **düzlemsel göreceli dönüşümler** denilecektir. Bu formüllerde geçen büyüklükler göreceli uzayın kavramlarıdır. Bu kavramlara yeniden düzlemsel göreceli dönüşümler uygulanmıştır. Böylece göreceli kavramların göreceliği gerçekleştirilmiştir. Bu anlayışa uygun bir olay gözlenmişmidir? Benim bilmediğim konularda gözlenmişse, ilgililerin dikkatini çekerim.

Hareket bir boyutta ise, olay iki boyutlu Minkowski uzayında olur. Görecelik kuramının bilinen kuralları geçerlidir. İki eylemsizlik sistemi alalım. Biri diğerine göre **v** düzgün doğrusal hızı ile hareket etsin. Üssüz harfler sabit sistemden, hareketli sistemin gözlenmesi ile kendi sisteminde ve kendi saatıyla gözlemcinin ölçtüğü koordinatlar, üslü harfler hareketli sistemin kendi koordinat sisteminde gene kendi gözlemcisinin ölçtüğü koordinatlar olsunlar.

(243) $x = (x' + vt')/\sqrt{(1 – v^2/c^2)}$, $t = (t' + v\, x'/c^2)/\sqrt{(1 – v^2/c^2)}$

$x' = (x – vt)/\sqrt{(1 – v^2/c^2)}$, $t' = (t – v\, x/c^2)/\sqrt{(1 – v^2/c^2)}$

formüllerine, Lorentz dönüşüm formülleri denilir. Bu formüllerle iki nokta arasındaki doğru parçasının uzamasını bulalım. Yukarıdaki formülün dördü için de, iki nokta için yazıp taraf tarafa çıkaralım. Her iki olayın t zamanı aynı olsun.

(244) $x'_2 – x'_1 = (x_2 – x_1)/\sqrt{(1 – v^2/c^2)}$, $(x_2 – x_1) = (x'_2 – x'_1)\sqrt{(1 – v^2/c^2)}$

Benzer düşünce ile zamanın büzülmesi,

(245) $t_2 – t_1 = (t'_2 - t'_1)/\sqrt{(1 – v^2/c^2)}$, $(t'_2 - t'_1) = (t_2 – t_1)\sqrt{(1 – v^2/c^2)}$

olur. Düzgün doğrusal hareket eden sistemlerde, sabit olanlara göre, hareket doğrultusunda kendi gözlemcilerinin ölçtüğü uzunluk parçaları büyür, zaman parçaları ise küçülür. Hareket doğrultusuna dik olan uzunluklar değişmez.

(246) $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ $(\alpha =1,2,3)$, $v^i = dx^i/dt$ $(i = 1,2,3)$

İfadelerinden birincisi birim vektör olup, **Evren hızı**, ikincisi **hız** adını alır.

(247) $u^i = dx^i/ds = v^i\, dt/ds$, $u^3 = dx^3/ds = cdt/ds$ $(\alpha = 3)$

$ds^2 = c^2\, dt^2 – v^2\, dt^2$, $cdt/ds = c/\sqrt{(c^2 – v^2)} = 1/\sqrt{(1 – v^2/c^2)}$

Genel Görecelik Kuramı

Einstein bir kuvvet alanında, özel görecelik kuramına benzer büzülmelerin ve büyümelerin olduğunu saptar. Bilinen ünlü asansör modelini ortaya koyar. Çekim kuvvetlerinin, eylemsizlik kuvvetleri ile, eylemsizlik kuvvetlerinin de, çekim kuvvetleri ile, yok edilebileceğini savunur.

Güneşten r uzaklığında, bir cismin, çekim alanında, potansiyel enerjisi vardır. Bu enerji, çekim alanında, m kütleli bir cismin, potansiyel enerjisinin sıfır olduğu sonsuzdan başlayarak, Güneşe r uzaklığına, çekim kuvvetinin etkisi ile gelinceye kadar, yaptığı iştir.

(248) $-kMm \int_{\infty}^{r} 1/r^2\, dr = kMm(1/r - 1/\infty) = kMm/r, \quad 1/2\, mv^2 = kMm/r\,, \quad v^2 = 2kM/r$
yapılan dönme işi, kinetik enerjiye çevrilmiş ve cisim, gereği olan hıza çıkmıştır.

Bir insan çekim kuvvetinin etkisi ile, bastığı topraktan bir tepki görür. Çekim kuvvetinin olmadığı bir uzay parçasında, $\sqrt{(2kM/r)}$ hızı ile giden bir asansör, içindeki adama, Güneşin r uzaklığında yaptığı etkiyi yapar. Bu nedenle çekim alanında hareket eden bir cisimde, çekim alanının etkisi ile oluşacak büzülme ve büyümeler, özel görecelik kuramında v^2 yerine 2kM/r konularak hesaplanabilir.

Göreceli Uzayda Göreceli Uzunluklar En Kısadır

Uzay-zamanın izotrop kübik yüzeyi ve çarpanları,

(249) $$w^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3\, x\, y\, z = (x + y + z)(x + jy + k\, z)(x + k\, y + j\, z) = 0$$
dır. Bu düzlemler (203) de tanımı verilen P_1, P_2, P_3 izotrop düzlemlerdir. Çarpanları ayrı, ayrı sıfırlar, diferansiyelleri alınırsa, izotrop düzlemler üzerinde bu diferansiyellerin sıfır olduğu görülür. Dikkate değer nokta, metriğin çarpanları ve jeodezikleri birinci dereceden ifadelerdir.

(250) $$ds^3 = (dx + dy + dz)(dx + jdy + kdz)(dx + kdy + jdz) = 0$$
$$P_2 \cap P_3 = Q_1 \cap Q_2$$
İzotrop doğrusu üzerinde ds, P_2 ve P_3 üzerinde sıfır olduğundan,
$$ds = dx + dy + dz = 0, \qquad ds^2 = 0$$
(251) $$ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\, dx\, dy\, dz = 0,$$
olur. İzotrop kübik yüzeye dayalı, göreceli s = f(w) uzunluk eğrileri, (251) jeodeziklerinin diferansiyel denkleminin bir çözümü olurlar. Eğer metrik birinci dereceden çarpanlara ayrılmasaydı, bu sonuca gelinmezdi. Çünkü $ds^2 = 0$ ifadesi, yüzey üzerinde bir jeodezik eğrinin denklemi olurdu. (204) de tanımı verilen P_1, Q_1, Q_2 düzlemlerinin oluşturduğu izotrop koordinatlarda, göreceli uzunluklar en kısadır. İzotrop koordinatlarla, göreceli uzayın dik koordinatları arasındaki dönüşüm matrisi göreceli ortognaldir. Göreceli ortogonal matrisler ile dönüşümlerde, göreceli uzunluklar değişmez. Göreceli uzayın iki nokta arasındaki, göreceli uzunlukları en kısa olur.

(250) den, çarpanların ayrı, ayrı entegrali alınır, başlangıçtan geçmesi sağlanırsa, izotrop düzlemlerin denklemleri bulunur. İzotrop düzlemler üzerinde metrik sıfır olmaktadır. O halde metrik ayni zamanda jeodeziklerin diferansiyel denklemidir. Çünkü metriğin çarpanları birinci derecedendir.

P_1 düzleminde iki nokta arasında, doğru parçası ile, eğri parçasının uzunluklarını karşılaştıralım. Uzunluğu etkileyen öge, bunların eğriliğidir. Doğrunun eğriliği sıfır, eğrininki sıfırdan farklıdır. Uzunluğu etkileyen bu öge, sıfır olduğu zaman, eğri üzerindeki, iki nokta arasındaki uzaklık en kısadır ve jeodezik adını alır. Diferansiyel denklemi ds = 0 dır. Bu karşılaştırmayı uzayda yapalım. İki noktadan geçen bir düzlem ile bir çok yüzey alalım. Bu yüzeylerden biri üzerinde bulunan uzay eğrisini, düzleme dik ışınlarla izdüşürelim. Bu izdüşüm ışınları ile, diğer yüzeyler ve düzlem üzerindeki izdüşümleri belirleyelim. İki nokta arasındaki bu uzay eğri parçalarında, uzunluğu etkileyen iki temel öge vardır. Bunlar eğrilik ve burulmadır. Bu izdüşüm eğri parçalarından en kısa olanı, düzlem üzerindeki izdüşümdür. Çünkü uzay eğrisinin düzleme izdüşümünde, eğriliği yok olmuş ve burulması eğriliğe dönüşmüştür. Uzunluğu etkileyen yalnız eğriliği vardır, burulması sıfır olmuştur. Yüzeyler üzerindeki eğrilerde ise, hem eğrilik ve hem de burulma vardır. Diferansiyel denklemi $ds^2 = 0$ dır. İzdüşümde bir koşul ile bir öge, yok edilmiştir. P_1 düzlemi üzerinde ds = 0 dır. Diferansiyel denklemi $ds^2 = 0$ olan eğriyi göz önüne alalım. $P_2 \cap P_3$ doğrusu üzerinde $ds^2 = 0$

dır. Çünkü her iki düzlemde de ds = 0 dır. $ds^2 = 0$ denklemi iki koşul anlamındadır. Burada iki öge yok olacaktır. Yani uzayda iki nokta arasında bir eğri, birinci dereceden çarpanlarına ayrılabilen, $ds^2 = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü ise, bu eğrinin hem eğriliği ve hem de burulması sıfırdır.

Jeodeziklerin diferansiyel denklemi,

(252) $$d^2x^k + \Gamma_i{}^k{}_j\, dx^i\, dx^j = 0, \qquad ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

dir. Bu denklem jodeziğin, ds = 0 denklemi ile özdeş olmalıdır. İkinci terimden görüleceği gibi, bu denklem ikinci derecedendir. O halde,

$$ds^2 = 0$$

jeodezik denklemine özdeş olabilir. Normal(doğrusal) koordinatlarda, Γ Christoffel sembolleri sıfırdır. t parametresine göre entegral alınırsa,

$$x^1 = a_1 t + b_1, \qquad x^2 = a_2 t + b_2, \qquad x^3 = a_3 t + b_3$$

uzayda doğru denklemi bulunur. Hem eğriliği ve hem de burulması yok olmuştur. t parametresi zaman olursa, ikinci yanda bulunan yolun ikinci türevi ivmedir. Yazılan denklem ivmesiz, yani düzgün doğrusal hareket eden bir cismin, yörünge denklemidir. Sonuç olarak, izotrop koordinatlarda, ds = 0 nedeni ile P_1 düzleminde, $ds^2 = 0$ nedeni ile $P_2 \cap P_3$ doğrusunda, ve dolayısı ile göreceli uzayda, göreceli uzunluklar en kısadır. İzotrop koordinatlarda $ds^3 = 0$ olduğundan, metriğe veya göreceli uzaklık formülüne göre, iki nokta arasında hesaplanan uzunluklar en kısa olur. İzotrop koordinatlar ve göreceli uzayın koordinatları dik olduğundan, dönüşüm matrisi göreceli ortogonaldir. Göreceli ortogonal matrisler, göreceli uzunlukları değiştirmezler. Göreceli dik koordinatlarda da, hesaplanan, göreceli uzunluklar en kısadır.

Bu gerçeği Öklid uzayında da görelim. Öklid düzleminin izotrop çifti, izotrop doğruları, yay elemanı ve izotrop doğrular üzerinde bir noktanın diferansiyeli,

(253) $$w^2 = x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x'_1 = x_1 + ix_2 = 0, \quad x'_2 = x_1 - ix_2 = 0$$

(254). $$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = (dx_1 + idx_2)(dx_1 - idx_2) = dx'_1 dx'_2,$$

$$dx'_1 = dx_1 + idx_2 = 0, \quad dx'_2 = dx_1 - idx_2 = 0$$

dir. Üslü harfler sanal koordinatlar, üssüz harfler karteziyen koordinatlardır. Metriğin çarpanları birinci derecedendir. İzotrop doğrular üzerinde, iki nokta arasındaki uzaklık, sıfır ve yay diferansiyeli ds = 0 dır. (254) den $ds^2 = 0$ olur. Sanal koordinatların eksenleri izotrop doğrular olup, aynı zamanda jeodezik eğrilerdir. Metriğin çarpanlarından entegral alınırsa, doğru denklemi bulunur. Öklid düzleminde sanal koordinatlarda, metriğe ve izotrop noktalara dayalı uzunluklar en kısadır. (254)'ün birinci yanı dik, ikinci yanı sanal koordinatlarda yay elemanıdır. Yay elemanlarının bu eşitliğinden, dik koordinatlarda da, sözü geçen uzunluğun en kısa olduğu anlaşılır. Çünkü bu iki sistem arasındaki dönüşüm matrisi ortogonaldir. ds = 0, $ds^2 = 0$ ve $ds^3 = 0$ diferansiyel denklemleri ile belirlenen jeodezik eğriler, birinci dereceden ise, yani metrik birinci dereceden çarpanlarına ayrılabiliyorsa, metrik aynı zamanda jeodeziğin diferansiyel denklemidir. Çünkü birinci dereceden analitik ifadelerde, eğrilik ve burulma sıfırdır. Metrik birinci dereceden çarpanlara ayrılmıyorsa, sözü geçen diferansiyel denklem, bir yüzeyin jeodezik eğrilerinin diferansiyel denklemi olur. Yani jeodezik, fazladan belli bir koşulu sağlamak zorundadır. Güneşin çekim alanına bir gök cismi girdiği zaman, (248) formülü gereğince, radyal doğrultuda ve Güneşe doğru, bir hız bileşenine sahip olur. Gök cismi kendi hızı ile bu hızın bileşkesinde hareket eder. Sürekli ortamlar mekaniğinde, sonsuz tane maddesel noktanın, birlikte bu hareketi yaptıklarını varsayalım. Güneşe eşit uzaklıkta ve kendi hızları da eşit olan, maddesel noktaların akım yüzeyi ve akım çizgisi, debi paragrafında tanımlandı. Her maddesel noktanın akım çizgisi, akım yüzeyinin bir jeodeziğidir ve eğriliği sıfırdan farklıdır. Metrik birinci dereceden çarpanlara ayrılıyorsa, jeodeziklerin eğrilik ve burulmaları sıfırdırlar. Işık Güneşin çekim alanından geçerken 1".75 kadar sapar. Bu sapma, Güneşin çekim kuvvetinin zorlaması ile, ışığın hareketi, iki hızın bileşkesi doğrultusunda olmasındandır. Işığın fotonları, maddesel noktalar gibi, Güneşin çekim kuvvetinden etkilenirler. Işığın yörüngesi akım yüzeyinin bir jeodeziğidir ve eğriliği sıfırdan farklıdır. Işığın hızının çok büyük olması nedeni ile, akım yüzeyi düzleme çok yakın bir eliptik hiperboloittir. Tepesi günberi noktasındadır.

Schwarzschild metriği,

$$ds^2 = e^{\nu} (dx^0)^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) - e^{\lambda} dr^2$$

olup, birinci dereceden çarpanlara ayrılmaz. Bu metrik aynı zamanda jeodeziğin diferansiyel denklemi değildir. Çünkü çözümler ikinci dereceden olacak ve eğriliği sıfırdan farklı olacaktır. Metrik ancak bir yüzeyin jeodezik eğrisi olabilir. Çözümün, (252) jeodezik eğrisini sağlaması için, keyfi sabitlerin, jeodezik denklemini sağlayacak biçimde belirlenmesi gerekir. Fakat bu da yeterli değildir. Yörüngede alan hızının sabit olması da gereklidir. Alan hızı, yalnız uzaklığın karesi ile ters orantılı, merkezsel kuvvetin etkisi ile oluşan, hareketlerde sabit olur. Çünkü bu koşul, genel görecelik kuramının temelini oluşturur. (248)'in son formülünde bu gerçek görülür. Bu formül, Newton kuvvetinin iş entegralinden hesaplanmıştır.

Uzayda herhangi bir düzlemin, izotrop konikle kesim noktaları, düzlemde olduğu gibi izotrop noktalardır. Düzlemde bulunan sonuçlar, bütün uzaya genelleştirilebilir.

İzotrop doğrular üzerindeki noktalar, düzlemin temel noktalarına göre, düzgün değildir, iki nokta arasındaki uzaklık sıfır bulunur. Çünkü ölçek, kendine ölçek olmaz. Karmaşık sayılarla gösterilemezler. Fakat bu noktaların rangı iki olduğundan, kendi doğrusu üzerinde alınacak, bir boyutlu uzayın temel noktalarına göre, düzgün noktalar olur ve ölçüm kendi içinde yapılabilir.

Merkür Gezegeninin Günberi Noktasının İlerlemesi

19 uncu yüzyıldan beri, Merkürün günberi noktasının ilerlemesi gözlenmektedir. Bu ilerleme Newton mekaniğine dayanmaz. Einsteinin genel görecelik kuramına dayalı olarak, Schwarzschild 1917 de bir yayınla, bu ilerlemenin hesabını Dünyaya duyurmuştur.

Merkürün hareketi düzlemsel bir olaydır. Diğer yandan Güneşin çekim alanında ve genel görecelik kuramının etkinliğindedir. Olay üç boyutlu uzay-zamanın konusudur. İki boyutu uzunluk, bir boyutu zaman olacaktır. Uzay-zaman Riemann uzayıdır. Yukarda göreceli uzay olarak tanımlanan, üç boyutlu uzay da Riemann uzayıdır.

Olay Öklid düzleminde geçer. İzotrop düzlemlerin birincisi, P_1 düzlemi gerçel ve Öklid düzlemi olduğundan, bu olay için uygundur. Sonsuzdaki düzlem üzerinde, barisantrik koordinatları J(1, j, k), J'(1, k, j) olan, Öklid düzleminin izotrop noktaları, P_1 düzleminin denklemini sağlarlar. Bu nedenle P_1 düzlemi Öklid düzlemidir. Üçüncü eksen, birinci 1/8'lik uzay diliminin açıortayı, yani $P_2 \cap P_3$ doğrusu gerçeldir, izotroptur, Öklid dışıdır. Görecelik kuramının öncüsü olan, Michelson deneyi, göz önüne alınırsa, ışık hızının, Öklid dışı olduğu ve üçüncü eksenin, ct zaman ekseni olarak alınmasının, uygun olacağı anlaşılır. Kısaca metriğin bu özelikleri bize, düzlemsel olayların göreceliğinin incelenmesinde, üç boyutlu göreceli uzayın, izotrop koordinatlarını ilham eder. Koniklerin yörüngeleri kutupsal koordinatlarda basit olduğundan, izotrop silindirik koordinatlar kullanılacaktır. (239) dan metrik,

$$ds^3 = (dr^2 + r^2 \, d\varphi^2) \, dz$$

dir. Her iki tarafı ds^3 ile bölelim.

(255) $$[dr^2/ds^2 + r^2 (d\varphi/ds)^2] \, dz/ds = 1$$

olur.

Uzaklığın karesi ile ters orantılı, merkezsel kuvvet etkisi ile, hareket eden bir cismin yörüngesi üzerinde, alan hızı sabittir. Bu koşulun kullanılması ile, yörünge belirlenmiş olmaz. Yörüngenin belirlenmesini klasik mekanik problemi olarak düşünürsek, elimizde iki tane koşul olacaktır. Birinci koşul, radyale dik doğrultudaki ivmenin sıfır olmasıdır. Çünkü bu doğrultuda kuvvet bileşeni yoktur. Bu ivmenin entegrali, alan hızının sabitliğini verir. İkinci koşul, radyal ivmenin kütle ile çarpımının, çekim kuvvetine eşit olmasıdır. Problemi görecelik kuramı kapsamında düşünürsek, ikinci koşul, çekim kuvvetinin görel etkinliğinin uygulanması olacaktır. Birinci halde çekim kuvvetinin kendisi, ikinci halde çekim kuvvetinin görel etkinliği alınmıştır.

(256) $r^2\, d\varphi/ds = H, \quad [(dr/d\varphi)^2\, (d\varphi/ds)^2 + r^2\, (d\varphi/ds)^2]\, dz/ds = 1$

Birinci ifade, radyale dik kuvvet bileşeninin sıfır olmasından elde edilen Evren alan hızıdır. İkinci ifade, (255) den elde edilmiştir.

Merkür gezgeni Güneşin çekim alanındadır. Çekim kuvveti doğrultusunda olan uzunluklar uzar. $dr/d\varphi$ çekim kuvveti doğrultusundadır. Diğer bileşen çekim kuvveti doğrultusuna dik olup, sabittir. dz/ds zaman boyutu da, çekim etkinliği ile kısalacaktır. Buradaki büyüklükler, hareketli sistem Merkür gezegenine ait olup, (244) ve (245) formüllerinde hareketli eylemsizlik sistemi, yani üslü harflerle gösterilen koordinatların konumundadır. Fakat burada bizim açımızdan, henüz çekim kuvvetinin görel etkinliği uygulanmadığı için, Merkür gezegeni sabit eylemsizlik sistemi konumundadır. (244) , (245), (247) ve (248) den,

(257) $v^2 = 2kM/r, \quad c\,dt/ds = dz/ds = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)} = 1/\sqrt{[1 - 2kM/(rc^2)]}$

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)/\sqrt{(1 - v^2/c^2)} \;\rightarrow (dr/d\varphi)/\sqrt{[1 - 2kM/(rc^2)]},$$

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{(1 - v^2/c^2)} \;\rightarrow\; (dz/ds)\sqrt{[1 - 2kM/(rc^2)]},$$

olur. Bu değerleri (255) de yerine koyalım.

(258) $\{ (dr/d\varphi)^2/[1 - 2kM/(rc^2)]\, (d\varphi/ds)^2 + r^2(d\varphi/ds)^2 \}\, dz/ds\sqrt{[1 - 2kM/(rc^2)]} = 1$

yazılır. Bu denklemde çekim kuvvetinin görel etkinliği uygulanmış ve Merkür gezegeni, hareketli eylemsizlik sistemi konumuna getirilmiştir. (258) de, son çarpan dz/ds ile, yanındaki büzülme çarpanı terstir. Paydadan kurtarılırsa,

$$(dr/d\varphi)^2\, (d\varphi/ds)^2 + r^2(d\varphi/ds)^2\, [1 - 2kM/(rc^2)] = 1 - 2kM/(rc^2)$$

olur. $r = 1/u$ konulur, Keplerin alan hızı yasası uygulanır ve H^2 ile bölünürse,

$$d(1/u)/d\varphi = - du/(u^2 d\varphi)\,, \qquad (du/d\varphi)^2 + u^2 - 2kMu^3/c^2 = 1/H^2 - 2kMu/(H^2c^2)$$

bulunur. İki tarafın u ya göre türevini alıp, kısaltalım ve üçüncü terimi ikinci yana geçirelim.

(259) $d^2u/d\varphi^2 + u = - kM/(c^2H^2) + 3kMu^2/c^2$

Olay, üç boyutlu göreceli uzayın olayıdır. Fakat uzama bir uzunluk boyutunda ve büzülme de, zaman boyutundadır. Böylece görel özeliklerin etkinliği, iki boyuttadır. Üç boyutlu göreceli uzayın, bir boyutunu küçültürsek, iki boyutlu göreceli uzay olmaz, iki boyutlu Minkowski uzayı olur. Çünkü iki boyutlu göreceli uzay yoktur. Yani üç boyutlu göreceli uzayın metriğinde, bir boyutu sıfır yaparak bulunacak metriğe sahip olan, iki boyutlu göreceli uzay yoktur. Göreceli uzay, göreceli uzunluk ve göreceli metrik tanımları, uzayın sonsuzdaki düzlemi üzerinde alınan, üç tane izotrop noktaya dayandırılmıştır. Görel özelikler izotrop noktaların üç tane olmasından kaynaklanır. Bu nedenle üç boyutlu uzayın alt uzaylarında, bu kavramlar tanımlanamaz. Bunun yerine iki boyutlu Minkowski uzayı gelmiş ve iki boyutlu Minkowski uzayının görel formülleri uygulanmıştır. İki boyutlu uzayda yeni bir özelik olarak, sanallık kavramı karşımıza çıkmıştır. Üç boyutlu uzayda yeni bir özelik olarak, izotropluk, görecelik ve Öklid dışı özelikleri karşımıza çıkmıştır. ct zaman ekseni Öklid dışı, izotrop, gerçel ve göreciliğin oluştuğu uzaydır. (257) de dz/ds ve Lorentz formülleri, iki boyutlu Minkowski uzayından alınmıştır. Bulunan sonuç, klasik görecelik kuramının bulduğu sonuçla örtüşür. (Prof. Dr. Ahmet Yüksel Özemre Gravitasyonun Rölativist Teorileri VI .4 .14). İkinci yandaki terim, negatif gelmiştir. Bu terim 1/p olup elipsin parametresidir. Odak noktasındaki Ox ekseninin alt tarafında bulunan ordinat alınmıştır. Elips Ox eksenine göre yani büyük eksene göre, simetrik olduğundan, sonuç fark etmez. Bundan sonra yapılacak işlemler, klasik görecelik kuramı ile aynıdır.

$$1/p = - kM/(c^2H^2)$$

sabitini 1/p ile gösterelim. Bu sabit, koniğin parametresi olarak karşımıza çıkacaktır. Elipsin a, b, c, e, p büyüklükleri arsında şu bağıntılar vardır.

(260) $$p = b^2/a = a(1 - c^2/a^2) = a(1 - e^2) = -c^2H^2/kM = -h^2/kM$$

$H = r^2 d\varphi/ds$ Evren alan hızı, $h = r^2 d\varphi/dt$ alan hızıdır. (259) da ikinci tarafın ikinci teriminden gelecek küçük bir terim,

$$\varepsilon = 3kM/(pc^2)$$

ile gösterilecektir. Diferansiyel denklem,

(261) $$d^2u/d\varphi^2 + u = 1/p + \varepsilon p u^2$$

olur. Klasik elips denkleminden, ε'lu terim kadar fark eder. Çözümü büyüklük mertebesine göre sıralayalım.

(262) $$u(\varphi) = u_0(\varphi) + \varepsilon v(\varphi) + \dot{I}(\varepsilon^2)$$

Diferansiyel denkleme bu çözüm tasarımı ile girersek,

(263) $$d^2u_0/d\varphi^2 + \varepsilon d^2v/d\varphi^2 + u_0 + \varepsilon v = 1/p + \varepsilon p u_0^2 + \dot{I}(\varepsilon^2)$$

olur. Terimlerin büyüklük mertebeleri belirgin biçimde farklı olduğundan, birbirlerine karışmazlar. Bu nedenle aynı büyüklük kümesinden olan terimler, aralarında dengelenebilirler

(264) $$d^2u_0/d\varphi^2 + u_0 = 1/p, \qquad d^2v/d\varphi^2 + v = p u_0^2$$

$$u_0 = 1/p + A\mathrm{Cos}(\varphi) + B\mathrm{Sin}(\varphi), \qquad u_0 = 1/p + A\,\mathrm{Cos}(\varphi)$$

Birinci denklemin çözümünden gelen B sabiti, 0 olacak biçimde, elipsin ekseni döndürülür. Yani elipsin büyük ekseni Ox ekseni alınır. (264)'ün ikinci denkleminde, u_0 değerini yerine koyalım.

$$d^2v/d\varphi^2 + v = 1/p + 2A\cos(\varphi) + pA^2\mathrm{Cos}^2(\varphi) = (1/p + pA^2/2) + 2A\mathrm{Cos}(\varphi) + pA^2/2\mathrm{Cos}(2\varphi)$$

Doğrusal bir diferansiyel denklem elde edilir. İkinci yanın üç terimine karşılık gelen, özel çözümleri ayrı ayrı bulalım.

$$d^2v_1/d\varphi^2 + v_1 = 1/p + pA^2/2 \rightarrow v_1 = 1/p + pA^2/2$$

$$d^2v_2/d\varphi^2 + v_2 = 2A\cos(\varphi) \rightarrow v_2 = A\varphi\mathrm{Sin}(\varphi)$$

$$d^2v_3/d\varphi^2 + v_3 = pA^2/2\,\mathrm{Cos}(2\varphi) \rightarrow v_3 = -\,pA^2/6\,\mathrm{Cos}(2\varphi)$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = (1/p + pA^2/2) + A\varphi\mathrm{Sin}(\varphi) - pA^2/6\,\mathrm{Cos}(2\varphi)$$

$$u = u_0 + \varepsilon v = (1/p + \varepsilon/p + \varepsilon pA^2/2) + [A\cos(\varphi) - \varepsilon A^2p/6\,\mathrm{Cos}(2\varphi)] + \varepsilon A\varphi\mathrm{Sin}(\varphi)$$

Çözümü bulunur. Son terim peryodik değildir. Gezegenin yörüngesi üzerinde gözlenen düzensizlikler, bu terimden gelir.

$$\mathrm{Cos}(\varphi - \varepsilon\varphi) = \mathrm{Cos}(\varphi)\mathrm{Cos}(\varepsilon\varphi) + \mathrm{Sin}(\varphi)\,\mathrm{Sin}(\varepsilon\varphi) \approx \mathrm{Cos}(\varphi) + \varepsilon\varphi\mathrm{Sin}(\varphi)$$

eşitliği göz önünde tutulursa,

$$u = 1/p + A\mathrm{Cos}(\varphi - \varepsilon\varphi) + \varepsilon[1/p + pA^2/2 - pA^2/6\,\mathrm{Cos}(2\varphi)]$$

yazılır. Son terim peryodik olup, gözlenmesi çok zor ve çok küçük olan bir terimdir. İkinci terimin argümanındaki $\varepsilon\varphi$ değeri, φ ile beraber artar ve peryodik olmayan sonuçlar getirir. Merkür gezegeninin günberi noktasının ilerlemesine neden olan terim, $\varepsilon\varphi$ terimidir. Yörünge,

$$u = 1/p + A\mathrm{Cos}(\varphi - \varepsilon\varphi) + (\varepsilon \text{ mertebesinde peryodik terimler})$$

denklemi ile özetlenir.

Günberi noktasında gezegen, Güneşe minimum uzaklıktadır. Bu da u nun maksimumuna karşılık gelir.

$$\varphi(1 - \varepsilon) = 2\pi n$$

olduğu zaman u maksimum olur. Buradan yaklaşımla,

$$\varphi \approx 2\pi n(1 + \varepsilon)$$

yazılabilir. Günberi noktasından gezegenin ardışık iki geçişi, 2π olmayıp,

$$\Delta\varphi = 2\pi\,(1 + \varepsilon)$$

dur. Bir dönü başına, günberi noktasının ilerlemesi, radyan olarak,

$$\delta\varphi = 2\pi\varepsilon = 2\pi.3kM/[c^2a(1 - e^2)]$$

olur. Merkürün günberi noktasının 100 yıldaki ilerlemesini bulalım. Merkürün büyüklükleri,

Yarı büyük eksen uzunluğu : $a = 0{,}387$ A.B $= 0{,}387\text{x}149{,}675.10^{11}$cm $=0{,}579.10^{13}$cm

Dışmerkezlik : $e = 0{,}206 \qquad e^2 = 0{,}042, \quad 1 - e^2 = 0{,}958$

Dolanım süresi : $T = 87{,}969$ Yer günü,

Güneşin kütlesi : $M = 2.10^{33}$ gram.

Çekim katsayısı : $k = 6{,}67.\ 10^{-8}$
dir.

$$\delta\varphi = 2\pi.3kM/[c^2a(1-e^2)] = 2x3{,}1416x3x6{,}67.10^{-8}\ x2.10^{33}/(9.10^{20}x0{,}579.10^{13}x0{,}958)$$
$$= 0{,}50344.10^{-6}\ \text{radyan} = 0'',104$$

bulunur. 100 Yer yılındaki ilerleme,

$$0'',104x365{,}25x100/87{,}969 = 43'',2$$

olur. Halbuki 100 yılda gözlemlerin belirlediği ilerleme 43",3 dir. İşlemler ile gözlemlerin ne kadar uygun düştüğü görülmektedir.

Klasik görecelik kuramında bu işlemler Schwazschild metriği ile yapılmış, burada göreceli uzayın metriği kullanılmıştır. Bu metrikler arasındaki fark, birinin izotrop noktalara dayanmaması, diğerinin Öklid metriği gibi, izotrop noktalara dayanmasıdır. Diğer yandan burada kullanılan metrik, aynı zamanda jeodeziklerin diferansiyel denklemidir. Olay Öklid düzleminde geçer. Fakat Schwarzschild metriği Öklidsel değildir. Göreceli uzayın metriğinde, hareketi belirleyen kısım Öklid düzlemidir ve zaman boyutu çarpan gelmektedir. İki boyutlu Minkowski uzayının metriği,

$$u = ict, \qquad ds^2 = dx^2 + du^2, \qquad ds^2 = dx^2 - c^2dt^2$$

olup, Öklidseldir. Yalnız zaman boyutu sanaldır. Karmaşık düzlemle gerçel düzlemin her ikisi de, Öklid düzleminde iç içedir. Bu düzlem Öklidsel düzlemin, izotrop noktalarından geçer. Halbuki Michelson deneyi ile, ışık hızının Öklidsel olmadığı, ortaya konulmuştur. Klasik görecelik kuramının metriği Öklidseldir ve Michelsonun deneyi ile çelişir. Minkowski uzayının sanallığı, düzlemsel olup, düzlemsel karmaşık sayıların özeliklerini içerir. Halbuki göreceli karmaşık uzay, üç boyutlu olup, üç boyutlu karmaşık uzaya özgü, sanal özelikleri içerir. Bu özelikler yukarda ifade edildi. Üç boyutlu göreceli uzay $J_1(0, 1, 1, 1)$, $J_2(0, 1, k, j)$, $J_3(0, 1, j, k)$ izotrop noktalarına dayandırılmış gerçel uzaydır.. Yani Öklid düzlemine yalnız J_1 noktası eklenmiş ve karmaşık uzayın eksenlerinin ε_1, ε_2, ε_3 birim vektörleri kullanılmamıştır. Koordinat sistemi P_1 Öklidsel düzlemi ile bu düzleme dik olan $P_2 \cap P_3$ doğrusundan ibarettir. Bu doğru gerçeldir fakat bu doğrultunun birim vektörü ε_3 tür, ayrıca izotroptur ve Öklidsel değildir, burada ct zaman ekseni olarak kullanılmıştır. Klasik görecelik kuramının zaman boyutunda bu özeliklerin hiçbiri yoktur. Einsteinin alan tansörleri, bu eksiği gidermişlerdir. $P_2 \cap P_3$ doğrusu üzerinde, üç boyutlu sanal uzaya özgü sanallık birimi, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ ün işlem özelikleri, (210) da verilmiştir. Olay gerçel düzlemin ve gerçel zamanın uzayıdır. Zaman da gerçeldir. Çünkü zaman bu olayda gözlenmiş bir olaydır. 100 yıldaki değeri 43" dir. Gözlenebilen bir büyüklük, sanal olamaz. Klasik görecelik kuramında zaman boyutu sanaldır. Bu uygulamalar, klasik görecelik kuramının yetersizliğini gerektiren, kayda değer çelişmelerdir. Olay karmaşık düzlem olayı olmayıp, gerçel uzay olayıdır. Ancak uzayın iki boyutu Öklidsel ve gerçel, üçüncüsü ise, ct zaman boyutu olup, gerçel, izotrop ve Öklid dışı, göreceli gerçel uzaydır. Olay, uzunluk ve açı kavramları J_1, J_2, J_3 izotrop noktalarına göre tanımlanmış, gerçel göreceli uzayın olayıdır. İşlemlerde görülen bütün nitelik farklılıkları, bunlardan kaynaklanırlar.

Merkürün hızı 47,9 km/sn, Yerin hızı 29,8 km/sn olup, ışık hızı yanında çok küçüktürler. Her iki sistemde hareketlidir ve hareketleri düzgün doğrusal değildir. Bu nedenlerle özel görecelik kuramı kapsamına giren değişimler ihmal edilmiş, yalnız genel görecelik kuramı kapsamına giren, çekim kuvvetinin görecelik etkinliği uygulanmıştır.

Bu örnek, görecelik kuramı kapsamına giren olayların, göreceli uzayda gerçekleştiğini ve izotrop koordinatlarda gayet basite indirgendiğini bize göstermektedir.

X
DÖRT BOYUTLU GÖRECELİ UZAY

Dört Boyutlu Göreceli Uzay

Konunun içeriği nedeni ile, üç boyutlu uzay deyimi, sık sık kullanılacaktır. Kısalığı sağlamak için, üç boyutlu uzay deyimi yerine, yalnız uzay deyimi kullanılacaktır.

(127) de dört boyutlu uzayın izotrop noktalarının barisantrik koordinatları verildi.

(265) $J_1(1, i, -1, -i)$, $J_2(1, 1, 1, 1)$, $J_3(1, -i, -1, i)$, $J_4(1, -1, 1, -1)$

Bu noktaların üçer, üçer belirledikleri düzlemlerin türdeş denklemlerini bulalım. Sıra ile dört boyutlu uzayın sonsuzundaki uzayda, $J_1J_2J_3$, $J_1J_2J_4$, $J_1J_3J_4$, $J_2J_3J_4$ noktaların belirlediği düzlemlerin türdeş denklemleri ,

(266) $P_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$ $P_2 = x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4 = 0,$

$P_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $P_4 = x_1 - ix_2 - x_3 + ix_4 = 0$

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 + E = 0$$

dır. Düzlemde doğrusal bağımsız iki nokta bir doğru belirler. Denklemi birinci derecedendir. Uzayda bir doğru ile, üzerinde bulunmayan bir nokta, bir düzlem belirler. Denklemi birinci derecedendir. Dört boyutlu uzayda ,bir düzlem ile üzerinde bulunmayan bir nokta, bir uzay belirler. Denklemi birinci derecedendir. Dört boyutlu uzayda, O(1, 0, 0, 0, 0) başlangıç noktası ile (266)'daki düzlemler, dört tane uzay belirlerler. Bu uzayların denklemleri, birinci dereceden olup, (266)'daki denklemlerin kendisidir. İzotrop noktaların oluşturdukları düzlemler, **izotrop düzlemler**, bunları başlangıca birleştiren üst düzlemlerle beraber, sonsuzdaki uzay, beş tane üst düzlem oluşturur ve **İzotrop üst düzlemler** adını alırlar.

$$P_0 = x_0 = 0, \qquad P_0P_1P_2P_3P_4 = 0$$

P_0 sonsuzdaki üst düzlemin denklemidir. Çarpım, dört boyutlu uzayda bir cisimdir. Beş köşeyle, $C^2_5 = 10$ ayrıtla, $C^3_5 = 10$ yüzle, $C^4_5 = 5$ uzayla çevrelenmiş dört boyutlu uzay cismine, **İzotrop üst beşyüzlü** denilecektir. x_0^5 ile bölünürse, izotrop üst beşyüzlünün, türdeş olmayan denklemi elde edilir. (266)'dan, değerler çarpım işleminde yerlerine konulursa,

(267) $P_1P_2P_3P_4 = x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 + 4(-x_1^2x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 - x_2x_3^2x_4 + x_1x_3x_4^2)$.

. $+ 2(-x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2) = 0$

$$x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 + 4(-x_1^2x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 - x_2x_3^2x_4 + x_1x_3x_4^2) + 2(-x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2) = 1$$

bulunur. (267) de verilen iki üst beşyüzlüden birincisi, izotrop üst beşyüzlü, ikincisi birim üst beşyüzlüdür. Her ikisi de, matematik olarak eşdeğer olan, analitik ifadelerdir. Dört boyutlu uzayda, izotrop noktalara dayalı olarak tanımlanacak, dört boyutlu uzayın göreceli uzunluğu, (145) de olduğu gibi, birim üst beşyüzlüye dayalı olarak da, tanımlanabilir. Aynı işlemler yapılırsa, bir noktanın, dört boyutlu uzayda, başlangıca göreceli uzaklığı,

(268) $d^4 = x_1^4 - x_2^4 + x_3^4 - x_4^4 + 4(-x_1^2x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 - x_2x_3^2x_4 + x_1x_3x_4^2) +$

$2(-x_1^2x_3^2 + x_2^2x_4^2)$

olur.

(265) ve (266) da verilen nokta koordinatları ve düzlem denklemleri, sonsuzdaki üst düzlemin, düzgün barisantrik koordinat dörtyüzlüsüne göre, barisantrik koordinatlardır. Aynı zamanda dört boyutlu uzayın dik koordinat sistemine göre, dik koordinatları ve dik düzlem denklemleridir. Bu özelik (117) de açıklandı. (268) uzunluk formülünün elemanları, noktanın dört boyutlu uzayda, dik koordinatlarıdır. (268) göreceli uzunluk formülünün verilmesi ile, dört boyutlu göreceli uzay tanımlanmış olur.

Dört boyutlu uzay içinde bir üst düzlem göz önüne alalım. Bu üst düzlem içinde, bir noktada ikişer, ikişer birbirine dik üç tane doğru çizilebilir. Bu üç doğruya dik olan dördüncü doğruya, **üst düzleme dik doğru** veya **üst düzlemin normali** denilecektir. Örneğin dört boyutlu uzayda, dik koordinatların sanal ekseni, gerçel uzaya diktir. Bir doğruya dik olan iki üst düzlem, birbirlerine **paraleldir** denilir. Paralel üst düzlemler, sonsuzdaki üst düzlem üzerinde kesişirler. Normalleri dik olan üst düzlemlere, **dik üst düzlemler** denilecektir. Bir üst düzlemin birinci dereceden denkleminde, x_1, x_2, x_3, x_4 değişkenlerinin katsayıları, üst düzlem normalinin bileşenleridir. Üst düzlem normali, içindeki bütün vektörlere diktir. İki üst düzlem bir düzlem boyunca kesişir. İki üst düzlemin, bir ortak düzlemi vardır. Üç üst düzlem bir doğru boyunca kesişir. Üç üst düzlemin bir ortak doğrusu vardır. Dört üst düzlem bir noktada kesişir. Dört üst düzlemin ortak bir noktası vardır.

Dört Boyutlu Uzayda Karmaşık Sayılar ve İzotrop Koordinatlar

Karmaşık sayılar bölümünün başlangıcında (32) de, barisantrik koordinatlar ile dik koordinatlar arasında dönüşüm yapılmıştır. Bu dönüşümde, koordinat sistemlerinin tasarımı, 1 in küp kökleri ile dördüncü kökleri arasındaki ilgiye göre olmuştur. Yani Şekil 1,

$$\sqrt{3}\, i = j - k$$

bağıntısı gerçekleşecek biçimde düzenlenmiştir.

İzotrop koordinat eksenleri olarak, P_1 izotrop üst düzleminde üç koordinat ekseni ile, diğer üç izotrop üst düzlemin ortak noktaları olan B(0, 1, 1, 1, 1), O(1, 0, 0, 0, 0) noktalarını birleştiren izotrop doğru alınacaktır. Bu doğru, dört boyutlu uzayın dört koordinat ekseninin pozitif yöndeki açıortayıdır.

Dört boyutlu uzayda, sonsuzdaki üst düzlemin düzgün koordinat dörtyüzlüsü üzerinde, dik koordinat sistemi kurmak istiyoruz. Uzayın barisantrik ve dik koordinatları arasında dönüşüm yapılacaktır. Bu dönüşüm Şekil 7 de, uzayda barisantrik karmaşık sayılar paragrafında ve (152), (153) formülleri ile açıklandı. (182) ve (183) ile dönüşüm yapıldı ve (185), (186) ile, vektörler arası dönüşüm verildi. Birin küp kökleri ve dördüncü kökleri arasındaki ilginin korunması için, koordinat sistemlerinin, Şekil 7 de olduğu gibi konuşlandırılması zorunludur.

Sonsuzdaki düzgün koordinat dörtyüzlüsü içine, Şekil 7 de olduğu gibi, dik koordinatları yerleştirelim. Dört boyutlu uzayda dik koordinat sisteminin, sonsuzdaki uzayının sonsuzdaki düzlemi (barisantrik koordinat sisteminin birim düzlemi) üzerindeki, $A'_1(0, 1, 0, 0)$, $A'_2(0, 0, 1, 0)$, $A'_3(0, 0, 0, 1)$ noktaları, sıra ile sonsuzdaki uzayın, dik koordinat eksenlerinin, sonsuzdaki düzlemi üzerindeki noktalarıdır. Bu noktaların barisantrik koordinatları, (162) de ikinci dönüşümden

$$A'_1(3, -1, -1, -1),\ A'_2(0, -1 + \sqrt{3}, 2, -1 - \sqrt{3}),\ A'_3(0, -1 - \sqrt{3}, 2, -1 + \sqrt{3})$$

dür. B(0, 1, 1, 1, 1) ile beraber dört eksen, bileşenleri ile belirlenmiş olur. Sonsuzdaki uzayda bir noktanın, sonsuzdaki koordinat dörtyüzlüsüne göre barisantrik koordinatları, dört boyutlu göreceli uzay için, noktanın dik koordinatlarıdır. Bu özelik (117) de açıklandı. A'_1, A'_2, A'_3 noktaları, görceli dört boyutlu uzayın dik koordinatları ile verilmiş oldu. P_1 uzayında alınacak koordinat eksenleri bu noktalardan geçerlerse, P_1 ve sonsuzdaki üst düzlemde, dik koordinat eksenleri paralel olacağından, birin küp kökleri ve dördüncü kökleri arasındaki ilgi korunmuş olur. Barisantrik koordinatlar ve dik koordinatlar Şekil 7 de olduğu gibi konuşlandırılmalı ve sonsuzdaki koordinat sistemleri ile paralellik sağlanmalıdır.

Göreceli uzayın dik koordinatları ve izotrop koordinatları arasındaki, dönüşüm matrisini yazalım. Eksenlerin başlangıç noktaları O da çakıştığından, sabit terim gelmez. x_0 ile bölünürse, türdeş olmayan koordinatlar için dönüşüm matrisi, dördüncü mertebeden ortogonal olarak gelir. Bu noktalar sütun olarak yazılır ve elde edilen matris ortogonalleştirilirse, iki dik koordinat sistemi arasıdaki dönüşüm,

(269)
$$M = \begin{matrix} 3/\sqrt{12} & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/\sqrt{12} & (-1 + \sqrt{3})/\sqrt{12} & (-1 - \sqrt{3})/\sqrt{12} & 1/2 \\ -1/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} & 1/2 \\ -1/\sqrt{12} & (-1 - \sqrt{3})/\sqrt{12} & (-1 + \sqrt{3})/\sqrt{12} & 1/2 \end{matrix}$$

(270)
$$\begin{aligned} x_1 &= k[3/\sqrt{12}\, x'_1 + \quad * \quad\quad * \quad 1/2\, x'_4] \\ x_2 &= k[-1/\sqrt{12}\, x'_1 + (-1 + \sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_2 + (-1 - \sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_3 + 1/2\, x'_4] \\ x_3 &= k[-1/\sqrt{12}\, x'_1 + 2/\sqrt{12}\, x'_2 + 2/\sqrt{12}\, x'_3 + 1/2\, x'_4] \\ x_4 &= k[-1/\sqrt{12}\, x'_1 + (-1 - \sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_2 + (-1 + \sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_3 + 1/2\, x'_4] \end{aligned}$$

$$k^4 = 3\sqrt{3}/16$$

bulunur. k sayısı metrikte gelecek katsayıyı bire indirgemek için konulmuştur. Eksenleri izotrop olan koordinat sistemine, dört boyutlu uzayın **izotrop koordinatları** denilecektir. Matrisin evriği ile ters dönüşüm yazılır.

Göreceli uzaylarda, koordinat dönüşümleri, ortogonal matrislerle yapılır. Göreceli ortogonal matrislerle yapılmaz. Çünkü göreceli uzayın koordinat eksenleri, dik olduğundan ve bulunacak koordinat sistemi de, dik olacağından, dönüşüm matrisi ortogonal olmalıdır. Aksi halde, yeni koordinat sistemi dik olmaz ve eksenler üzerinde alınan, birim vektörlerin işlem özelikleri değişir.

Uzayda barisantrik karmaşık sayılar paragrafında ve şekil 7 de, birin dördüncü kökleri, düzgün dörtyüzlünün köşe noktalarına, yer vektörleri olarak konuşlandı. Bu düzgün dörtyüzlüyü, dört boyutlu uzayda, dik koordinat sisteminin sonsuzdaki üst düzlem üzerinde bulunan, koordinat dörtyüzlüsü olarak göz önüne alalım. Koordinat eksenlerinin sonsuzdaki uzayı deldiği noktalar, düzgün dörtyüzlünün köşeleri olsunlar. Dört boyutlu uzayda, dik koordinat sisteminde, bir vektörün bileşenleri, vektörün sonsuzdaki üst düzlemi deldiği noktanın sonsuzdaki koordinat dörtyüzlüsüne göre, barisantrik koordinatlarıdır. Sözü geçen noktanın, üst düzlem üzerindeki düzgün dörtyüzlüye göre yer vektörü, birin dördüncü kökleridir. Uzayda olduğu gibi, bu yer vektörleri aynı zamanda, dört boyutlu uzayın koordinat eksenlerinin birim vektörleri olarak algılanacaktır.

$$\mathbf{u} = \mathbf{OM} = \mathbf{1}x + \mathbf{e}_1 y + \mathbf{e}_2 z + \mathbf{e}_3 w$$

sayısına dört boyutlu göreceli uzayın **karmaşık sayısı** denilecektir. Bileşen sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğundan barisantrik biçim gerekmez.

Dört boyutlu göreceli uzayın, dik koordinat eksenlerinin sonsuzdaki üst düzlemi deldiği noktaları göz önüne alalım. Bu noktaları, sonsuzdaki üst düzlemin koordinat dörtyüzlüsüne göre, barisantrik vektörlerle ifade edelim.

(271) $$\boldsymbol{\tau}_1 = (3 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)/4, \qquad \boldsymbol{\tau}_2 = [(-1 + \sqrt{3})\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - (1 + \sqrt{3})\,\mathbf{e}_3]/4,$$
$$\boldsymbol{\tau}_3 = [(-1 - \sqrt{3})\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + (-1 + \sqrt{3})\,\mathbf{e}_3]/4, \qquad \boldsymbol{\tau}_4 = (1 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/4$$

Dört boyutlu uzayın, izotrop koordinat eksenlerinin, karmaşık sayılarla verilmiş birim vektörleri bulunur. Bu birim vektörlerin işlem özelikleri, eşitliklerin ikinci yanlarından kolayca bulunur.

(272) $$\boldsymbol{\tau}_1^2 = \boldsymbol{\tau}_1, \quad \boldsymbol{\tau}_1^3 = \boldsymbol{\tau}_1, \quad \boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau}_2, \quad \boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{\tau}_3, \quad \boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_4 = 0,$$
$$\boldsymbol{\tau}_2^2 = \boldsymbol{\tau}_3, \quad \boldsymbol{\tau}_3^2 = \boldsymbol{\tau}_2, \quad \boldsymbol{\tau}_2\boldsymbol{\tau}_4 = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_3\boldsymbol{\tau}_4 = 0, \quad \boldsymbol{\tau}_4^2 = 0$$

(273) $$\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}_1 x + \boldsymbol{\tau}_2 y + \boldsymbol{\tau}_3 z + \boldsymbol{\tau}_4 w$$

sayısına dört boyutlu uzayın **izotrop karmaşık sayısı** denilecektir

(270) ile verilen dönüşümü, (268) formülüne uygularsak, izotrop koordinatlarda uzaklık formülünü buluruz. Ancak bu işlem çok uzundur. Önce dönüşüm (266) da izotrop düzlemlerde yapılır, sonra bunların çarpımını alınır.. k sayısı yukarda verildi.

$$P_1 = 2/\sqrt{3}(x'_1 + x'_2 + x'_3)\,k, \quad P_2 = 1/\sqrt{3}[2x'_1 + (-1 + \sqrt{3}i)x'_2 - (1 + \sqrt{3}i)x'_3]\,k$$
$$P_3 = 2x'_4\,k, \qquad P_4 = 1/\sqrt{3}[2x'_1 - (1 + \sqrt{3}i)x'_2 + (-1 + \sqrt{3}i)x'_3]\,k$$
$$P_1 P_3 = 4/\sqrt{3}(x'_1 + x'_2 + x'_3)\,x'_4\,k^2, \quad P_2 P_4 = 4/3(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 - x'_1x'_2 - x'_2x'_3 - x'_3x'_1)\,k^2$$

(274) $$s^4 = k^4 P_1 P_2 P_3 P_4 = (x'^3_1 + x'^3_2 + x'^3_3 - 3\,x'_1 x'_2 x'_3)\,x'_4$$

Dört Boyutlu Uzayda İzotrop Silindirik Koordinatlar

$$x_1 = \rho\, T_1(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta), \qquad x_2 = \rho\, T_2(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta), \qquad x_3 = \rho\, T_3(\mathbf{j}\alpha + \mathbf{k}\beta), \quad x_4 = x_4$$

Konulursa, taban uzayı kutupsal koordinatlara geçmiş olur. İzotrop taban uzayı kutupsal koordinatlar olan, koordinat sistemine, **izotrop silindirik koordinatlar** denilir.

Dört boyutlu göreceli uzayda metrik,

(275) $$ds^4 = dx_1^4 - dx_2^4 + dx_3^4 - dx_4^4 + 4(-dx_1^2\, dx_2\, dx_4 + dx_1\, dx_2^2\, dx_3 - dx_2\, dx_3^2\, dx_4 + dx_1\, dx_3\, dx_4^2) + 2(-dx_1^2\, dx_3^2 + dx_2^2\, dx_4^2),$$

dört boyutlu göreceli uzayın, izotrop koordinatlarında metrik,

(276) $$ds^4 = (dx_1^3 + dx_2^3 + dx_3^3 - 3\, dx_1\, dx_2\, dx_3)\, dx_4$$

dört boyutlu göreceli uzayın, izotrop silindirik koordinatlarında metrik (237) den,

(277) $$ds^4 = (d\rho^3 + \rho^3\, d\alpha^3 + \rho^3\, d\beta^3 - 3\,\rho^2\, d\rho\, d\alpha\, d\beta)\, dx_4$$

olur.

Bilgisayar Programları

Program 1 : Bir üçyüzlünün bir iç açıortayı, üç tane de dış açıortayı vardır. Amaç bu açıortayları araştırmaktır. 11'nci satırda iki boyutlu A dizisi ile O notasından çıkan üç tane vektörün bileşenleri yazılmıştır. Bu vektörler bir üçyüzlünün doğrularıdır. Bunlar programın verileridir. Birinci indis üç elemanlı olup, uzayda vektörlerin bileşenleridir. İkinci indis vektörlerin numaralarıdır. A dizisi aynı zamanda, bu vektörlerin sonsuzdaki düzlem üzerindeki koordinat üçgenine göre, sonsuzdaki noktalarının barisantrik koordinatlarıdır. Açıortayların doğrultu bileşenleri, sonsuzdaki noktalarının barisantrik koordinatları olacaktır. Vektörlerin sonsuzdaki noktaları ile oluşan üçgen ABC olsun. Bu üçgenin açıortaylarının kesim noktası, aranılan açıortayların sonsuzdaki noktaları olacaktır. Açıortayların denklemlerinin bulunması için, bir noktanın bir doğruya uzaklık formülü kullanılacaktır. Bu formül ve diklik formülü barisantrik koordinatlarda kullanışlı değildir. Bu nedenle dik koordinatlara geçilecektir. 13 üncü satırda (32) dönüşüm formülü ile sonsuzdaki düzlem üzerinde, barisantrik koordinatlardan, dik koordinatlara geçilmiştir. A1 dizisi noktanın dik koordinatlarıdır. Birinci indis iki elemanlı olup, noktanın dik koordinatlarını, ikinci indis ise, üç elemanlı olup, noktanın sıra numarasıdır. 16'ncı satırda B dizisi ile, bu noktaların ikişer, ikişer belirledikleri doğruların, türdeş koordinatları verilmiştir. Birinci nokta ile ikinci noktanın belirlediği doğru 1, ikinci ile üçüncünün 2, diğeri de 3 numarası ile belirlenmişlerdir. 22'nci satırda C üç boyutlu dizisi ile, açıortayların türdeş koordinatları verilmiştir. p ve q sayıları, açıortay üzerindeki noktaların, ABC üçgeninin kenarlarına uzaklık formülündeki kare kök içinde olan paydadır. Kare kökün önünde iki işaret ayrı, ayrı alınmıştır. C'nin üçüncü indisi 1 ise, artı işaretlisi, 2 ise eksi işaretlisi alınmıştır. 27 inci satırda N üç boyutlu dizisi ile, açıortayların kesim noktalarının türdeş dik koordinatları verilmiştir. Birinci indis koordinatlar, ikinci indis yukarıdakine benzer biçimde noktaların sıra numarası ve üçüncü indis kare kökün artı veya eksi işaretlisini gösterir. Eğer üçüncü indis 1 ise, dış açıortayların kesim noktası, 2 ise, iç açı ortayların kesim noktasıdır. 32 inci satırda, M dizisi ile (32) dönüşüm formülü uygulanmış, barisantrik koordinatlara geçilmiştir. 36'ıncı satırda H formülü ile, bir noktanın barisantrik koordinatlarının toplamı bulunmuştur. Amaç, ABC üçgenini barisantrik koordinat üçgeni yapıp, açıortayların kesim noktalarının barisantrik koordinatlarını, bu koordinat sistemine göre bulmaktır. 38 inci satırda, nokta koordinatlarını, toplamlarına bölerek yeni bir A dizisi oluşturulmuştur. İki barisantrik koordinat sistemi arasındaki koordinat dönüşüm matrisi, yeni A matrisi olmuştur. (formül Prof Dr. Macit Büke Analitik Geometri I, kitabından alınmıştır.) Bu dönüşümde birinci yandaki üslü x_i ler, noktanın eski sisteme göre barisantrik koordinatları, ikinci yanda bulunan üssüz x_i'ler ise, yeni sisteme göre noktaların barisantrik koordinatlarıdır. Bu nedenle evrik matrisle, M noktası dönüştürülecektir. 40'ıncı satırda verilen T dizisi, A dönüşüm matrisinin ek matrisini hesaplamaya yarar. 42 inci satırda verilen A2 dizisi, A matrisinin minörleri ile oluşmuş ek matristir. 43 üncü satırda verilen dd, A matrisinin determinantıdır. 45 inci satırda, AA matrisi A'nın evriğidir. Ek matrisin devrik olması için, AA'nın bu tanımında, I ve J indis parametreleri yer değiştirmiştir. 47 inci satırda verilen S dizisi, M noktasının yeni koordinat sistemindeki, ABC üçgenine göre barisantrik koordinatlarıdır. Bu değerler, çıktıda N_1, N_2, N_3, N_4 ile verilmişlerdir. N_1 iç, diğerleri dış açıortayların barisantrik koordinatlarıdır. M ile verilen barisantrik koordinatlar, uzayda dik koordinatlara göre açı ortay doğrultularının bileşenleridir. 52 inci satırda verilen D dizisi, uzayda bulunan açıortay doğrultularının, aralarındaki açıların kosinüsleridir. Bu doğrultular iç çarpımları ile hesaplanmışlardır. F ve G dizileri, açıortay doğrultu vektörlerinin mutlak değerleridir. Eğer ABC üçgeni, sonsuzdaki koordinat üçgeni olursa, D, -1/3 ve 1/3 değerlerini alır. Uzayda dik koordinat sistemini oluşturan 1/8'lik, 8 tane uzay dilimi, yani düzgün dik üçyüzlü vardır. Yüz komşuluğunda olan iki düzgün dik üçyüzlünün açıortayları arasındaki açının kosinüsü 1/3, ayrıt komşuluğunda olan iki düzgün dik üçyüzlünün açı ortayları arasındaki açının kosinüsü -1/3 dür. Nokta komşuluğunda olan iki düzgün dik üçyüzlünün açı ortaylarınınki de –1 dir. Yani biri diğerinin uzantısındadır.

Bir üçyüzlünün iç ve dış açıortayları, üzerindeki bir noktanın yüzlere eşit uzaklıkta olması özeliğinden yararlanarak, analitik hesaplarla da bulunabilir. İki sonuç karşılaştırılarak, problemin sağlaması yapılır. ABC üçgeninin barisantrik koordinatlarını, A(2, 5, 11), B(5, 11, 2), C(11, 2, 5) koordinatları ile bir eşkenar üçgen seçelim.

M(1,1,1) = –2.02, M(2,1,1) = –1.15, M(3,1,1) = 0.57, M(1,2,1)= –1.15, M(2,2,1) = 0.57, . M(3,2,1) = – 2.02, M(1,3,1) = 0.57, M(2,3,1) = – 2.02, M(3,3,1) = – 1.15,
M(1,1,2) = – 2.59, M(2,1,2) = – 2.59, M(3,1,2) = – 2.59
D(1,2,1) = 0.086, D(2,3,1) = 0.086, D(3,1,1) = 0.086, D(1,2,2) = 0.62, D(2,3,2) = 0.62, D(3,1,2) = 0.62
N_1(–2.59, –2.59, –2.59), N_2(2.59, –2.59, –2.59), N_3(–2.59, 2.59, –2.59), N_4(–2.59, –2.59, 2.59)

Bu koordinatlar barisantrik koordinatlar olduğundan,

N_1(1, 1, 1), N_2(–1, 1, 1), N_3(1, –1, 1), N_4(1, 1, –1)

dır.

Program 2 :

(92) ile üçlü envolüsyon denklemi verilmiştir. Her biri, üç noktadan oluşan üç nokta kümesi bir envolüsyon belirler. Bu envolüsyonun katsayıları, (100) denkleminin çözümü ile hesaplanır. Üçlü üç nokta kümesi alınmış, bu noktaları kök kabul eden üçüncü derece denklemleri kurulmuş, bu denklemlerin katsayıları ile envolüsyonun katsayıları arasında (94) ile verilen bağıntı ile, (100) denklem sistemi ortaya konulmuştur. Program 2 de, noktaların parametreleri karmaşık sayılar olarak alınmış, (100) denklem sistemi, karmaşık sayılarla, katsayılar matrisinin minörlerinin, oranı olarak çözülmüştür. (92) envolüsyon denkleminin katsayıları hesaplanmıştır. Envolüsyonun (93) ile değişmez noktalarının denklemi verilmiştir. Değişmez noktaların (80) ile verilen doğrusal toplamları, envolüsyon denklemini sağlarlar. Program 2 karmaşık sayılarla, program 3 barisantrik karmaşık sayılarla, sözü edilen sağlama işlemini gerçekleştirmiştir. Özetle, üçlü envolüsyonun üçüncü dereceden değişmez noktalarının parametreleri, (93) üçüncü derece denkleminin çözümü, X, Y, Z karmaşık sayıları ile bulunmuştur. (80) ile belirlenen değişmez noktaların doğrusal toplamları da, (92) envolüsyon denklemini sağlarlar. İkinci ve üçüncü programlarla, bu sağlama işlemleri yapılmıştır. (120) ile verilen izotrop noktaları değişmez nokta kabul eden, (137) ile verilen üçlü dik envolüsyon formülünde, n'ye 2, 3, 4 değerleri verilerek, elde edilen üçlü dik envolüsyon kümesinin noktaları üzerinde, her iki programda da, aynı sonuçlar bulunmuştur. (80) ile belirlenen üçlü envolüsyon denklemi,

$$D = X + 2Y + 4Z$$
$$E = X + 2jY + 4kZ$$
$$F = X + 2kY + 4jZ$$

(1, 2, 4), (1, 2j, 4k), (1, 2k, 4j) sayılarının, doğrusal toplamı olarak yazılmıştır. Doğrusal toplamlar ancak, türdeş koordinatlarda yapılabilirler. (92) üçlü envolüsyon denklemindeki sağlama işlemler ise, türdeş olmayan koordinatlarda, noktaların karmaşık sayı parametreleri ile yapılabilir. Bu nedenle yeni elde edilen türdeşlik koordinatına D, E, F noktalarını bölmek suretiyle, türdeş olmayan koordinatlara geçilmiştir. Başlangıçta türdeşlik koordinatı 1 dir. Doğrusal toplamdan sonra, elde edilecek türdeşlik koordinatına bölünür ve bölüm gene aynı harflerle gösterilirse,

$$D = (2X + 4Y + 5Z)/(2 + 4 + 5)$$
$$E = (2X + 4jY + 5kZ)/(2 + 4j + 5k)$$
$$F = (2X + 4kY + 5jZ)/(2 + 4k + 5j)$$

olur. X, Y, Z parametreleri karmaşık sayılar olduklarından, D, E, F noktalarının da, türdeş olmayan karmaşık sayılarla parametrik gösterilimi bulunmuş olur. Bu parametrelerle, (92) üçlü envolüsyon denkleminin sağlandığı, iki ve üçüncü programlarda gösterilmiştir.

Başlangıçta Carp alt programı, karmaşık sayıların çarpımını, Arg alt programı, karmaşık sayıların Moivre formülüne dayanarak, kuvvetini ve kökünü alır. Bol alt programı da bölme işlemi yapar. Veriler karmaşık sayı olarak, yani dik kordinatlarda, verilecektir. Burada program 3 ile sonuçları karşılaştırmak için, (120) de verilen izotrop noktaları değişmez nokta olarak alan, üçlü envolüsyon alınmıştır. Veriler barisantrik karmaşık sayı olarak verilmiş, sonra dönüşüm formülü ile dik koordinatlara geçilmiştir. Satır 34 de üç boyutlu a dizisinde veriler vardır. Birinci indiste iki eleman olup, karmaşık sayının 1 ile gerçel, 2 ile sanal kısmı verilmiştir. İkinci indis, noktanın küme numarasıdır. Nokta kümeleri, bir matris olarak düşünülecek, determinantlar hesaplanacak ve küme numarası satır numarası olacaktır. Üçüncü indis, noktanın küme içindeki numarası veya sütun numarasıdır. (93) değişmez noktaların denkleminde küplü terimin katsayısı, 1 e indirgenmiş olduğundan, (100) denklem sisteminin dördüncü bilinmeyeninin katsayısı 1 gelmiştir. Bu nedenle dördüncü nokta kümesi birim alınmıştır. Satır 36 da a3 iki boyutlu dizisi ile, nokta kümelerinin toplamı oluşturulmuştur. Önüne negatif işaret konulmuştur. Çünkü kuracağımız üçüncü derece denkleminde, ikinci katsayı, köklerin toplamının ters işaretlisidir. Aynı işlem köklerin üçlü çarpımında da yapılacaktır. Satır 41 de noktaların ikili çarpımının toplamı a2 dizisi ile, satır 44 de üçlü çarpım a1 ile verilmiştir. Satır 46 da bu iki boyutlu diziler, üç boyutlu bir diziye atanmışlardır. Satır 46 da, (100) denkleminin çözümü olacak ab minörleri oluşturulmuştur. Katsayılar matrisinden sıra ile bir sütun atarak, bulunan minörlerin hesabı yapılmıştır. N sayısı minörlerin sıra ile işaretini değiştirir. Satır 51 de determinantlar açılır. C1 dizisi determinant hesabında gelecek, pozitif terimlerin C2 negatif terimlerin dizisidir. C3 dizisinde yapılan işlem, pozitif terimlerin üçüncü terimle çarpımı, C4 negatif terimlerin üçüncü terimle çarpım dizisidir. Toplam, D dizisi olarak verilmiştir. D dizisi iki boyutlu ve ikinci boyut dört elemanlıdır. Satır 62 de envolüsyon denkleminin birinci katsayısını 1 yapmak için, birinci determinanta bölme yapılmış, ad dizisi bulunmuştur. Çözüm türdeş olduğundan, buna hakkımız vardır. Satır 64 de ad iki boyutlu dizisi, bir boyutlu üç diziye atanmıştır. ad1 dizisi (93) denkleminde ikinci katsayı, ad2 üçüncü, ad3 de dördüncü katsayıdır. ad1 ve ad3 dizilerinin eşitliğinin ikinci yanına – işareti konulmuştur. ad1, ad2, ad3 dizileri (100) denklem sisteminin çözümleridir. b ve d'nin sütunlarında – işareti vardır. Eksi işareti konulmasaydı, –b ve –d değerleri hesaplanmış olacaktı. Halbuki (92) denkleminde, bu bilinmeyenlerin pozitif değeri konulacaktır. Carp alt programı ile DIS (17) ile verilen diskriminant dizisi ve b6 ile (18) de verilen, üçüncü derece denkleminin, küp kök içindeki terimi oluşturulmuştur. Arg alt programı ile bunların kare kökü ve küp kökü alınmıştır. b ve e dizileri cebirsel denklemin katsayılarıdır. DIS üçüncü derece denklemin diskriminantıdır. Böylece T ve TR dizileri ile 72 inci satırda (14) ile hesaplanan TP dizisi bulunmuştur. Satır 73 de jj ile j ve kk ile k, 1'in küp köklerinin karmaşık sayı değerleri verilmiştir. Satır 76 da, değişmez noktaların üçüncü derece denkleminin X, Y, Z kökleri hesaplanmıştır. Satır 83 de t8, t9, b5 ile, köklerin (80) üçlü envolüsyonun doğrusal toplamı, 1, 2, 4 sayıları ile oluşturulmaya başlanmış ve b5, b6, b7 dizilerinin bulunması ile tamamlanmıştır. Noktaların doğrusal toplamları, türdeş koordinatlarda tanımlanmıştır. Bu nedenle doğrusal toplamda, türdeşlik koordinatında oluşan sayıya, doğrusal toplam bölünür ve türdeş olmayan koordinatlara yeniden geçilir. Doğrusal toplamın oluşturulmasında yapılan ara işlemler, sözü edilen bölme işlemleridir. t1, t2, t3 dizileri, b5, b6, b7 doğrusal toplam dizilerinin toplamı, ikişer, ikişer çarpımlarının toplamı ve üçünün çarpımı olup, 90'ıncı satırda, üçlü envolüsyon denkleminde yerine konulmuş, f1 dizisi (92) üçlü envolüsyonun parametrik denklemi olup, bu denklemin aldığı değerler dizisidir. Sıfır olduğu görülmüştür.

Yukarıdaki veriler, üçlü dik envolüsyonun elemanları ile oluşturulmuştur. Değişmez noktaları $J_1(1, -k, j)$, $J_2(1, -1, 1)$, $J_2(1, -j, k)$ noktalarıdır. Üç tane üçlü noktalar kümesi ile, üçlü envolüsyonun değişmez noktaları belirlenebilir. Bu işlem gerçekleştirilmiş ve bu noktaların karmaşık sayılarla olan parametreleri bulunmuştur. Değişmez noktaların parametrik değerleri, (60), (62), (63) formülleri ile hesaplandı.

$$\rho_{J1} = (1 - \sqrt{3}\, i)/4, \qquad \rho_{J2} = 1 - \sqrt{3}\, i, \qquad \rho_{J3} = -1 + \sqrt{3}\, i$$

Program 3 :

Program 2 de olduğu gibi, üçlü noktalardan oluşan, üç tane bağımsız nokta kümesi, üçlü envolüsyonu belirler. Bu kümeler üç boyutlu a dizisi ile verilmişlerdir. Birinci indis 3 elemandan oluşan, barisantrik koordinatları içerir. İkinci indis küme numarasını, üçüncü indis de noktanın küme içindeki numarasını gösterir. Dördüncü küme birimdir. Çünkü, üçlü envolüsyon denkleminin ilk katsayısı, 1 e indirgenmişti. Bu indisler noktaların oluşturacağı koordinat matrisinin, satır ve sütun numaraları olarak da kullanılacaktır. Veriler, (120) ile verilen izotrop noktaları, değişmez nokta kabul eden, (137) ile verile üçlü dik envolüsyon kümesinin üçlü noktalarıdır. Bu noktala üzerinde işlemler yapılmış ve aynı sonuçlar bulunmuştur. Carp alt programı, çarpımı, Arg alt programı da, kare kök ve küp kökü alır. 20 inci satırda r1 göreceli uzaklığın küpüdür. Ardından gelen cc3 = Tgφ , aa1 = r, ar[0] = α , ar[1] = β, olup, (178) formülleri ile, belirlenen değerlerdir. TP iki boyutlu dizisinin birinci indisi, T1, T2, T3 trigonometrik serilerini, ikinci indisi α ve β argümanlarını verir. β'nın katsayısının k gelmesi için, ikinci ve üçüncü koordinatlar yer değiştirmiştir. 39 uncu satırda, Bol alt program, karmaşık sayıların bölümünü yapar. Satır 44 de veriler sıralanmıştır. Veriler, (120) formülü ile verilen izotrop noktaları, değişmez noktalar kabul eden, dik üçlü envolüsyonun nokta kümeleridirler. İkinci programda alınan nokta kümeleriyle aynıdır. Sonuçların karşılaştırılması için, aynı alınmıştır. 55 inci satırda a3 dizisi ile noktaların toplamı verilmiştir. Bu toplam, noktaları kök kabul eden, üçüncü derece derece denklemin oluşturulmasında kullanılacaktır. Aynı işlem, noktaların üçlü ve ikili çarpımlarında da yapılacaktır. Satır 61 de noktaların ikili çarpımlarının toplamı a2 dizisi ile, ardından noktaların üçlü çarpımı, a1 dizisi ile verilmişlerdir. a1 ve a3, 3'e bölünmüşlerdir. Çünkü (93) ve (98) formüllerinden görüleceği gibi, köklerin toplamı ve ikili çarpımlarının toplamı, 3b, 3c, 3b', 3c' ile formüle girmişlerdir. Bulunacak bilinmeyenler, (100) de, 3b ve 3c dir. (100) de formülde yalnız, b' ve c' kalmaktadırlar. Bunlar da, burada hesaplanan, 3b' ve 3c' büyüklüklerinin 1/3'üdürler. Satır 66 da bu diziler üç boyutlu ab dizisine atanmışlardır. Satır 69 da, üç satır, dört bilinmeyenli türdeş denklem sisteminin katsayılar matrisi, ab dizisinden, bir sütun atarak, minörler oluşturulmuştur. N işaret değişkenidir. Satır 72 de C1 ile, determinantın pozitif gelen iki terim çarpımı, C2 ile, negatif gelen iki terim çarpımı, CC ile pozitif gelen üç terim çarpımı, CD ile de negatif gelen üç terim çarpımı gösterilmiştir. Satır 81 de CC-CD'nin farkı, D iki boyutlu determinant dizisine atanmıştır. D'nin sonunda 1/3 eklemesi yapılmıştır. Çünkü çıkarma işlemi nedeni ile, p = 1/3 alınmış ve bileşenleri toplamı, 0 olan barisantrik karmaşık sayı, barisantrik biçime getirilmiştir. 1/3 her döngüde eklendiğinden, barisantrik karmaşık sayıya 1/3(1 + j + k) eklenmiş ve sayı barisantrik konuma gelmiş olur. Bu konu, 9 ve 11 inci sayfalarda açıklandı. Ardından, D ile bulunan üçlü envolüsyon denkleminin, türdeş birinci katsayısını, 1 e indirgemek için, u1 ile bölme yapılmıştır. ac dizisi üçlü envolüsyonun, diğer katsayılarıdır. Satır 86 da, ac dizisi, üçüncü derece denkleminin çözümünde kullanılabilmesi için, bir boyutlu dizilere atanmıştır. ad1 ve ad3'ün ikinci yanına eksi işareti konulmuştur. Çünkü (100) denkleminde b ve d'nin bulunduğu sütunda – işareti vardır. Ardından gelen çarpma işlemleri ile, üçüncü derece denklemin DIS dizisi, (17) formülündeki diskriminantı, e10 dizisi ile, (18) formülündeki küp kök içi verilmiştir. Diskriminantın kare kökü, diğerinin de küp kökü alınmış T ve TR dizileri ile verilmiştir. Satır 94 de (14) formülünün TR ile bölümü TP ile verilmiştir. Ardından gelen H j'nin, HG k'nın barisantrik koordinatlarıdır. Satır 98 de, değişmez noktaları veren, üçüncü derece denklemi çözülmüştür. Satır 103 de, ikinci programda olduğu gibi, 3, 4, 5 sayıları ile, (80) üçlü envolüsyon denklemine uygun köklerin, bir doğrusal toplamı oluşturmaya başlanmıştır. t8, t9, b5 türdeş doğrusal toplamlardır. Doğrusal toplamlar türdeş koordinatlarda tanımlanmıştır. Bu doğrusal toplamları, türdeş olmayan doğrusal toplam yapmak için, türdeşlik koordinatında oluşan sayı ile, doğrusal toplamlar bölünmelidir. b5, b6, b7 dizileri, türdeş olmayan doğrusal toplamlardır. Aynı zamanda barisantrik karmaşık sayı olup, nokta üçlüsünün doğrusal toplamlarının parametreleridir. Bu diziler üçlü envolüsyon denklemini, (92) sağlamalıdırlar. Doğrusal toplamların toplamları t1, ikişer, ikişer çarpımlarının toplamları t2, üçlü çarpımı t3 dizileri ile verilmişlerdir. Satır 109 da bu değerler yerine konulmuş ve f1 üçlü envolüsyonun parametrik denkleminin sağlama dizisinde, sıfır olduğu görülmüştür. Sonuçta dik üçlü envolüsyonun, değişmez noktalarının barisantrik karmaşık sayıları bulunmuştur. Bu parametrik değerler, (60), (62) ve (63) formüllerinde hesaplandı.

$$\rho_{J1} = -j/2, \qquad \rho_{J2} = -2j, \qquad \rho_{j3} = j$$

Üçlü envolüsyona uygun nokta üçlülerinin, üçlü envolüsyon denklemini sağlayacağı, bir gerçektir. Problem, burada daha çok, düzlemde noktaların parametrelerinin, dik karmaşık sayılar ve barisantrik karmaşık sayılar la gösterilimine, bir uygulama olarak, değer taşıyacaktır.

Program 4

Bu programda uzayda bileşenleri ile verilen bir vektör, üstel Öklidsel ve üstel göreceli karmaşık sayıları yazılacaktır. 4 üncü satır, uzay vektörünün bileşenleridir. 6' ıncı satır ve sonralarında, (176) formülü ile r uzaklığı ve φ argümanı hesaplanmıştır. 9 ve 10 uncu satırlarda, (178) formülü ile α ve β argümanları hesaplanmıştır. Ardından gelen For döngüsü ile argümanlar seriye açılmış ve uzay vektörünün sonsuzdaki noktasının, barisantrik koordinatları olan trigonometrik oranlar hesaplanmıştır. Bu koordinatlar iki boyutlu P dizisi ile verilmiştir. Dizinin birinci boyutu iki eleman olup, birincisi α ikincisi β argümanlarına bulunan koordinatlardır. Ardından gelen aa ve T1, T2, T3 sayıları ile, verilere dayalı trigonometrik oranlar hesaplanmıştır. Bu P dizisi ile verilen koordinatlarla, iki boyutlu trigonometrik oranlar hesaplanmıştır. Bu oranlar ile yeni vektörün bileşenleri a, b, c bulunmuştur. Elde edilen bileşenler ilk bileşenlerle karşılaştırılmıştır.

Program 5

Bu programda gerçel ve karmaşık katsayılı ikinci, üçüncü ve dördüncü derece denklemlerin çözümleri verilmiştir. Alt programlardan sonra 21 inci satırda n tam sayı değişkenine denklemin derecesi girilmelidir. a dizisi ile dördüncü derece, b dizisi ile üçüncü derece ve c dizisi ile de, ikinci derece denklemlerin katsayıları verilmiştir. Çözülecek denklemin katsayıları, bu dizilere girilmelidir. Diziler bir boyutlu ve iki elemanlıdır. Birinci eleman karmaşık sayının gerçel terimi için, ikinci eleman sanal terimi için ayrılmıştır. Eğer sayı gerçel ise, sanal terim karşısına sıfır konulmalıdır.

Formüllerde kullanılan değişkenler, mümkün olduğu kadar anlamını ifade edecek biçimde seçilmiştir. Program (14) numaralı formülden, (31) numaralı formüle kadar olan formüllerin bir uygulamasıdır.

Her çözümün altında sağlaması verilmiştir. Sağlama sıfır çıkmıyorsa, önce bir yazılım yanlışlığı araştırılmalıdır. Sonra 44 üncü satırda Kok alt program çağrısında y yardımcı değişkeni, X1 in küp kökü olarak hesaplanmıştır. Aynı işlemle 53 üncü satırda Y1 ve Y3 ün kare kökü olarak y ve z yardımcı değişkenleri hesaplanmıştır. Bazan rastlantı olarak bunlardan biri veya ikisi sıfır olabilir. Bunların değerleri araştırılmalıdır. Birincide y kök olarak bulunduktan sonra, z için kök almıyoruz, katsayıların bağıntısını y ye bölerek z yi hesaplıyoruz. az değişkeni y'nin tersidir. Benzer işlem ikincide t yi bulmak için yapılmıştır.

Eğer bu bölenler sıfır gelmişse, sıfırla bölme karşımıza çıkmaktadır. Bu sıfır değeri bölme ve kök işlemlerinin kalıntılarının birikimi nedeni ile, bilgisayarda sıfır olarak görülmüyor, 10^{-14} düzeyinde bir sayı olarak görülüyor.bu nedenle bilgisayar sıfırla bölme uyarısı vermiyor. Bu sorunu gidermek için sıfır gelen değişken, yanındaki diğer denklem kökünden hesaplanmalıdır.

Program 1

```
{$N+}
Var
A, B, A1, A2, AA     : Array[1..3,1..3] Of Extended;   F,G   : Array[1..3,1..2] Of  Extended;
M, N, S, C, D  :  Array[1..3,1..3,1..2] Of Extended;         H  :  Array[1..3] Of Extended;
T :Array[1..4] Of  Integer;           I, J, I1, J1, J2, J3  : Integer;           p, q, dd  : Extended;
Begin
A[1,1] := 2;   A[2,1] := 5;     A[3,1] := 11;    A[1,2] := 5;    A[2,2] := 11;
A[3,2] := 2;      A[1,3] := 11;      A[2,3] := 2;    A[3,3] := 5;
For I:=1 To 3 Do
Begin
 A1[1,I] := (2*A[1,I] - A[2,I] - A[3,I]) / (2*(A[1,I] + A[2,I] + A[3,I]));
A1[2,I] := (Sqrt(3) * (A[2,I] – A[3,I] )) / (2*(A[1,I] + A[2,I] + A[3,I]));
End;   For  J := 1   To   3   Do    Begin     I1 := J + 1;   If   I1 = 4    Then    I1 := 1;
B[1,J] := A1[1,J]*A1[2,I1] – A1[2,J]*A1[1,I1];
B[2,J] := A1[2,J] – A1[2,I1]; B[3,J] := A1[1,I1] – A1[1,J]; End;
For I := 1 To  3   Do   Begin     J1 := I + 1;      If   J1 = 4  Then  J1 :=1;
p:= Sqrt(Sqr(B[2,I]) + Sqr(B[3,I]));
q := Sqrt(Sqr(B[2,J1]) + Sqr(B[3,J1]));
C[1,I,1] := B[1,I]/p + B[1,J1]/q;        C[2,I,1] :=B[2,I]/p + B[2,J1]/q;
C[3,I,1] := B[3,I]/p + B[3,J1]/q;         C[1,I,2] := B[1,I]/p – B[1,J1]/q;
C[2,I,2] := B[2,I]/p – B[2,J1]/q;         C[3,I,2] := B[3,I]/p – B[3,J1]/q;
End;  For I := 1  To   2    Do    Begin      For J := 1  To   3   Do     Begin
I1 := J + 1;      If  I1 = 4   Then       I1 := 1;
N[1,J,I] := C[2,J,I]*C[3,I1,I] – C[3,J,I]*C[2,I1,I];
N[2,J,I] := C[3,J,I]*C[1,I1,I] – C[1,J,I]*C[3,I1,I];
N[3.J,I] := C[1,J,I]*C[2,I1,I] – C[2,J,I]*C[1,I1,I];
End;   End;     For  J := 1  To  2   Do      Begin     For  I := 1   To  3   Do
Begin     M[1,I,J] := N[1,I,J] + 2*N[2,I,J];
M[2,I,J] := N[1,I,J] – N[2,I,J] + Sqrt(3)*N[3,I,J];
M[3,I,J] := N[1,I,J] – N[2,I,J] – Sqrt(3)*N[3,I,J];
End;   End;    For I := 1  To  3   Do     Begin     H[I] := 0;
For I1 := 1  To  3  Do   H[I] := H[I] + A[I1,I];   End;
 For I := 1  To  3   Do    Begin      For J := 1 To 3 Do
A[1,J] := A[1,J]/H[J];    End;      For I := 1  To   3   Do
Begin     For J := 1    To   3    Do      Begin
T[1] := I + 1;     T[2] := I + 2;      T[3] := J + 1;      T[4] := J + 2;
For J1 := 1  To   4    Do     If  T[J1] > 3   Then    T[J1] :=T[J1] – 3;
A2[I,J] := A[T[1], T[3]]*A[T[2], T[4]] – A[T[1], T[4]]*A[T[2],T[3]];
End;    End;       dd := A2[1,1]*A[1,1] + A2[1,2]*A[1,2] + A2[1,3]*A[1,3];
For   I := 1    To    3  Do      Begin      For  J := 1   To  3  Do      AA[1,J] := A2[J,1] /dd;
End;     For J1 := 1  To   2    Do     Begin      For J := 1 To    3    Do      Begin
For I := 1   To   3   Do      Begin      S[I,J,J1] := 0;      For J2 := 1  To   3    Do
S[I,J,J1] := S[I,J,J1] + AA[I,J2]*M[J2,J,J1];    End;    End;
```

```
End;     For J1 := 1   To   2     Do      Begin     For   I := 1    To    3     Do
Begin      F[I,J1]:= 0;      I1 := I + 1;  If  I1 = 4   Then     I1 := 1;
D[I,I1,J1]:= 0;       G[I1,1] := 0;        For J := 1   To   3    Do       Begin
F[I,J1] := F[I,J1] + Sqr(M[J,I,J1]);         G[I1,1] := G[I1,1] + Sqr(M[J,I1,1]);
D[I,I1,J1] := D[I,I1,J1] + M[J,I,J1]*M[J,I1,1];    End;
D[I,I1,J1] := D[I,I1,J1] / (Sqrt(G[I1,1]*F[I,J1]));      End;    End;     For J := 1   To   3   Do
Begin      For  I := 1    To    3   Do
Writeln(‘M[‘,I,’,’,J,’,’,’1] = ‘, M[I,J,1],’     ‘,’M[‘,I,’,’,’2] =’, M[I,J,2]);
Writeln;  End;  For J := 1 To 3 Do  Begin  J3 := J + 1;    If  J3 = 4   Then  J3 :=1;
Writeln(‘D[‘,J,’,’,J3,’,1] =’, D[J,J3,1],’    ‘,’D[‘,J,’,’,J3,’,2] =’, D[J,J3,2]);    End;
Writeln;  Writeln(‘   ‘,’N1’,’          ‘,’N2’,’            ‘,’N3’,’                ‘,’N4’);
For I := 1 To 3 Do
Writeln(S[I,1,2] : 15 : 11,’    ‘,S[I,1,1] : 15 : 11,’    ‘,S[I,2,1] : 15 : 11,’      ‘,S[I,3,1] : 15 : 11);
Readln;   End.
```

Program 2

```
{$N+}
Var
a, ab  : Array[1..2, 1..3, 1..4] Of Extended;    b, ac  : Array[1..2, 1..3, 1..3] Of Extended;
C1, C2 , C3, C4 ,a1, a2, a3, ad  : Array[1..2, 1..3] Of Extended;
I, J, L, J1, J2, J3, J4, K, M, N, M1  : Integer; D  :Array[1..2, 1..4] Of Extended;
 f1  : Array[1..2] Of Extended;   r1,s3, db : Extended;
Type                  TK3 = Array[1..2]  Of Extended;       Var
b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, b8, u1, p, u2, u3, u4, v1, v2, v3 : TK3;
e1, e2, e3, e4, e5, HC :TK3;       ad1, ad2, ad3, TR, TR1, TR2, X, Y, Z :TK3;
DIS, jj, kk, TP, TP1, TP2 :TK3;         t1, t2, t3, t4, t5, TA, TB, T: TK3;
s1, s2  : Real;           Procedure Carp (d1, d2: TK3 ;     Var  d3 :TK3);
 Begin      d3[1] := d1[1]*d2[1] – d1[2]*d2[2];         d3[2] := d1[1]*d2[2] + d1[2]*d2[1];
End;    Procedure  Yay(a1  : TK3;     ss : Real;      Var  a2 : TK3);  Var  dd, v  : Extended;
c, u : Real;     Begin     dd := a1[1]*a1[1] + a1[2]*a1[2];
If a1[1] <> 0  Then  c := Arctan(a1[2] /a1[1]);
If ((a1[2] < 0) And (a1[1] < 0))  Then c := c + Pi;
If ((a1[2] > 0) And (a1[1] < 0))  Then c := c + Pi;
If ((a1[2] = 0) And (a1[1] < 0))  Then c := Pi;
If ((a1[2] > 0) And (a1[1] = 0))  Then c := Pi / 2;
If ((a1[2] < 0) And (a1[1] = 0))  Then c := - Pi / 2;
u := c*ss;   v := Exp(Ln(dd)*ss / 2);     a2[1] := v*Cos(u);  a2[2] := v*Sin(u); End;
Procedure Bol (v,u : TK3;   Var  PR : TK3);  Var g1 : Extended;  Begin
g1:= Sqr(u[1] ) +Sqr(u[2]); PR[1]:= (v[1]*u[1] + v[2]*u[2])/g1;
PR[2]:= (v[2]*u[1] – v[1]*u[2])/g1;   End; Begin      s3 :=Sqrt(3);        a[1, 1, 1] := – 1;
   a[2, 1, 1] := – 2 ;     a[3, 1, 1] := 2;   a[1, 1, 2] := 2;      a[2, 1, 2] := – 2;   a[3, 1, 2] := – 1;
 a[1, 1, 3] := 2;     a[2, 1, 3] := 1;   a[3, 1, 3] := 2;       a[1, 2, 1] :=  – 2;       a[2, 2, 1] := – 6;
a[3, 2, 1] := 3;   a[1, 2, 2] := 6;       a[2, 2, 2] := – 3;       a[3, 2, 2] := – 2;     a[1, 2, 3] := 3;
a[2, 2, 3] := 2;       a[3, 2, 3] := 6;       a[1, 3, 1] := – 3;        a[2, 3, 1] := – 12;
a[3, 3, 1] := 4;       a[1, 3, 2] := 12;       a[2, 3, 2] := – 4;        a[3, 3, 2] := – 3;
a[1, 3, 1]:= 4;       a[2, 3, 3]:= 3;           a[3, 3, 3]:=12
For I:=1 To 3 Do Begin For J:=1 To 3 Do Begin
r1:= 2*(a[1, I, J] + a[2, I, J] + a[3,I,J]); r[1, I, J] := (2*a[1, I, J] – a[2, I, J] – a[3, I, J])/r1;
r[2, I, J] := s3*(a[2, I, J] – a[3, I, J])/r1; End; End; r[1, 1, 4] :=1; r[2, 1, 4] := 0;
r[1, 2, 4] :=1; r[2, 2, 4] := 0; r[1, 3, 4]:= 1; r[2, 3, 4] := 0;
For  I := 1   To  2   Do     Begin       For  J := 1    To    3    Do      Begin
```

```
a3[I, J] := 0;       For  L := 1  To    3    Do       a3[I, J] := a3[I, J] + r[I, J, L];
End;     End;    For  I := 1   To   2    Do     Begin      For L := 1   To   3    Do
Begin      a2[I, L] := 0;      For  J := 1   To  3   Do     Begin        N:= J + 1;
If   N > 3   Then   N := N – 3;          ac[1, L, J] := a[1, L, J]*a[1, L, N] – a[2, L, J]*a[2, L, N];
ac[2, L, J] := a[1, L, J]*a[2, L, N] + a[2, L, J]*a[1, L, N];     a2[I, L] := a2[I, L] + ac[I, L, J];
End;    End;    End;       For  L := 1    To    3   Do       Begin
a1[1, L] :=  ac[1, L, 1]*a[1, L, 3] – ac[2, L, 1]*a[2, L, 3];
a1[2, L] :=  ac[1, L, 1]*a[2, L, 3] + ac[2, L, 1]*a[1, L, 3]; End;     For   I := 1    To  2   Do
Begin      For   J := 1    To   3   Do  Begin          ab[I, J, 1] := – a1[I, J];
ab[I, J, 2] := a2[I, J]/3;         ab[I, J, 3] := – a3[I, J]/3;  ab[I, J, 4] := r[I, J, 4];  End;    End;
N := - 1;       For J1 := 1  To  4     Do  Begin     N := - N;      For I := 1    To    2    Do
Begin   For   J2 := 1    To  3    Do  Begin    For J3 := 1   To  3   Do       Begin
J4 := J2 + J1; If  J4 >4   Then  J4 := J4 – 4;       b[I, J3, J2] := N*ab[I, J3, J4];    End;
End;   End;   I := 1 To 2 Do Begin  D[I, J1]:= 0;    For J := 1   To   3    Do      Begin
L:= J + 1;  M:= J + 2;  If   M > 3   Then    M := M – 3;  If  L >3  Then  L := L – 3;
C1[1, J] := b[1, 1, J]*b[1, 2, L] – b[2, 1, J]*b[2, 2, L]; C1[2, J] := b[1, 1, J]*b[2, 2, L] +
b[2, 1, J] * b[1, 2, L];  C2[1, J] := b[1, 1, J]*b[1, 2, M] – b[2, 1, J]*b[2, 2, M];
C2[2, J] := b[1, 1, J]*b[2, 2, M] + b[2, 1, J]*b[1, 2, M];  C3[1, J] := C1[1, J]*b[1, 3, M] –
C1[2, J]*b[2, 3, M]; C3[2, J] := C1[1, J]*b[2, 3, M] + C1[2, J]*b[1, 3, M];
C4[1, J] := C2[1, J]*b[1, 3, L] – C2[2, J]*b[2, 3, L];  C4[2, J]:= C2[1, J]*b[2, 3, L] +
C2[2, J]*b[1, 3, L];  D[I, J1] := D[I, J1] + C3[I, J] – C4[I, J];  End; End; End;
db := D[1, 1]*D[1, 1] + D[2, 1]*D[2, 1];        For L := 1   To  3    Do      Begin
 ad[1, L] := (D[1, L + 1]*D[1, 1] + D[2, L + 1]*D[2, 1])/db;  ad[2, L] := (D[2, L + 1]*D[1,1]
– D[1, L + 1]*D[2, 1])/db; End;   For I := 1   To   2    Do     Begin         ad1[I] := - ad[I,1];
ad2[I] := ad[I, 2];        ad3[I] := - ad[I, 3];      End;        Carp (ad3, ad3, b1);
Carp (ad1, ad1, e1);      Carp (ad2, ad2, e2);       Carp (e1, e2, b2);
Carp (ad1, e1, e3);        Carp (e3, ad3, b3);       Carp (ad1, ad2, e4);     Carp (e4, ad3, b4);
 Carp (e2, ad2, b8);       For I := 1   To   2     Do
DIS[I] := 27*b1[I] – b2[I] + 4*b3[I] – 18*b4[I] + 4*b8[I]; s1 := 1/2;    Yay(DIS, s1, T);
For I := 1   To   2   Do   b6[I] := – 13.5*ad3[I] – e3[I] + 4.5*e4[I] + 1.5*s3*T[I];
s2 :=1/3;  Yay(b6, s2, TR);    For I := 1   To  2   Do  HC[I] := e1[I] – 3*ad2[I];
 Bol(HC, TR, TP);   jj[1] := – 1/2;      jj[2] := s3/2;  kk[1] := – 1/2;   kk[2] := – s3/2;
Carp(TR, jj, TR1);      Carp(TP, kk, TP1);   Carp(TR, kk, TR2);    Carp(TP, jj, TP2);
   For I := 1   To   2  Do   Begin X[I] := (- ad1[I] + TR[I] + TP[I])/3;    Y[I] := (- ad1[I] +
TR1[I] + TP1[I])/3;  Z[I] := (- ad1[I] + TR2[I] + TP2[I])/3;  End;
t4[1] ;= 2 + 4*jj[1] + 5*kk[1]; t4[2]:= 4*jj[2] + 5*kk[2];  t5[1] := 2 + 4*kk[1] + 5*jj[1];
t5[2] := 4*kk[2] + 5*jj[2];  t6 := 2 + 4 + 5;  Carp(jj, Y, b1); Carp(kk, Z, b2);
Carp(kk, Y, b3);      Carp(jj, Z, b4);   For I := 1   To  2   Do     Begin
TA[I] := 2*X[I] + 4*b1[I] + 5*b2[I];      TB[I] := 2*X[I] + 4*b3[I] + 5*b4[I];
b5[I] := (2*X[I] + 4*Y[I] + 5*Z[I])/t6;      End;  Bol(TA, t4, b6);  Bol(TB, t5, b7);
Carp(b5, b6, e1);       Carp(b6, b7, e2);    Carp(b7, b5, e3);        Carp(e1, b7, t1);
For  I :=1 To  2  Do      Begin     t3[I] := (b5[I] + b6[I] + b7[I])/3;
t2[I] := (e1[I] + e2[I] + e3[I])/3;   u1[I] := D[I, 1];     u2[I] := D[I, 2];    u3[I] := D[I, 3];
u4[I] := D[I, 4];    End;     Carp(u1, t1, v1);   Carp(u2, t2, v2);   Carp(u3, t3, v3);
For  I := 1   To  2   Do f1[I] := v1[I] + v2[I] + v3[I] + u4[I];   For  I := 1 To   2   Do
Writeln( f1[I]:17:13,’       ‘,X[I]:17:13,’        ‘,Y[I]:17:13,’        ‘,Z[I]:17:13);
Readln;  End.
```

Program 3

```
{$N+}
Var
```

```
a, ab  :Array[0..2, 0..2, 0..3] Of Extended;          b, aa  :Array[0..2, 0..2, 0..2 ] Of Extended;
C1, C2, CC, CD, a1, a2, a3, ac,  :Array[0..2, 0..2] Of Extended;
I, J, L, I1, J1, J2, J3, J4, J5, M, N, N1, N2 : Integer; D  : Array[0..2, 0..3]  Of   Extended;
Type       TK1 = Array[0..2] Of Extended;         TK2 = Array[0..51] Of Extended;
TK3 = Array[0..1] Of Extended;      TK4 = Array[0..2, 0..1] Of Extended;     Var
b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, au1, au2, au3, au4, g, at1, at2, at3 : TK1;
e1, e2, e3, e4, e5, e6 e7 e8, e9, e10, e12, HA, HC : TK1;
ad1, ad2, ad3, u1, u2, u3, u4, T, TR, TP, X, Y, Z, f1 :TK1;        s1, s2 :  Real;
DIS, H, HG, t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, v1, v2, v3  : TK1
Procedure  Carp(d1, d2 : TK1;   Var   d3 : TK1);  Var  M1, M2, K Integer;  Begin
For M1 := 0   To   2   Do      Begin       d3[M1] := 0;       For M2 := 0   To  2  Do Begin
K := M1 + 2*M2;       If  K > 2    Then    K := K – 3;     If  K>2   Then    K := K – 3;
d3[M1] := d3[M1] + d1[M2]*d2[K];     End;    End;    End;  Procedure Arg(R : TK1;
ss : Real;    Var     PA : TK1);  Var     B :  TK2;    I, I1 :Integer;   rr, r1, v1, v2, aa1, aa2, aa3,
cc1, cc2, cc3, cp, s3 : Extended; tr1, tr2, tr3, MA, BR  : TK1;  ar : TK3;   TP : TK4;    Begin
v1 := R[0]*R[0] + R[1]*R[1] + R[2]*R[2] - R[0]*R[1] - R[0]*R[2] - R[1]*R[2];
v2 := R[0] + R[1] + R[2];     r1 := v1*v2;  s3 := Sqrt(3)       If  r1 = 0    Then  rr := 0;
If  r1<> 0   Then    Begin    If   r1< 0    Then  rr := - Exp(Ln(- r1)*ss/3);
If  r1 > 0    Then  rr :=  Exp(Ln( r1)*ss/3);         aa1 := Sqrt(v1)/v2; cc2 := (R[1] – R[2])*s3;
cc1 := 2*R[0] – R[1] – R[2];         cc3 := cc2/cc1;
If  cc1 <> 0 Then    aa2 := Arctan(cc3);  If  ((cc2>0) And  (cc1<0))   Then   aa2 := aa2 + π;
If  ((cc2<0)   And  (cc1< 0))  Then  aa2 := aa2 + π;  If  ((cc2>0)   And (cc1 = 0))  Then
aa2 := π/2;     If  ((cc2<0)  And (cc1 = 0))  Then  aa2 := - π/2;
If  ((cc2 = 0)  And (cc1<0))  Then   aa2 := π;   If  aa1 < 0     Then  Begin
 ar[0] := (aa2/s3 – (Ln(-aa1) + π)/3)*ss;  ar[1] := - (aa2/s3 + (Ln(-aa1) + π)/3)*ss; End;
End; For I1 := 0  To  1  Do  Begin   TP[0, I1] := 1;        TP[1, I1] := 0; TP[2, I1] := 0;
   B[0] := 1;       For  I:= 1  To   50   Do      Begin
B[I] := B[I – 1]*ar[I1]/I;       J:= (I  Mod  3) ;          TP[J, I1] := TP[J, I1] + B[I];
End;    End;     For I := 0   To    2    Do       tr1[I] := TP[I, 0];      tr2[0] := TP[0,1];
tr2[1] := TP[2,1];       tr2[2] := TP[1,1];       Carp(tr1, tr2, tr3);   For  I := 0   To   2    Do
PA[I] := rr*tr3[I];      End;   Procedure Bol(v, u : TK1;    Var    w : TK1);     Var
s, s4 : TK1;        rb : Extended;         J1 : Integer;       Begin
rb := u[0]*u[0]*u[0] + u[1]*u[1]*u[1] + u[2]*u[2]*u[2] – 3*u[0]*u[1]*u[2];
s[0] := u[0]*u[0] – u[1]*u[2];        s[1] := u[2]*u[2] – u[0]*u[1];
s[2] := u[1]*u[1] – u[0]*u[2];  If  rb <> 0     Then      Begin     For J1 := 0  To  2   Do
s4[J1] := s [J1] / rb;  Carp (v, s4, w);  End;   End;    Begin     a[0,0,0] := 1;
 a[1,0,0] := 2;          a[2,0,0] := -2;      a[0,0,1] := -2;        a[1,0,1] := 2;
a[2,0,1] := 1;           a[0,0,2] := 2/5;        a[1,0,2] := 1/5;        a[2,0,2] := 2/5;
a[0,1,0] := 2/5;             a[1,1,0] := 6/5;          a[2,1,0] := -3/5;        a[0,1,1] := 6;
a[1,1,1] := - 3;            a[2,1,1] := -2;       a[0,1,2] := 3/11;        a[1,1,2] := 2/11;
a[2,1,2] := 6/11;         a[0,2,0] := 3/11;       a[1,2,0] := 12/11;         a[2,2,0] := - 4/11;
a[0,2,1] := 12/5;             a[1,2,1] := - 4/5;         a[2,2,1] := - 3/5;        a[0,2,2] := 4/19;
a[1,2,2] := 3/19;              a[2,2,2] := 12/19;         a[0,0,3] := 1;             a[1,0,3] := 0;
a[2,0,3] := 0;               a[0,1,3] := 1;           a[1,1,3] := 0;             a[2,1,3] := 0;
a[0,2,3] := 1;               a[1,2,3] := 0;           a[2,2,3] := 0;      For  I := 0  To   2   Do
Begin    For  J := 0  To  2    Do     Begin     a1[I, J] := 0;      For L := 0  To  2  Do
a1[I, J] := a1[I, J] + a[I, J, L]/3;    End;    End;      For  I := 0  To    2    Do
Begin     For  L  := 0    To    2    Do      Begin     a2[I,L] := 0;       For  J := 0  To  2  Do
Begin     N := J + 1;       If  N > 2   Then    N := N – 3;     For  N1 := 0  To   2   Do   Begin
aa[N1, L, J] := 0;     For  N2 := 0    To    2    Do      Begin     J1 := N1 + 2*N2;
```

```
 If   J1 > 2  Then    J1 := J1 – 3;          If  J1>2  Then  J1 := J1 – 3;
aa[N1, L, J] := aa[N1, L, J] + a[N2, L, J]*a[J1, L, N];     End;     End;
a2[I, L] := a2[I, L] + aa[I, L, J]/3;       End;     ,End;     End;    For  L := 0  To   2   Do   Begin
For  N1 := 0   To   2    Do     Begin    a3[N1, L] := 0;      For  N2 := 0   To   2    Do   Begin
J1 := N1 + 2*N2;  İf  J1 > 2   Then  J1 := J1 – 3;         If  J1> 2  Then  J1 := J1 – 3;
a3[N1, L] := a3[N1, L] + aa[N2, L, 0]*a[J1, L, 2] ;      End;    End;     End;
   For I := 0   To  2    Do  Begin    For  J := 0   To   2   Do    Begin    ab[I, J, 2] := – a1[I, J];
ab[I, J, 1] := a2[I, J];  ab[I, J, 0] :=  – a3[I, J]; ab[I, J, 3]:= a[I, J, 3];   End;     End;    N := - 1;
  For   I1 := 0   To   3    Do      Begin   N := - N ;     For J2 := 0   To   2   Do   Begin
For  J3 := 0  To  2   Do     Begin     For  J4 := 0    To   2    Do     Begin       J5 := J4 + I1 +1;
If  J5 > 3  Then    J5 := J5 – 4;     b[J2, J3, J4] := N*ab[J2, J3, J5];     End;   End;     End;
For  I := 0   To   2    Do    Begin    D[I, I1] := 0;      For J := 0    To   2   Do
Begin    L := J + 1;     M := J + 2;      If   M > 2   Then    M := M – 3;
   If   L > 2    Then  L := L – 3;     For  N1 := 0  To  2  Do    Begin     C1[N1, J] := 0;
  C2[N1, J] := 0;     For   N2 := 0   To   2    Do     Begin        J1 := N1 + 2*N2;
 If   J1 > 2  Then    J1 := J1 – 3;      If   J1 > 2    Then   J1 := J1 – 3;
C1[N1, J] := C1[N1, J] + b[N2, 0, J]*b[J1, 1, L];
C2[N1, J] := C2[N1, J] + b[N2, 0, J]*b[J1, 1, M];       End;    End;
For  N1 := 0   To   2   Do      Begin      CC[N1,J] := 0;     CD[N1,J] := 0;
 For  N2 := 0   To   2   Do    Begin     J1 := N1 + 2*N2;     If  J1>2  Then  J1 := J1 – 3;
If  J1 > 2  Then  J1 := J1 – 3;       CC[N1, J] := CC[N1, J] + C1[N2, J]*b[J1, 2, M];
CD[N1, J] := CD[N1, J] + C2[N2, J]*b[J1, 2, L];     End;      End;
 D[I, I1] := D[I, I1] + CC[I, J] – CD[I, J] + 1/3;    End;     End;     End;
For  I := 0    To   2    Do    Begin    u1[I] := - D[I, 0] ;   u2[I] := D[I, 1];    u3[I] := - D[I, 2];
u4[I] := D[I, 3];     End;       Bol(u2, u1, ad1);     Bol(u3, u1, ad2);   Bol(u4, u1, ad3);
Carp(ad3, ad3, e6); Carp(ad1, ad1, e1);   Carp(ad2, ad2, e2);     Carp(e1,e2, e12);
Carp(ad1, e1, e3);            Carp(e3, ad3, e7);     Carp(ad1, ad2, e4);  Carp(e4, ad3, e8);
Carp(e2, ad2, e9);  For   I := 0   To   2    Do
DIS[I] := 27*e6[I] – e12[I] + 4*e7[I] –18 *e8[I] + 4*e9[I];  s1 := 1/2;      s2 := 1/3;
Arg( DIS, s1, T);       For  I := 0   To    2    Do
e10[I] := - 13.5*ad3[I] –e3[I] + 4.5*e4[I] + 1.5*Sqrt(3)*T[I];
Arg(e10, s2, TR);       For  I := 0   To    2   Do  HC[I] := e1[I] – 3*ad2[I];   Bol (HC, TR, TP);
H[0] := 0;      H[1] := 1;  H[2] := 0;     HG[0] := 0;     HG[1] := 0;      HG[2] := 1;
Carp(TR, H, au1);   Carp(TP, HG, au2);        Carp(TR, HG, au3);   Carp(TP, H, au4);
For I := 0  To  2  Do   Begin         X[I] := (- ad1[I] + TR[I] + TP[I])/3;
 Y[I] := (- ad1[I] + au1[I] + au2[I])/3;         Z[I] := (- ad1[I] + au3[I] + au4[I])/3;    End;
 t4[0] :=1;       t4[1] := 2;      t4[2] := 4;        t6[0] := 1;     t6[1] := 4;       t6[2] := 2;
Carp[H, Y, b1);       Carp[HG, Z, b2);         Carp[HG, Y, b3);  Carp[H, Z, b4);
For  I := 0   To   2   Do     Begin      t8[I] := 1*X[I] + 2*b1[I] + 2*b2[I];
 t9[I] := 1*X[I] + 2*b3[I] + 4*b4[I];    b5[I] := (1*X[I] + 2*Y[I] + 4*Z[I])/12;       End;
Bol (t8, t4, b6);       Bol (t9, t6, b7);    Carp[b5, b6, e1);  Carp[b6, b7, e2);    Carp[b7, b5, e3);
Carp[e1, b7, t1); For  I := 0  To  2  Do  Begin       t3[I] := (b5[I] + b6[I] + b7[I])/3;
t2[I] := (e1[I] + e2[I] + e3[I])/3 ;  End; Carp(u1, t1, v1);   Carp(u2, v2, t2);  Carp(u3, t3, v3);
For I := 0  To  2   Do  f1[I] := v1[I] + v2[I] + v3[I] + u4[I];    For  I := 0  To   2   Do
Writeln(X[I]:17:12,'    ',Y[I]:17:12,'    ',Z[I]:17:12,'    ',f1[I]:17:12); Readln;   End.
```

Program 4

```
{$N+}    Var
a1, a2, a3, aa, ab, ac, bc, b, g, c, r, ee, d, f, h, T1, T2, T3 : Extended;
P  : Array[1..2, 0..2] Of Extended;    ea : Array[1..2]  Of Real;       I, J, N, I1  : Integer;
k, ka : Real;        Begin    k:= 0;   a1 := 7;   a2 := 13;       a3:= 4;        ka := Sqrt(3);
```

```
r := Sqrt(a1*a1 + a2*a2 + a3*a3 – a1*a2 - a2*a3 – a3*a1)/Sqr(a1 + a2 + a3);
d := ka*(a2 – a3);     f := 2*a1 – a2 – a3 ;    h := d/f;    If  f <> 0  Then  ee:= Arctan(h);
If  ((d > 0)  And  (f < 0))   Then  ee := ee + Pi;    If  ((d > 0)  And  (f = 0))  Then  ee := Pi/2;
If  ((d < 0)  And  (f = 0))  Then  ee := - Pi/2;       If  ((d = 0)  And  (f < 0))  Then  ee := Pi;
If  ((d < 0)  And  (f < 0))  Then  ee := ee + Pi;      ea[1] := (ee + 2*k*Pi) / ka – Ln (r) / 3;
ea[2] := - (ee + 2*k*Pi) / ka – Ln (r) /3;       For  N := 1   To   2    Do     Begin    g := 1;
P[N,0] := 1;     P[N,1] := 0;      P[N,2] := 0;      For  I := 1  To   50    Do      Begin
g := g*ea[N]/I;       J := I  Mod  3;       P[N,J] := P[N,J] + g;     End;     End;
aa := a1*a1 *a1 + a2*a2 *a2 + a3*a3* a3 – 3*a1*a2*a3;
 If   aa < 0    Then  aa := - Exp(Ln(-aa)/3);   If   aa > 0    Then   aa := Exp(Ln(aa)/3);
 T1 := a1/aa;       T2 := a2/aa;       T3 := a3/aa;     a1 :=1 + 2*r*Cos(ee);
a2 := 1 – r*Cos(ee) + ka*r*Sin(ee);        a3 := 1 – r*Cos(ee) – ka*r*Sin(ee);
Writeln('T1=',T1:15:10,'          ','T2=',T2:15:10,'            ','T3=',T3:15:10);
T1 := P[1,0]*P[2,0] + P[1,2]*P[2,2] + P[1,1]*P[2,1];
T2 := P[1,2]*P[2,1] + P[1,1]*P[2,0] + P[1,0]*P[2,2];
T3 := P[1,1]*P[2,2] + P[1,0]*P[2,1] + P[1,2]*P[2,0];
a := aa*T1;      b := aa*T2;        c := aa*T3;       Writeln;
Writeln('ea[1]=',ea[1]:13:10,'              ','ea[2]=',ea[2]:13:10);
Writeln('r =',r:15:10,'                 ','ee =',ee:15:10);
Writeln('T1=',T1:15:10,'          ','T2 =',T2:15:10,'           ','T3 =',T3:15:10);
Writeln('a =',a:15:10,'            ','b =',b:15:10,'                ','c =',c:15:10);
Writeln('a1 =',a1*7/a1:15:10,'    ','a2 =',a2*7/a1:15:10,'    ','a3 =',a3*7/a1:15:10);
Readln;   End.
```

Program 5

```
{$N+}      Var
s3, yaa, tt :Real;        Saglama : Array[0..1] Of Extended;          I, n :Integer;
Type          TK1 = Array[0..1] Of Extended;      Var
a1, a2, a3, a4, x, y, z, t, a1a2, a1a3, a12, a14, a24, a12a2, c1, c2, c12 :TK1;
b1, b2, b3, b4, b5, b6, b12, b1b2, b13, b22, b12b22, b13b3, b23, b32   :TK1;
diskok, dis, ya, za, zc, jy, jz, ky, kz, yz, j, k, a1a4, a2a3, a2a4  :TK1;
a3a4, a22, a1a2a3, a1a2a4, b1b2 b3, X1, X2, Y1, Y2, Y3, yz2, X12, X1c1  :TK1;
a1a3a4, a2a3a4, a1a2a3a4, a13, Z1, Z2,  Z3,  Z4, Z12, Z13, Z14,Saglama  : TK1;
Y12, Y13, Y14, Y12b1, Y1b2, Z13A1, Z12A2, Z1A3 :TK1;         s1, s2 :Real;
Procedure Carp(d1,d2 :TK1;   Var    d3 :TK1);  Begin
d3[0] := d1[0]*d2[0] – d1[1]*d2[1];        d3[1] := d1[0]*d2[1] + d1[1]*d2[0];    End;
Procedure Kok(aa : TK1;   ss :Real;    Var  ab : TK1);     Var      dd, v, u, c, cb  : Extended;
Begin   dd:= aa[0]*aa[0] + aa[1]*aa[1];      If  (aa[0] <> 0  Then  c:= Arctan(aa[1]/aa[0]);
If  ((aa[1] < 0)   And  (aa[0] < 0))   Then    c:= c + Pi;
If  ((aa[1] > 0)   And  (aa[0] < 0))   Then    c:= c + Pi;
If  ((aa[1] = 0)   And  (aa[0] < 0))   Then    c:= Pi;
If  ((aa[1] >0)    And  (aa[0] = 0))   Then    c:= Pi/2;
If  ((aa[1] < 0)   And (aa[0] = 0))    Then    c:= - Pi/2;
u := c*ss; v := Exp(Ln(dd)*ss/2);        ab[0] := v*Cos(u);        ab[1] := v*Sin(u);      End;
Begin       n := 4;     s1 := 1/2;     s2 := 1/3;      s3 := Sqrt(3);     a1[0] := - 4;    a1[1] := - 5;
a2[0] := 0;      a2[1] := 7;      a3[0]:= 40;     a3[1] := - 53;      a4[0] := - 145;      a4[1]:= 75;
b1[0] := -6;     b1[1] := - 2;      b2[0] := 12;       b2[1] := 7;      b3[0] := - 7;
b3[1] := - 9;     c1[0] := 5;        c1[1] := 0;       c2[0] := - 24;        c2[1] := 0;
  If  n = 4  Then      Begin         Carp(a1, a1, a12);           Carp(a1, a12, a13);
 Carp(a1, a13, a14);            Carp(a2, a2, a22);        Carp(a1, a2, a1a2);
Carp(a12, a2, a12a2);         Carp(a1, a3, a1a3);        For  I := 0  To  1   Do     Begin
```

```
b1[I] := - (- a2[I]/2 + 3*a12[I]/16);
 b2[I] := - a4[I]/4 + 3*a14[I]/256+a22[I]/16 – a12a2[I]/16 + a1a3/16;
b5[I]:= (- a3[I] – a13[I]/8 + a1a2[I]/2)/8;   End;
Carp(b5, b5, b6) ;       b3[0] := -b6[0];      b3[1] := - b6[1];    End;    If  n >2  Then    Begin
Carp(b1, b1, b12);      Carp(b1, b12, b
13);      Carp(b2, b2, b22);     Carp(b12, b22, b12b22)
Carp(b13, b3, b13b3);        Carp(b22, b2, b23);        Carp(b1, b2, b1b2);
 Carp(b1b2, b3, b1b2b3)       Carp(b3, b3, b32);       j[0] := - 1/2;       j[1] :=  s3/2;
 k[0] := - 1/2;       k[1] := - s3/2;         For  I := 0  To  1  Do   Begin
c1[I] := b3[I] + 2*b13[I]/27 – b1b2[I]/3;      yz[I] := b12[I]/9 – b2[I]/3;     End;
 Carp(yz ,yz, yz2);         Carp(yz, yz2, c2);       End;       Carp(c1, c1, c12);
For   I := 0   To  1  Do       dis[I] := (c12[I] – 4*c2[I] ;     Kok(dis, s1, diskok);
For I := 0  To  1  Do       Begin      X1[I] := (- c1[I] + diskok[I])/2;
 X2[I] := (- c1[I] – diskok[I])/2;   End;       Carp(X1, X1, X12);        Carp(X1, c1, X1c1);
For  I := 0   To  1   Do        Saglama[I] := X12[I] + X1c1[I] + c2[I];    For  I := 0  To  1  Do
Wirteln(‘X=’, X1[I]:15:10,’             ‘, X2[I]:15:10);
Writeln(‘Sağlama =’, Saglama[0]:15:10,’                  ‘,Saglama[1]:15:10);  Writeln;
Kok(X1, s2, y);       yaa[I] := y[0]*y[0] + y[1]*y[1];     za[0] :=y[0]/yaa;    za[1] := - y[1]/yaa;
Carp(yz, za, z);       Carp(j, y, jy);       Carp(k, z, kz);       Carp(k, y, ky);       Carp(j, z, jz);
For  I := 0  To  1   Do     Begin     x[I] := - b1[I]/3;          y1[I] := x[I] + y[I] + z[I]
y2[I] := x[I] + jy[I] + kz[I];         y3[I] :=x[I] + ky[I] + jz[I];   End;      For  I := 0  To  1  Do
Writeln(‘y =’,y1[I]:15:10,’         ‘,y2[I]:15:10,’                 ‘,y3[I]:15:10);
   Carp(y1, y1, y12);       Carp(y1, y12, y13);     Carp(y12, b1, y12b1);
Carp(y1, b2, y1b2);   For I := 0 To 1 Do  Saglama[I] := y13[I] + y12b1[I] + y1b2[I] + b3[I];
Writeln(‘Ysağlama =’, Saglama[0]:15:10,’               ‘,Saglama[1]:15:10);    Writeln;
Kok(y1, s1, y);     Kok(y3, s1, z);       Carp(y, z, yz);       tt := yz[0]*yz[0] + yz[1]*yz[1];
za[0] := yz[0]/tt;      za[1] := - yz[1]/tt;      Carp(b5 ,za, t);       For I := 0  To  1  Do   Begin
x[I] := - a1[I]/4;      z1[I] := x[I] + y[Y] + z[I] + t[I];        z2[I] := x[I] – y[I] + z[I] – t[I];
z3[I] := x[I] + y[I] – z[I] – t[I];         z4[I] := x[I] – y[I] – z[I] + t[I];        End;
Carp(Z1, Z1, Z12);          Carp(Z1, Z12, Z13);          Carp(Z1, Z13, Z14);
  Carp(a1, Z13, Z13a1);           Carp(a2, Z12, Z12a2);         Carp(a3, Z1, Z1a3);
 For  I := 0   To   1   Do
Writeln(‘z =’,z1[I]:15:10,’      ‘,z2[I]:15:10,’      ‘,z3[I]:15:10,’       ‘,z4[I]:15:10);
For  I := 0  To  1  Do     Saglama[I] := z14[I] + z13a1[I] + z12a2[I] + z1a3[I] + a4[I];
Writeln(‘Zsağlama =’, Saglama[0]:15:10,’             ‘,Saglama[1]:15:10);
```