ÜÇ BOYUTLU GÖRECELİ UZAY

İzotrop Noktalar

Düzlemde üç tane izotrop nokta ve bu noktaları birleştiren üç tane izotrop doğru vardır. Bu noktalar, $J_1(0, 1, i)$, $J_2(1, 0, 0)$, $J_3(0, 1, -i)$ noktalarıdır. Bu izotrop noktalar, Öklidsel düzlemi belirlemek için yeterlidir. Düzlemde izotrop doğruların çarpımı ile,

1) $d_1 = x_1 - ix_2 = 0$, $d_2 = x_1 + ix_2 = 0$, $d_1.d_2 = x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $d^2 = x_1^2 + x_2^2$,

izotrop daire, birim daire, bir noktanın başlangıca uzaklığı ve açıların ölçümü tanımlanır.

Uzayda iki sanal nokta yerine, üç noktanın karşılığı olacak, sanal konik, izotrop konik olarak alınır. Üç boyutlu Öklidsel uzayda izotrop konik, birim küre, bir noktanın başlangıca uzaklığı ve uzayda açıların ölçümü, Öklidsel uzayda tanımlanmış olur..

2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $d^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Uzayın izotrop noktaları, Karmaşık Sayılarda (106) ile,.$J_1(1, k, j)$, $J_2(1, 1, 1)$, $J_3(1, j, k)$ olarak bulundu. Bu noktalar sonsuzdaki düzlem üzerinde olup, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre barisantrik koordinatlarıdır. Çünkü karteziyen koordinatlarda, bir vektörün bileşenleri, sonsuzdaki koordinat üçgenine göre, vektörün sonsuzdaki noktasının barisantrik koordinatlarıdır. Aynı zamanda uzayda karteziyen koordinatlarda, bu noktayı başlangıca birleştiren vektörün bileşenleridir. Bu nedenle, sonsuzun düzlemi üzerindeki işlemler, barisantrik koordinatlarla yapılmalıdır. J_1 ve J_3 sonsuzdaki birim doğrusu üzerindedirler. J_2 sonsuzdaki koordinat üçgeninin ağırlık merkezindedir. İzotrop nokta olarak karteziyen koordinatları ile,

3) $J_1(0, 0, 1, i)$, $J_2(0, 1, 1, 1)$, $J_3(0, 0, 1, -i)$, $O(1, 0, 0, 0)$

dört tane ve izotrop düzlemler de dört tanedir. Sanal noktaları başlangıca birleştiren izotrop doğrularla, birim doğrusunu göz önüne alalım. Barisantrik koordinatlarda, birim doğrusu, sonsuzdaki düzlemin, sonsuzdaki doğrusudur. Karmaşık Sayılar (32) dönüşüm formülü ile barisantrik koordinatlara geçelim.

4) $\rho\, x_1 = x'_1 + x'_2 + x'_3$, $\rho\, x_2 = x_1 - x'_2/2 - x'_3/2$, $\rho\, x_3 =$ * $\sqrt{3}x'_2/2 - \sqrt{3}x'_3/2$

Bu dönüşümle, izotrop doğruların denklemleri veya bu doğruları başlangıca birleştiren düzlemlerin denklemleri,

5) $d_1 = x_1 + jx_2 + kx_3 = 0$, $d_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $d_3 = x_1 + kx_2 + jx_3 = 0$,

olur. Bu düzlemlerin çarpımı, **izotrop kübik yüzey**, 1'e eşitlenirse, **birim kübik yüzey** adını alır. Her ikisi de, matematik eşdeğerdir. Özelikleri aynıdır. Uzunlukların belirlenmesinde her ikisi de, dayanak olur.

6) $d_1 d_2 d_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3 = 1$,

$$d^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3$$

Böylece üç boyutlu göreceli uzay kurulmuş olur.

PQ doğru parçasına eşit ve paralel OA doğru parçasını çizelim.

7) $P(1, p_1, p_2, p_3)$, $Q(1, q_1, q_2, q_3)$, $A(1, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$, $O(1, 0, 0, 0)$,

$$B = A + \lambda O, \quad B(1 + \lambda, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3),$$

OA'nın birim kübik yüzeyi kestiği nokta, B bulunur.

$(q_1 - p_1)^3/(1+\lambda)^3 + (q_2 - p_2)^3/(1+\lambda)^3 + (q_3 - p_3)^3/(1+\lambda)^3 - 3(q_1 - p_1)(q_2 - p_2)(q_3 - p_3) = 1$,

$$d^3 = (q_1 - p_1)^3 + (q_2 - p_2)^3 + (q_3 - p_3)^3 - 3(q_1 - p_1)(q_2 - p_2)(q_3 - p_3),$$

$x_1 = (q_1 - p_1)/d^3$, $x_2 = (q_2 - p_2)/d$, $x_3 = (q_1 - p_1)/d$, $P_\infty(0, q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

olur. O, A, B, P_∞, noktaları bir doğru üzerindedir. Çifte oranı alınırsa,

8) $OA = PQ = d = [(q_1 - p_1)^3 + (q_2 - p_2)^3 + (q_3 - p_3)^3 - 3(q_1 - p_1)(q_2 - p_2)(q_3 - p_3)]^{1/3}$,

olur. Bu uzunluğa **göreceli uzunluk** ve uzaya da, **göreceli uzay** denilecektir. .Bu uzayda kullanılan koordinat sistemi, karteziyen koordinatlardır. Dört boyutlu göreceli uzayda, bu uzayın benzeridir.

Koordinat eksenlerinin pozitif yönünde, üç eksenin açıortayını, koordinat ekseni kabul eden, koordinat sistemine geçelim.

İzotrop Koordinatlar

Açıortayın sonsuzdaki düzlemi kestiği nokta $J_2(0, 1, 1, 1)$ noktasıdır ve izotroptur. Alacağımız diğer iki nokta ile birlikte, üç nokta, izotrop koniğin kutupsal üçgeninin köşeleridir.. Çünkü yeni koordinat sistemi de, karteziyen olacaktır. Bu noktaların bulunması için işlem yapmağa gerek yoktur. Bu noktalar Karmaşık Sayılar (32) formülü ile, barisantrik koordinatlarla, karteziyen koordinatlar arasında, dönüşüm denklemi olarak verilmiştir. Çünkü dönüşüm matrisi, uzunlukları değiştirmeyen ortogonal matristir. Bizim için gerekli olan matris de budur.

9) $C(1, -1/2, -1/2)$, $D(0, 1, -1)$, $E(1, 1, 1)$,

Noktaları, eksenlerin sonsuzdaki düzlemi deldiği noktalar, olacak biçimde, dönüşümü yapalım ve dönüşüm matrisini ortogonalleştirelim.

10)
$$A = \begin{matrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{matrix} \qquad A^{-1} = \begin{matrix} 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{matrix}$$

Ortogonal matrisler ile, dönüşüm ve ters dönüşüm denklemleri yazılır.

11)
$$x_1 = p(2/\sqrt{6}\, x'_1 + 0\, x'_2 + 1/\sqrt{3}\, x'_3) \qquad x'_1 = (2/\sqrt{6}\, x_1 - 1/\sqrt{6}\, x_2 - 1/\sqrt{6}\, x_3)/p$$
$$x_2 = p(-1/\sqrt{6}\, x'_1 + 1/\sqrt{2}\, x'_2 + 1/\sqrt{3}\, x'_3) \qquad x'_2 = (0.x_1 + 1/\sqrt{2}\, x_2 - 1/\sqrt{2}\, x_3)/p,$$
$$x_3 = p(-1/\sqrt{6}\, x'_1 - 1/\sqrt{2}\, x'_2 + 1/\sqrt{3}\, x'_1) \qquad x'_2 = (1/\sqrt{3}\, x_1 + 1/\sqrt{3}\, x_2 + 1/\sqrt{3}\, x_3)/p$$
$$p^3 = 2/(3\sqrt{3})$$

x, ler, noktanın göreceli uzaydaki koordinatları, x', ler de, yeni koordinat sistemine göre koordinatlarıdır. Bu dönüşümle elde edilen yeni koordinat sistemine, **izotrop koordinatlar** denilir.İzotrop koordinatlarda, göreceli uzaklık formülünü hesaplayalım.İşlemler oldukça uzundur. Kısaltmak amacı ile, önce d_1, d_2, d_3 doğrularının dönüşmüşlerini hesaplayalım.

$$d_1 = x_1 + jx_2 + kx_3 = p[(2 - j - k)/\sqrt{6}x'_1 + (j - k)/\sqrt{2}x'_2], \quad d_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 3p/\sqrt{3},$$

12)
$$d_3 = x_1 + kx_2 + jx_3 = p[(2 - k - j)/\sqrt{6}x'_1 + (k - j)/\sqrt{2}x'_2],$$
$$d_2d_3 = p^2[(2 - j - k)/6x'^2_1 - (j - k)^2/2\, x'^2_2]\, p^2,$$
$$s^3 = d_1d_2d_3 = p^3 3\sqrt{3}/2\, (x'^2_1 + x'^2_2)\, x'_3$$

olur.

İzotrop Silindirik koordinatlar

$$x_1 = r\cos(\varphi), \quad x_2 = r\sin(\varphi), \quad x_3 = x_3$$

Başlangıca uzaklık ve metrik,

$$s^3 = r^2 x_3, \qquad ds^3 = (dr^2 + r^2 d\varphi)dx_3$$

olur.

Dört Boyutlu Göreceli Uzay

Dört boyutlu uzayın sonsuzunda üst düzlem vardır. Dört boyutlu Öklid uzayında, üst düzlemin izotrop noktaları, izotrop kuadriğin noktalarıdır. İzotrop kuadrik,

13) $$S(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

denklemi ile verilmiştir. Dört boyutlu göreceli uzay için, izotrop kuadrik olarak,

$$S(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

kuadriği ve $G(0, 1, 1, 1, 1)$ noktası alınacaktır.. Düzlemde sanal konik denklemi,

$$S(x, x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

dır. İzotrop noktalar bu koniğin noktalarıdır. Bu koniğin, sonsuzdaki üst düzlemin kuadriği olması için, değişkenlerdeki indisler, 1 arttırılmalıdır..

$$S(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

Burada kareli dört terimin toplamı olan sanal kuadrik, niçin alınmıyor diye bir soru akla gelebilir. Dört boyutlu uzay görecelidir, Öklidsel değildir. Yalnız ilk üç boyutun Öklidsel olmasını istiyoruz. Dördüncü boyut zaman ekseni olacak, çarpan olarak gelecek ve Öklid dışı olacaktır. Öklidsel olmayı sağlayacak, koniğin(kudrik oldu) indislerini, 1 artırmanın nedeni, üzerinde bulunduğu üst düzlemin sonsuzda olmasıdır. Birinci koordinat sıfırdır. İndislerin 1 artırılmasıyla, konik, kudarik konumuna gelir, fakat konik özelikleri değişmez, ilk üç boyutu Öklidsel yapar.

Karmaşık Sayılarda (183) ile verilen, dönüşüm denklemleri ile, barisantrik koordinatlara geçelim.

14) $x_1 = (3x'_0 - x'_1 - x'_2 - x'_3)/[3(x'_0 + x'_1 + x'_2 + x'_3)]$,

$x_2 = [(-1 + \sqrt{3})x'_1 + 2x'_2 - (1 + \sqrt{3})x'_3]/[3(x'_0 + x'_1 + x'_2 + x'_3)]$,

$x_3 = [-(1 + \sqrt{3})x'_1 + 2x'_2 + (-1 + \sqrt{3})x'_3]/[3(x'_0 + x'_1 + x'_2 + x'_3)]$,

Üslü harfler noktanın barisantrik koordinatları, üssüz harfler de, karteziyen koordinatlarıdır. Barisantrik koordinatlarda sanal kuadrik denklemi,

15) $S(x, x) = (3x'_0 - x'_1 - x'_2 - x'_3)^2 + [(-1 + \sqrt{3})x'_1 + 2x'_2 - (1 + \sqrt{3})x'_3]^2 + [-(1 + \sqrt{3})x'_1 + 2x'_2 + (-1 + \sqrt{3})x'_3]^2 = 0$,

olur. Kuadrik denklemi sıfıra eşitleneceği için, dönüşümdeki paydalar göz önüne alınmamıştır. d_4, barisantrik koordinatlarda, sonsuzdaki üst düzlemin birim düzlemi, dört boyutlu Öklidsel uzayın izotrop düzlemidir.

16) $S(x, x) = 3(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4) - 2(x'_1x'_2 + x'_1x'_3 + x'_1x'_4 + x'_2x'_3 + x'_2x'_4 + x'_3x'_4) = 0$, $d_4 = x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 0$,

$$S(x, x) = 3\sum_{i=1}^{4} xi.xi \; - 2 \sum_{i=1\, j=i+1}^{4} xi.xj$$

Kuadriğin ve birim üst düzlemin çarpımı, dört boyutlu göreceli uzayın, izotrop üst yüzeyini verecektir. İzotrop üst yüzey,

17) $d_4.S(x, x) = 3(x'^3_1 + x'^3_2 + x'^3_3 + x'^3_4) + x'^2_1x'_2 + x'^2_1x'_3 + x'^2_1x'_4 + x'^2_2x'_1 + x'^2_2x'_3 + x'^2_2x'_4\, x'^2_3\, x'_1 + x'^2_3x'_2 + x'^2_3\, x'_4 + x'^2_4x'_1 + x'^2_4\, x'_2 + x'^2_4\, x'_3 - 6(x'_1\, x'_2\, x'_3 + x'_1\, x'_2\, x'_4 + x'_1x'_3x'_4 + x'_2\, x'_3\, x'_4) = 0$,

birim kübik üst yüzey,

18) $3(x'^3_1 + x'^3_2 + x'^3_3 + x'^3_4) + x'^2_1x'_2 + x'^2_1x'_3 + x'^2_1x'_4 + x'^2_2x'_1 + x'^2_2x'_3 + x'^2_2x'_4\, x'^2_3\, x'_1 + x'^2_3x'_2 + x'^2_3\, x'_4 + x'^2_4x'_1 + x'^2_4\, x'_2 + x'^2_4\, x'_3 - 6(x'_1\, x'_2\, x'_3 + x'_1\, x'_2\, x'_4 + x'_1x'_3x'_4 + x'_2\, x'_3\, x'_4) = 1$,

ve bir noktanın başlangıca d uzaklığı,

19) $d^3 = 3(x'^3_1 + x'^3_2 + x'^3_3 + x'^3_4) + x'^2_1x'_2 + x'^2_1x'_3 + x'^2_1x'_4 + x'^2_2x'_1 + x'^2_2x'_3 + x'^2_2x'_4\, x'^2_3\, x'_1 + x'^2_3x'_2 + x'^2_3\, x'_4 + x'^2_4x'_1 + x'^2_4\, x'_2 + x'^2_4\, x'_3 - 6(x'_1\, x'_2\, x'_3 + x'_1\, x'_2\, x'_4 + x'_1x'_3x'_4 + x'_2\, x'_3\, x'_4)$,

formülleri ile, dört boyutlu göreceli uzay kurulmuş olur.

Dört Boyutlu Göreceli Uzayda İzotrop Koordinatlar

İzotrop koordinatlarda dördüncü eksen, dört koordinat eksenlerinin açıortayı olacaktır. Dört boyutlu göreceli uzay kurulduğu için, yeniden üssüz harflere geçelim. Bu açıortayın denklemi,

20) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$

ve sonsuzdaki noktası G(0, 1, 1, 1, 1) olacaktır. Diğer eksenler, dört boyutlu göreceli uzayın sonsuzundaki üst düzleminde, izotrop kuadriğin, kutupsal dörtyüzlüsünün köşeleri olacaklardır. Bu noktaların hesaplanmasına gerek yoktur. Bu noktalar yukarda yazılımını verdiğim, karteziyen koordinatlardan, barisantrik koordinatlara geçiş formüllerinde vardır.

21) $Z_1(3, -1, -1, -1)$, $Z_2(0, -1 + \sqrt{3}, 2, -1 -\sqrt{3})$, $Z_3(0, -1 -\sqrt{3}, 2, -1 + \sqrt{3})$, $Z_4(1, 1, 1, 1)$,

Bu noktaların izotrop kuadriğe göre, kutupsal dörtyüzlünün köşeleri olduğu, kolayca görülür. Bu doğrultular birbirlerine ikişer, ikişer diktirler. İzotrop koordinatlara dönüşüm matrisinin, bu noktalar, sütunları olacaklardır. Bu noktaları, sütunlara yazalım ve ortogonalleştirelim. Yani noktaları, koordinatların kareleri toplamının, kare köküne bölelim.

22)
$$A = \begin{matrix} 3/\sqrt{12} & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/\sqrt{12} & (-1 + \sqrt{3})/\sqrt{12} & -(1 + \sqrt{3})/\sqrt{12} & 1/2 \\ -1/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} & 1/2 \\ -1/\sqrt{12} & -(1 + \sqrt{3})/\sqrt{12} & (-1 + \sqrt{3})/\sqrt{12} & 1/2 \end{matrix}$$

23)
$$A^{-1} = \begin{matrix} 3/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} \\ 0 & (-1+\sqrt{3})/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} & -(1+\sqrt{3})/\sqrt{12} \\ 0 & -(1+\sqrt{3})/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} & (-1+\sqrt{3})/\sqrt{12} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}$$

Dönüşüm ve ters dönüşüm matrisleri elde edilir.

24)
$$x_1 = 3/\sqrt{12}\, x'_1 + 0\, x'_2 + 0\, x'_3 + 1/2\, x'_4$$
$$x_2 = -1/\sqrt{12}\, x'_1 + (-1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_2 - (1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_3 + 1/2\, x'_4$$
$$x_3 = -1/\sqrt{12}\, x'_1 + 2/\sqrt{12}\, x'_2 + 2/\sqrt{12}\, x'_3 + 1/2\, x'_4$$
$$x_4 = -1/\sqrt{12}\, x'_1 - (1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_2 + (-1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_3 + 1/2\, x'_4$$

25)
$$x'_1 = 3/\sqrt{12}\, x_1 - 1/\sqrt{12}\, x_2 - 1/\sqrt{12}\, x_3 - 1/\sqrt{12}\, x_4$$
$$x'_2 = 0x_1 + (-1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x_2 + 2/\sqrt{12}\, x_3 - (1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x_4$$
$$x'_3 = 0x_1 - (1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x_2 + 2/\sqrt{12}\, x_3 + (-1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x_4$$
$$x'_4 = 1/2\, x_1 + 1/2\, x_2 + 1/2\, x_3 + 1/2\, x_4$$

Dönüşüm ve ters dönüşüm denklemleri elde edilir.

İzotrop koordinatlarda, uzaklık formülünü çıkaralım. Bu formülün çıkartılmasını kısaltmak amacı ile, önce izotrop kuadriğin ve birim üst düzlemin dönüşmüşlerini bulalım. Birim üst düzlem, G noktasının dört boyutlu uzayın sonsuzundaki izotrop kuadriğinin kutupsal üst düzlemidir.

$$x_1^2 = (3/\sqrt{12}\, x'_1 + 1/2\, x'_4)^2 = 9/12\, x'^2_1 + 3\sqrt{12} x'_1 x'_4 + 1/4\, x'^2_4$$

$$x_2^2 = 1/12\, x'^2_1 + (4 - 2\sqrt{3})/12\, x'^2_2 + (4 + 2\sqrt{3})/12\, x'^2_3 + 1/4\, x'^2_4 - 2(-1+\sqrt{3})/12\, x'_1 x'_2 + 2(1+\sqrt{3})/12\, x'_1 x'_3 - 1/\sqrt{12}\, x'_1 x'_4 - 4/12\, x'_2 x'_3 + (-1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_2 x'_4 - (1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_3 x'_4$$

$$x_3^2 = 1/12\, x'^2_1 + 4/12\, x'^2_2 + 4/12\, x'^2_3 + 1/4\, x'^2_4 - 4/12\, x'_1 x'_2 - 4/12\, x'_1 x'_3 - 1/\sqrt{12}\, x'_1 x'_4 + 8/12\, x'_2 x'_3 + 2/\sqrt{12}\, x'_2 x'_4 + 2/\sqrt{12}\, x'_3 x'_4$$

$$x_4^2 = 1/12\, x'^2_1 + (4 + 2\sqrt{3})/12\, x'^2_2 + (4 - 2\sqrt{3})/12\, x'^2_3 + 1/4\, x'^2_4 + 2(1+\sqrt{3})/12\, x'_1 x'_2 - 2(-1+\sqrt{3})/12\, x'_1 x'_3 - 1/\sqrt{12}\, x'_1 x'_4 - 4/12\, x'_2 x'_3 - (1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_2 x'_4 + (-1+\sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_3 x'_4,$$

26)
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4$$

bulunur.

$$x_1 x_2 = -3/12\, x'^2_1 + 1/4\, x'^2_4 + 3(-1+\sqrt{3})/12\, x'_1 x'_2 - 3(1+\sqrt{3})/12\, x'_1 x'_3 + 2/(2\sqrt{12})\, x'_1 x'_4,$$
$$x_1.x_3 = -3/12\, x'^2_1 + 1/4\, x'^2_4 + 6/12\, x'_1 x'_2 + 6/12\, x'_1 x'_3 + 2/(2\sqrt{12})\, x'_1 x'_4$$
$$x_1.x_4 = -3/12\, x'^2_1 + 1/4\, x'^2_4 - 3(1+\sqrt{3})/12\, x'_1 x'_2 + 3(-1+\sqrt{3})/12\, x'_1.x'_3 + 2/(2.\sqrt{12})\, x'_1 x'_4$$
$$x_2.x_3 = 1/12\, x'^2_1 + 2(-1+\sqrt{3})/12\, x'^2_2 - 2(1+\sqrt{3})/12\, x'^2_3 + 1/4\, x'^2_4 + (-2 + 1 - \sqrt{3})/12\, x'_1 x'_2 + (-2 + 1 + \sqrt{3})/12\, x'_1.x'_3 - 2/(2\sqrt{12})\, x'_1.x'_4 + 2(-1 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3})/12\, x'_2.x'_3 + (-1 + \sqrt{3} + 2)/(2.\sqrt{12})\, x'_2.x'_4 + (-1 - \sqrt{3} + 2)/(2.\sqrt{12})\, x'_3.x'_4$$
$$x_2.x_4 = 1/12\, x'^2_1 - 2/12\, x'^2_2 - 2/12\, x'^2_3 + 1/4\, x'^2_4 + (1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3})/12\, x'_1.x'_2 + (1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3})/12\, x'_1.x'_3 - 2/(2.\sqrt{12})\, x'_1.x'_4 + (4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3})/12\, x'_2.x'_3 + (-1 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3})/(2.\sqrt{12})\, x'_2.x'_4 + (-1 - \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3})/(2.\sqrt{12})\, x'_3.x'_4$$
$$x_3.x_4 = 1/12 x'^2_1 - 2(1+\sqrt{3})/12\, x'^2_2 + 2(-1+\sqrt{3})/12\, x'^2_3 + 1/4\, x'^2_4 + (1 + \sqrt{3} - 2)/12\, x'_1.x'_2 + (1 - \sqrt{3} - 2)/12\, x'_1.x'_3 - 2/(2.\sqrt{12})\, x'_1.x'_4 + 2(-1 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3})/12\, x'_2.x'_3 + (2 - 1 - \sqrt{3})/(2.\sqrt{12})\, x'_2.x'_4 + (2 - 1 + \sqrt{3})/(2.\sqrt{12})\, x'_3.x'_4$$

27) $x_1 x_2 + x_1.x_3 + x_1.x_4 + x_2.x_3 + x_2.x_4 + x_3.x_4 = -1/2\,(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) + 3/2\, x'^2_4$

Kuadriğin izotrop koordinatlara dönüşmüşü,

28)
$$S(x, x) = 3\sum_{i=1}^{4} xi.xi - 2\sum_{i=1\, j=i+1}^{4} xi.xj = 3(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + x'^2_4) - 2[-1/2\,(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) + 3/2\, x'^2_4] = 4(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3)$$

d_4 üst düzlemin dönüşmüşünü bulalım. Dönüşüm denklemlerinde, her iki tarafın toplamını alalım.

$$d_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x'_4,$$

bulunur. İzotrop koordinat sisteminde, izotrop yüzey,

$$d_4.S(x, x) = 4(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3).2x'_4 = 0,$$

izotrop birim üst yüzey,

29) $$4(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3).2x'_4 = 1,$$

Bir noktanın başlangıca uzaklığı,

30) $$d^3 = 4(x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3).2x'_4,$$

olur. 8 katsayısının bire indirgenmesi için, dönüşüm denklemleri, 2 ile bölünür.

31) $$x_1 = (3/\sqrt{12}\, x'_1 + 0\, x'_2 + 0\, x'_3 + 1/2\, x'_4)/2$$
$$x_2 = (-1/\sqrt{12}\, x'_1 + (-1 + \sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_2 - (1 + \sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_3 + 1/2\, x'_4)/2$$
$$x_3 = (-1/\sqrt{12}\, x'_1 + 2/\sqrt{12}\, x'_2 + 2/\sqrt{12}\, x'_3 + 1/2\, x'_4)/2$$
$$x_4 = (-1/\sqrt{12}\, x'_1 - (1 + \sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_2 + (-1 + \sqrt{3})/\sqrt{12}\, x'_3 + 1/2\, x'_4)/2$$

İzotrop Silindirik Koordinatlar

$$x_1 = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad x_2 = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad x_3 = r \cos(\theta), \quad x_4 = x_4$$
$$s^3 = r^2 x_4, \qquad ds^3 = [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2)]dx_4$$

olur.