İ Ç İ N D E K İ L E R

I TEMEL GEOMETRİK KAVRAMLAR

II TEMEL GEOMETRİK ŞEKİLLER

III DÖRT BOYUTLU PROJEKTİF UZAYDA ÜST KUADRİKLER

IV DÖRT BOYUTLU AFİN UZAYDA ÜST KUADRİKLER

V DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÜST KUADRİKLER

.

.

Dört Boyutlu Öklidsel Uzayda Analitik Geometri

I TEMEL GEOMETRİK KAVRAMLAR

Analitik Geometrinin yalnız dört boyutlu uzayda uygulaması yapılacak, alt boyutlardan söz edilmeyecektir. Bilinen formüller dört boyutlu uzaya uyarlanacaktır.

Doğru Denklemi

Doğrunun bir noktası ve doğrultusu biliniyorsa,

1) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{v}$, $(x_1 - a_1)/v_1 = (x_2 - a_2)/v_2 = (x_3 - a_3)/v_3 = (x_4 - a_4)/v_4$

bulunur. Üç tane denklemle ifade edilir. Eğer doğrunun iki noktası biliniyorsa,

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $(x_1 - a_1)/(a_1 - b_1) = (x_2 - a_2)/(a_2 - b_2) = (x_3 - a_3)/(a_3 - b_3) = (x_4 - a_4)/(a_4 - b_4)$

olur. Doğrunun bu denklemine **birinci vektörel biçim**, karşısındaki eşitliklere de, doğrunun **karteziyen** denklemi denilecektir. İki doğrunun diklik koşulu ve paralellik koşulu sıra ile,

2) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{v}$, $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mu\,\mathbf{w}$, $\mathbf{v}.\mathbf{w} = 0$, $\mathbf{v} = k\,\mathbf{w}$

dır**.** İki doğrunun kesim noktasını bulmak için, iki doğru taraf, tarafa çıkarılır λ ve μ'ler bilinmeyenlerdir.

3) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\mathbf{v} - \mu\mathbf{w} = 0$, $\lambda v_1 - \mu w_1 + a_1 - b_1 = 0$, $\lambda v_2 - \mu w_2 + a_2 - b_2 = 0$,

$\lambda v_3 - \mu w_3 + a_3 - b_3 = 0$, $\lambda v_4 - \mu w_4 + a_4 - b_4 = 0$

Görüldüğü gibi çözümün olması için, dört denklemden iki bilinmeyenin çözülebilmesi gerekir. Katsayılar matrisi iki sütun, dört satırdan oluşur. Bu matrisin rangı 1 ise, doğrular çakışıktır. veya doğrular paraleldir, sonsuzda kesişirler. Rang 2 ise, doğrular kesişir. İki bilinmeyen olduğu için, katsayılar matrisinin rangı ikiden yukarı olmaz. Eğer bulunan nokta, denklemlerden birini sağlamıyorsa, doğrular kesişmezler. Bu doğrulara **aykırı doğrular** denilir.Diğer iki denklemi de sağlamıyorsa, doğrular kesişmezler, **iki kat aykırı doğrular** adını alırlar.

İki doğru iki noktası ile verilmiş olsunlar. Bu iki doğrunun kesişme koşulu, verilen dört noktanın bir düzlem üzerinde olmasıdır. Üç nokta bir düzlem belirler. Dördüncü nokta bu düzlemi sağlıyorsa, iki doğru kesişir. Koordinat matrisinin rangı 2 ise, doğrular kesişirler. Bulunan çözüm ile, bir veya iki denklem sağlanmayabilir. Doğrular kesişmezler. .

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Doğru A(**a**) ve B(**b**) noktaları ile verilmiş olsun. Doğru dışında P(**p**) noktasından doğruya inilen dikmenin H(**h**) ayağını bulalım.

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + t\mathbf{l}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $d^2 = (x - h_1)^2 + (y - h_2)^2 + (z - h_3)^2 + (t - h_4)^2$

H noktasının doğruya d uzaklığı, minimum olmalıdır. Dikme ayağı λ ya bağlı olduğundan, λ ya göre türevi sıfır olmalıdır. Uzaklık fonksiyonunda türev alınır ve doğru denkleminde, dikme ayağının koordinatları konulursa,

$$d^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}))^2, \quad 2(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0,$$

4) $(a_1 - b_1)(x - p_1) + (a_2 - b_2)(y - p_2) + (a_3 - b_3)(z - p_3) + (a_4 - b_4)(t - p_4) = 0$,

5) $x = a_1 + \lambda(a_1 - b_1)$, $y = a_2 + \lambda(a_2 - b_2)$, $z = a_3 + \lambda(a_3 - b_3)$, $t = a_4 + \lambda(a_4 - b_4)$

bulunur. (5) deki değerler, (4) de yerine konulursa, λ'nın katsayısı,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + (a_4 - b_4)^2$$

olarak bulunur. λ çözülürse,

$$\lambda = -\,[(a_1 - b_1)(a_1 - p_1) + (a_2 - b_2)(a_2 - p_2) + (a_3 - b_3)(a_3 - p_3) + (a_4 - b_4)(a_4 - p_4)] \,/\, [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + (a_4 - b_4)^2]$$

bulunur. λ'nın bu değeri doğru denkleminde yerine konulur, dikme ayağı ve uzaklık formülünde, dikme ayağının değerleri yerine konulur, dikmenin uzunluğu bulunur.

Türevini almak yerine, PH doğrultusunun AB doğrultu vektörüne dik olduğunu yazmak aynı şeydir. .

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{h} - \mathbf{p}) = 0,$$

Türev işlemi ile diklik koşulu aynı sonucu vermektedir. Türev işlemleri, analitik geometrinin konusu olmadığından kullanılmayacaktır.

Örnek:

$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + 7\mathbf{l}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k} + 6\mathbf{l}$, $\mathbf{p} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + 11\mathbf{l}$,

olsun. λ formülünden $\lambda = -3/4$, r, λ ve nokta koordinatları (5) de yerlerine konulursa,

$$x = 3 - \lambda, \quad y = 5 - 3\lambda, \quad z = 2 + \lambda, \quad t = 7 + \lambda, \quad \lambda = -3/4 ,$$

$$H(15/4, 29/4, 5/4, 25/4)$$

H dikme ayağı bulunur. Dikmenin d uzunluğu, formülde PH uzunluğudur.

$$d^2 = HP^2 = (15/4 - 5)^2 + (29/4 - 9)^2 + (5/4 - 3)^2 + (25/4 - 11)^2 = 25/16 + 49/16 + 49/16 + 361/16 = 484/16, \quad d = 11/2 \text{ birim uzunluk}$$

Doğruya P noktasından çizilen dik doğrunun denklemi,

$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{h})$, $x = 5 - 5/4\lambda$, $y = 9 + 7/4\lambda$; $z = 3 + 7/4\lambda$, $t = 11 + 19/4\lambda$

dir. Bu doğruların dik olup, olmadığını araştırılması.

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{p} - \mathbf{h}) = (3 - 4)(5 - 15/4) + (5 - 8)(9 - 29/4) + (2 - 1)(3 - 5/4) + (7 - 6)(11 - 25/4)$$
$$= (-1)(5/4) + (-3)(7/4) + (1)(7/4) + (1)(19/4) = 0$$

P noktasından, AB doğrusuna paralel olan doğru denklemi ile, doğrultu vektörü aynı olmalıdır.

$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $x = 5 - \lambda$, $y = 9 - 3\lambda$, $z = 3 + \lambda$, $t = 11 + \lambda$

Yukarda yapılan işlemleri vektörel hesapla yapalım.

6) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $d^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} - \mathbf{p})^2$

P notasından doğruya olan uzaklık, en kısa olacağından, parametreye göre türevi sıfır olmalıdır.

$2\mathbf{u}(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} - \mathbf{p}) = 0$, $\mathbf{a}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}^2 - \mathbf{p}\,\mathbf{u} = 0$, $\lambda = (\mathbf{p}\,\mathbf{u} - \mathbf{a}\,\mathbf{u})/\mathbf{u}^2$

λ, (6) denkleminde yerine konulursa,

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + (\mathbf{p}\,\mathbf{u} - \mathbf{a}\,\mathbf{u})\,\mathbf{u}/\mathbf{u}^2, \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = [\mathbf{a} - \mathbf{p} + (\mathbf{p}\,\mathbf{u} - \mathbf{a}\,\mathbf{u})\mathbf{u}/\mathbf{u}^2]^2$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 + 2(\mathbf{a}\,\mathbf{u} - \mathbf{p}\,\mathbf{u})(\mathbf{p}\,\mathbf{u} - \mathbf{a}\,\mathbf{u})/\mathbf{u}^2 + ((\mathbf{p}\,\mathbf{u} - \mathbf{a}\,\mathbf{u})\mathbf{u}/\mathbf{u}^2)^2$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 - 2(\mathbf{a}\,\mathbf{u} - \mathbf{p}\,\mathbf{u})^2/\mathbf{u}^2 + (\mathbf{p}\,\mathbf{u} - \mathbf{a}\,\mathbf{u})^2\mathbf{u}^2/\mathbf{u}^4,$$

7) $$d^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 - [(\mathbf{a} - \mathbf{p})\mathbf{u}]^2/\mathbf{u}^2$$

bulunur. Bir noktadan bir doğruya, aykırı doğrular da sayılırsa, ∞^3 tane dik doğru çizilir. Bu doğrulardan bir tanesi diğer doğruyu keser, diğerleri dik durumludurlar, aykırıdırlar.

Matlab ile vektörel hesap için bir uzaklık programı:.

8)
```
A = [3 5 2 7]; B = [4 8 1 6]; P = [5 9 3 11];  m = (A – P); u = (A – B); g = m*m';
      n = m*u';   s = u*u';   d = sqrt(g – n^2)/s)
```

Dört boyutlu Öklidsel uzayda, iki doğrunun kesim noktasını bulan Matlab programı::
Doğruları belirleyen noktaların, koordinat matrisinin rangı 2 dir.

```
    A = [2 8 18 14]; B = [6 10 4 16];   C = [0 12 26 22];   D = [0 22 28 40];
for k = 1:2
      if k = = 2
       B = [2 8 18 14 ]; A = [6 10 4 16];   D = [0 12 26 22];   C = [0 22 28 40];  end
       A1 = (A – B)'; A2 = ( C – D)';   A3 = [A1 A2];  B = (C – A)';
        for j = 1:3   for i = j: 4   ra (j, i) = A1(j)*A2(i)  – A1(i)*A2(j);
      İf (ra(j, i)>0 |  ra(j, i)<0)   x(j, i, 1) = (B[j)*A2(i) – B(i)*A2(j))/ra(j, i);
     x(j, i, 2) = – (A1(j)*B(i) – A1(i)*B(j))/ra(i, j);  u = x(j, i, 1) ;  v = x (j, i, 2); break
end
    end
        end
 for k = 1:4   d(k) = A(k) + A1(k)*u; f(k) = C(k) + A2(k)*v; end
    d, f
        end
```

Noktaların sırası değiştirilerek, yeniden hesaplama yapılmıştır.

Bir noktanın bir doğruya uzaklığını bulmak için Başka bir yöntem:

Doğru A(**a**) noktası **u** doğrultu vektörü ve doğruya uzaklığı aranan nokta da P**p**) olsun. A noktasının, Q(**q**) dikme ayağına uzaklığı,

9) $ah = (\mathbf{p} - \mathbf{a})\mathbf{u} / \mathbf{u}^2$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} + ah.\mathbf{u}$, $d^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2$

formülü ile bulunur.

Teorem

Dört boyutlu uzayda, bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tane dikme inilir. Üzerindeki bir noktadan, ∞^2 tane dikme çıkılır.

Bir noktanın bir doğruya uzaklığının hesabı, teoremin birinci kısmını kanıtlar. Üzerindeki bir noktadan dikmeyi çıkmak için, doğru dışında bir nokta almak gerekir. Bu noktanın 4 bağımsız koordinatından biri, yazılacak diklik koşuluna bağlanır. Diğer biri de, çizilecek dikmenin, doğru üzerinde sabit bir noktadan geçme koşuluna bağlanır. Geri kalan iki bağımsız koordinat, ∞^2 türlü değerler alır.

Aykırı İki Doğrunun Ortak Dikmesi

Doğruların denklemleri,

10) $\mathbf{r}(x_i) = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{r}(y_i) = \mathbf{b} + \mu\mathbf{v}$, $x_i = a_i + \lambda u_i$, $y_i = b_i + \mu v_i$

$$d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2$$

olsunlar. En kısa uzaklık için, her iki doğruya da, dik uzaklık bulunmalıdır. Diklik koşulu yazılırsa,

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{v}\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\mathbf{u} - \mu\mathbf{v} = 0,$$
$$u_1(x_1 - y_1) + u_2(x_2 - y_2) + u_3(x_3 - y_3) + u_4(x_4 - y_4) = 0,$$
$$v_1(x_1 - y_1) + v_2(x_2 - y_2) + v_3(x_3 - y_3) + v_4(x_4 - y_4) = 0,$$

Parantezler açılır, her iki taraf önce **u**, sonra **v** ile çarpılırsa, λ ve μ'nün katsayıları sıra ile,

11) $e_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$, $e_2 = u_1v_1 + u_2 v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$, $f_1 = e_2$,

$f_2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$, $h_1 = u_1a_1 + u_2 a_2 + u_3a_3 + u_4a_4$

$h_2 = v_1b_1 + v_2 b_2 + v_3b_3 + v_4b_4$, $g_1 = a_1v_1 + a_2 v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$

$g_2 = b_1v_1 + b_2 v_2 + b_3v_3 + b_4v_4$, $e_3 = h_1 - h_2$, $f_3 = g_1 - g_2$,

$e_1 = u*u'$; $e_2 = u*v'$; $f_1 = e_2$; $f_2 = v*v'$; $e_3 = (A - B)*u'$; $f_3 = (A - B)*v'$;

$z_1 = (e_3 f_2 - e_2 f_3)/(- e_1 f_2 + e_2 f_1)$; $z_2 = (- e_1 f_3 + e_3 f_1)/(- e_1 f_2 + e_2 f_1)$;

$x_1 = a_1 + z_1u_1$; $x_2 = a_2 + z_1u_2$ $x_3 = a_3 + z_1 u_3$ $x_4 = a_4 + z_1 u_4$

$y_1 = b_1 + z_2v_1$; $y_2 = b_2 + z_2v_2$ $y_3 = b_3 + z_2 v_3$ $y_4 = b_4 + z_2 v_4$

olurlar.

12) $d = \mathrm{sqrt}((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2)$

e dizisi birinci denklemde, sıra ile λ'nın, μ'nün katsayıları ve sabitidir.f dizisi de, ikinci denklemde, sıra ile λ'nın, μ'nün katsayıları ve sabitidir.İki bilinmeyenli iki denklem çözülür. Bulunan λ ve μ değerleri (10) da yerlerine konulursa, ortak dikmenin ayak noktaları bulunur. Bulunan noktalar uzaklık formülünde yerine konulursa, ortak dikmenin uzunluğu bulunur.

Yukardaki işlemlerin, vektörlerle yapılması**:**

$$\mathbf{r}(x_i) = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{r}(y_i) = \mathbf{c} + \mu\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{c} - \mathbf{d}, \quad x_i = a_i + \lambda u_i,$$
$$y_i = b_i + \mu v_i \quad d^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mu\mathbf{v})^2$$

P notasından doğruya olan uzaklık, en kısa olacağından, diklik koşulu,

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mu\mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v}\,(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mu\mathbf{v}) = 0,$$
$$\mathbf{a}\,\mathbf{u} - \mathbf{b}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}^2 - \mu\mathbf{uv} = 0, \quad \mathbf{a}\,\mathbf{v} - \mathbf{b}\,\mathbf{v} + \lambda\mathbf{uv} - \mu\mathbf{v}^2 = 0,$$
$$\lambda = [(\mathbf{a}\,\mathbf{u} - \mathbf{b}\,\mathbf{u})\,\mathbf{v}^2 + (-\mathbf{a}\,\mathbf{v} + \mathbf{b}\,\mathbf{v})\,(\mathbf{vu})\,] / [-\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 + (\mathbf{u}\,\mathbf{v})^2]$$
$$\mu = [(-\mathbf{a}\,\mathbf{v} + \mathbf{bv})\,\mathbf{u}^2 + (\mathbf{a}\,\mathbf{u} - \mathbf{b}\,\mathbf{u})\,(\mathbf{vu})] / [-\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 + (\mathbf{u}\,\mathbf{v})^2]$$

olur. İşlemleri basitleştirmek için,

$$m = \mathbf{a}\,\mathbf{u} - \mathbf{b}\,\mathbf{u}, \quad n = \mathbf{a}\,\mathbf{v} - \mathbf{b}\,\mathbf{v}, \quad s = \mathbf{u}^2, \quad t = \mathbf{v}^2, \quad q = \mathbf{u}\,\mathbf{v},$$

eşitlerini yazalım.

$$\lambda = (mt - nq) / (- st + q^2), \quad \mu = (- ns + mq) / (- st + q^2),$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + (mt - nq)\,\mathbf{u} / (- st + q^2), \quad \mathbf{y} = \mathbf{b} + (- ns + mq)\,\mathbf{v} / (- st + q^2),$$

$(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 + (mt - nq)^2 s / (-st + q^2)^2 + (-ns + mq)^2 t / (-st + q^2)^2 +$
$+ 2m(mt - nq) / (-st + q^2) - 2n(-ns + mq) / (-st + q^2) -$
$- 2(mt - nq)(-ns + mq)q / (-st + q^2)^2,$

13) $$d^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 + (m^2t - 2mnq + n^2s)/(-st + q^2)$$

bulunur. Vektörel hesapla, aykırı iki doğrunun, ortak dikmesini bulan Matlab programı**:**

```
A = [2 8 13 19]; B = [11 5 8 16];   u = [4 7 14 3];  v = [– 4  9 15 8]; D = (A – B);
r = D*D';s = u*u'; t = v*v'; q = u*v'; m = D*u';  n = D*v';
d = sqrt(r + (m*m*t – 2*m*n*q + n*n*s) / (– s*t +q*q)),

r1 = (m*t – n*q) / (– s*t + q*q);         r2 = (m*q – n*s) / (– s*t + q*q);
for  i = 1: 4  x(i) = A(i) +  r1*u(i);  y(i) = B(i) + r2*v(i); end
g = (x – y);  g1= g*u';  g2= g*v';   dd = sqrt(g*g'), g1, g2
```

g1 ile g2'nin sıfır olmaları, ortak dikmenin **u** ve **v** vektörlerine dik olduklarını gösterirler. İşlemlerin sağlamasıdır.

Düzlem Denklemi

Bir noktası ve üzerinde iki doğrultusu veya iki noktası ile üzerinde bir doğrultusu veya üç noktası biliniyorsa, düzlem denklemi,

14) $$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{v} + \mu(\mathbf{a}-\mathbf{b}), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$$

olur. Düzlemin bu denklemine **birinci vektörel biçim** denilecektir. İki düzlemi karşılaştıralım. Bunun için ortak noktaları araştırılır.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{b} + \nu\,\mathbf{w} + \rho\mathbf{t}, \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} - \nu\,\mathbf{w} - \rho\mathbf{t} = 0$$

Bileşenler yazılırsa, dört bilinmeyenli dört denklem bulunur. Eğer katsayılar matrisinin rangı 2 ise, düzlemler çakışıktırlar veya paraleldirler. Bu iki denklemden iki bilinmeyen, diğer ikisi cinsinden hesaplanır. Eğer λ, μ cinsiden ve ν de, ρ cinsinden hesaplanmışsa, bu düzlemler birer doğruya soysuzlaşırlar. Eğer başka türlü iki parametre yok edilmişse, iki düzlem çakışır veya paraleldir. Rang 3 ise, üç bilinmeyen parametre, ayrı, ayrı bir parametre cinsinden hesaplanır. Bu değerler düzlemlerde yerine konulursa, arakesit bulunur. Bir bağımsız parametre kalır. İki düzlem bir doğru boyunca kesişirler. Rang 4 ise, bileşenlere ayrıldığında, dört bilinmeyen, dört denklem elde edilir. Rang 4 olduğundan, Kramer kuralı uygulanır Bir çözüm vardır. İki düzlemin yer vektörleri eşitlendiği için, ayrı, ayrı düzlemlerde yapılacak işlemlerle bulunacak noktalar, aynı bir nokta olacaktır..Dört boyutlu Öklidsel uzayda, iki düzlemin ortak bir noktası vardır. Dört boyutlu karteziyen koordinatlarda, xOy düzlemi ile, zOt düzleminin bir tane ortak noktası vardır. İki düzlemin en az ortak bir noktası vardır, aykırı durum söz konusu değildir. Bu durum, dört boyutlu uzayın ilgi çekici bir özeliğidir. Dört boyutlu Öklidsel uzayda, bir doğrunun verilen bir düzlemin içinde olduğunu araştırmak için, doğru ve düzlem ortak çözülür ve dört bileşene ayrılır. Üç bağımsız parametre vardır. Eğer katsayılar matrisinin rangı 3 ise, üç parametre çözülür, çözüm bir tanedir. Doğru düzlemi keser. Eğer ortak çözüm matrisinin rangı 2 ise, bu çözüm parametrenin sonsuz değeri için sağlanır, doğru düzlemin içindedir veya paraleldir..Ortak çözüm matrisinin Rangı 4 ise, doğru düzlemin dışındadır, aykırıdır. Bu özelik de, dört boyutlu uzaya özgüdür.

Düzlemin (14) ile verilen vektörel denkleminden, düzlemin karteziyen denklemini bulalım.

$$x_1 - a_1 = \lambda v_1 + \mu w_1, \quad x_2 - a_2 = \lambda v_2 + \mu w_2, \quad x_3 - a_3 = \lambda v_3 + \mu w_3, \quad x_4 - a_4 = \lambda v_4 + \mu\, w_4,$$

Birinci ve ikinci denklemler birlikte çözülürse,

$$\lambda = [(x_1 - a_1)w_2 - (x_2 - a_2)w_1] / (v_1w_2 - v_2w_1), \quad \mu = [(x_1 - a_1)v_2 - (x_2 - a_2)v_1] / (w_1v_2 - w_2v_1),$$

birinci ve üçüncü denklem birlikte çözülürse,

$$\lambda = [(x_1 - a_1)w_3 - (x_3 - a_3)w_1] / (v_1w_3 - v_3w_1), \quad \mu = [(x_1 - a_1)v_3 - (x_3 - a_3)v_1] / (w_1v_3 - w_3v_1),$$

birinci ve dördüncü denklem birlikte çözülürse,

$$\lambda = [(x_1 - a_1)w_4 - (x_4 - a_4)w_1] / (v_1w_4 - v_4w_1), \quad \mu = [(x_1 - a_1)v_4 - (x_4 - a_4)v_1] / (w_1v_4 - w_4v_1),$$

bulunur. Birinci denklem yerine diğerleri alınarak, bulunacak çözümler, artık doğrusal bağımlı olurlar. λ ve μ'lerin eşitleri, eşitlenirse,

15) $[(x_1 - a_1)w_2 - (x_2 - a_2)w_1] / (v_1w_2 - v_2w_1) = [(x_1 - a_1)w_3 - (x_3 - a_3)w_1] / (v_1w_3 - v_3w_1)$,

$[(x_1 - a_1)w_3 - (x_3 - a_3)w_1] / (v_1w_3 - v_3w_1) = [(x_1 - a_1)w_4 - (x_4 - a_4)w_1] / (v_1w_4 - v_4w_1)$,

$[(x_1 - a_1)v_2 - (x_2 - a_2)v_1] / (w_1v_2 - w_2v_1) = [(x_1 - a_1)v_3 - (x_3 - a_3)v_1] / (w_1v_3 - w_3v_1)$,

$[(x_1 - a_1)v_3 - (x_3 - a_3)v_1] / (w_1v_3 - w_3v_1) = [(x_1 - a_1)v_4 - (x_4 - a_4)v_1] / (w_1v_4 - w_4v_1)$,

denklemleri bulunur. Dört boyutlu uzayda, düzlemin karteziyen denklemi, dört tane bağımsız denklemdir.

İki düzlemin ortak noktasını bulan, Matlab programı**:**

```
A = [1 4 2 –5 ];  B = [3 7 12 15]; C = [6 8 4 7];    D = [2 8 13 17];     E = [3 7 12 15];
F = [11 6 18 3];    for i =1:2    if  i==2     B = [1 4 2 –5 ];  A = [3 7 12 15]; C = [6 8 4 7];
E = [2 8 13 17];      D = [3 7 12 15]     F = [11 6 18 3];    end
A3 = (A – B)’;  A4 = (A – C)’;   A5 = (D – E)’; A6 = (D – F)’;
A7 = [A3  A4  –A5  –A6]; r1 = rank(A7);          B1 = (D – A)’;   x = inv(A7)*B1;
for  i = 1:4   e(i) = A(i) + A3(i)*x(1) + A4(i)*x(2);  f(i) = D(i) +A5(i)*x(3) + A6(i)*x(4); end
e, f, r1
```

Bu programla iki düzlemin dört boyutlu uzayda ortak çözümü yapılmıştır. Birinci satırda düzlemleri belirleyen noktalar verilmiştir. İkinci ve üçüncü satırlarda, vektörlerin sütun matrisleri oluşturulmuştur. A7 ile katsayılar matrisi verilmiştir. x dört bilinmeyenli denklem sisteminin çözümüdür. e çözümü birinci düzlemden bulunan çözüm, f çözümü de, ikinci düzlemden bulunan çözümdür. Bunlar çakışır. A7 matrisinde üçüncü ve dördüncü sütunların önüne – işareti gelmiştir. Ortak çözüm yaparken, birinci düzlemin denklemlerinden, ikinci düzlemin denklemleri çıkarılmış ve denklem sistemi oluşturulmuştur. Son dört satırda, noktaların sıraları değiştirilmiş ve aynı sonuçlar bulunmuştur.

Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı

A(2,-5,-1,8); B(12,-9,-6,15), C(4,3,5,8), P(7,-11,4,18)

A(**a**), B(**b**), C(**c**) Noktalarının belirlediği düzleme, P(**p**) noktasından inilen dikmenin ayağını ve dikmenin uzunluğunu bulalım.

16) $\mathbf{u = a - b}$, $u_i = a_i - b_i$, $\mathbf{v = a - c}$, $v_i = a_i - c_i$, $\mathbf{t = a - p}$, $t_i = a_i - p_i$

$\mathbf{r = a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$, $x_i = a_i + \lambda u_i + \mu v_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$

Düzlem üzerindeki bir noktanın yer vektörü $\mathbf{r}(x_i)$ ve dikme ayağı H noktasının da, yer vektörü $\mathbf{h}(h_i)$ olsun. Sözü geçen uzaklık, H noktasında minimumdur. PH doğrultusunun, düzlemin iki doğrultusuna dik olması gerekir. .

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{h} - \mathbf{p}) = 0, \qquad \mathbf{v}\,(\mathbf{h} - \mathbf{p}) = 0,$$

$$d^2 = (h_1 - p_1)^2 + (h_2 - p_2)^2 + (h_3 - p_3)^2 + (h_4 - p_4)^2,$$

$$u_1(h_1 - p_1) + u_2(h_2 - p_2) + u_3(h_3 - p_3) + u_4(h_4 - p_4) = 0$$

$$v_1(h_1 - p_1) + v_2(h_2 - p_2) + v_3(h_3 - p_3) + v_4(h_4 - p_4) = 0$$

h yer vektörü yerine, **x** yer vektörü konulduktan sonra, λ ve μ parametrelerinin katsayıları görülür. Bu iki bilinmeyeni hesap etmek için, katsayılarını bulalım.

$$e_1 = \mathbf{u\,u}, \qquad e_2 = \mathbf{u\,v}, \qquad f_1 = \mathbf{v\,u}, \qquad f_2 = \mathbf{v\,v},$$

t sabit terim, e_1 ve e_2 λ’nın, f_1 ve f_2 de, μ’nün katsayılarıdır.. İki bilinmeyenli denklem sistemi çözüldükten sonra, λ ve μ’nün değerleri yerine konularak H dikme ayağı bulunur. İki nokta arasındaki uzaklık formülünden aranılan uzaklık bulunur.

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{p} - \mathbf{h}) = 0, \qquad (\mathbf{a} - \mathbf{c})(\mathbf{p} - \mathbf{h}) = 0$$

Eşitlikleri, işlemlerin sağlamasıdır.

Bu işlemleri vektörel hesapla yapalım. (14) formülünden,

17) $\mathbf{r - p = (a - p)} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v}$, $\quad (\mathbf{r - p})^2 = (\mathbf{a - p} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v})^2$,

ve en küçük uzaklık fonksiyonunda, diklik koşulu,.

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{a - p} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v}) = 0, \qquad \mathbf{v}\,(\mathbf{a - p} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v}) = 0,$$

dır. Bu iki bilinmeyenli denklemi çözelim. Kare alındığı için bütün terimlerde iç çarpım sonuçları geleceklerdir. Bu sonuçlar sayısal değerler olduğundan, işlem yapması daha kolaydır ve basitleşir. Dönüşümler aşağıda olduğu gibi yapılacak ve (17) de yerlerine konulacaktır.

$$m = (\mathbf{a} - \mathbf{p})\,\mathbf{u}, \quad n = (\mathbf{a} - \mathbf{p})\,\mathbf{v}, \quad s = \mathbf{u}^2, \quad t = \mathbf{v}^2, \quad q = \mathbf{u}.\mathbf{v},$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = [\mathbf{a} - \mathbf{p} + (n\,q - mt)\,\mathbf{u}/(st - q^2) + (mq - sn)\,\mathbf{v}/(st - q^2)]^2,$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 + [(n\,q - mt)\,\mathbf{u}/(st - q^2)]^2 + [(mq - sn)\,\mathbf{v}/(st - q^2)]^2 +$$
$$2(\mathbf{a} - \mathbf{p})\,[(n\,q - mt)\,\mathbf{u}/(st - q^2)] + 2(\mathbf{a} - \mathbf{p})\,[(mq - sn)\,\mathbf{v}/(st - q^2)] +$$
$$2[(n\,q - mt)\,\mathbf{u}/(st - q^2)]\,[(mq - sn)\,\mathbf{v}/(st - q^2)]^2,$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 + (n^2q^2s - 2mnqst + m^2t^2s + m^2q2t - 2mnqst + s^2n^2t)/(st - q^2)^2 +$$
$$2(mnq - m^2t + mnq - sn^2)/(st - q^2) + 2(mnq^3 - n^2q^2s - m^2q^2t + mnstq)/(st - q^2)^2,$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 + [(-q^2(n^2s - 2mnq + m^2t) + st(m^2t - 2mnq + n^2s)]/(st - q^2)^2 -$$
$$2(m^2t - 2mnq + sn^2)/(st - q^2)$$

18) $$(\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 - (n^2s - 2mnq + m^2t)/(st - q^2)$$

m ve n'nin değerleri yerlerine konulsa da, iç çarpımlarda birleşim özeliği olmadığından, daha fazla kısalma yapılamaz.

Bu işlemlerin Matlab ile bilgisayar programı**:**

```
A = [2 –5 –1 8]; B = [12 –9 –6 15]; C = [4 3 5 8]; P = [7 –11 4 18]; A1= (A – B);
A2 = (A – C); A3 = (A – P); d(1) = – A1*A3'; d(2)= – A2*A3'; e(1) = A1*A1';
e(2) = A1*A2';f(1) = e(2); f(2) = A2*A2';S = [e;f];y = inv(S)*d'; da = [A1' A2'];
x = (A' + da*y); g = (P – x'); d1 = sqrt(g*g'),     g1 = A1*g',    g2 = A2*g'
AP = (A – P); u = (A – B); v = (A – C); d1 = AP*AP'; s = u*u'; t = v*v'; q = u*v';
m = AP*u'; n = AP*v'; d 2 = sqrt (d1 + (n*n*s – 2*m*n*q + m*m*t)/(– t*s + q*q))
k1 = (– m*t + n*q)/(s*t – q*q); k2 = (m*q – n*s)/(s*t – q*q);
for i = 1:4 h(i) = A(i) + k1*u(i) + k2*v(i); end
g = (h' – P); g1 = g*u'; g2 = g*v'; d3 = sqrt(g*g'), g1, g2
```

Program yukarda yapılan hesapların tekrarıdır. Son iki satırda g1 ve g2 ile verilen ifadeler, P noktasından, düzleme inilen vektörle, düzlem içindeki vektörlerin iç çarpımlarıdır. Bunların sıfır olması işlemlerin sağlamasıdır..İlk g2 satırından sonra olan program, vektörlerle olan hesabın programıdır. h dikme ayağını, d1 birinci programda, d2 ikinci programda, P noktasının düzleme uzaklıklarını gösterirler. Son üç satırda, vektörlerle parametrelerin değeri yerine konulmuş ve h, dikme ayağı bulunmuştur.

Teorem

Dört boyutlu uzayda bir noktadan bir düzleme bir tane dikme inilir. Üzerindeki bir noktadan sonsuz tane dikme çıkılır, Yukarda hesaplanan bir noktanın bir düzleme uzaklığı teoremin birinci kısmını kanıtlar. Üzerindeki bir noktadan dikme çıkmak için, düzlem dışında bir nokta almak gereklidir. Bu noktanın dört bağımsız koordinatından ikisi, düzlemin iki doğrusuna, diklik koşuluna bağlanır. Diğer biri de, düzlem üzerinde sabit bir noktadan geçme koşuluna bağlanır. Geride bir tane bağımsız değişken koordinat kalır. Bu koordinat sonsuz türlü değerler alır.

Bir Düzlemin Aykırı Bir Doğru İle Ortak Dikmesi

A(**a**), **u**, **v** nokta ve doğrultuları ile düzlem, B(**b**) noktası ile **w** doğrultusu ile de, doğru belirlensin. Doğru ile düzlemi belirleyen, nokta veya doğrultu koordinatlarının matrisinin rangı 4'tür..

19) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$, $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \nu\mathbf{w}$ $\quad x_i = a_i + \lambda u_i + \mu v_i$, $\quad y_i = b_i + \nu w_i$ (i = 1, 2, 3, 4)

Düzlem üzerindeki bir noktanın yer vektörü **r**(x_i), dikme ayağı H noktasının yer vektörü **h**(h_i), doğru üzerindeki dikmenin ayağı, P(**p**) olsun. Düzlem üzerinde herhangi bir nokta X(**x**), doğru üzerinde de, Y(**y**) ise, XY doğru parçasının uzunluğu,

20) $$d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2$$

olur. En kısa uzaklık için XY ortak dikme doğrultusu düzleme ve doğruya dik olmalıdır.

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{v}\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{w}\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$$

Parametrelerin katsayılarının hesabı sonunda,

$$u_1(x_1 - y_1) + u_2(x_2 - y_2) + u_3(x_3 - y_3) + u_4(x_4 - y_4) = 0,$$
$$v_1(x_1 - y_1) + v_2(x_2 - y_2) + v_3(x_3 - y_3) + v_4(x_4 - y_4) = 0,$$
$$w_1(x_1 - y_1) + w_2(x_2 - y_2) + w_3(x_3 - y_3) + w_4(x_4 - y_4) = 0,$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} - \mathbf{b} - \nu\mathbf{w}) = 0, \quad \mathbf{v}(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} - \mathbf{b} - \nu\mathbf{w}) = 0, \quad \mathbf{w}(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} - \mathbf{b} - \nu\mathbf{w}) = 0,$$

parantezler açılır ve işlemler kısaltılırsa, λ, μ ve ν'nün katsayıları,

$e_1 = \mathbf{u}\,\mathbf{u}$, $e_2 = \mathbf{u}\,\mathbf{v}$, $e_3 = -\,\mathbf{u}\,\mathbf{w}$, $f_1 = \mathbf{v}\,u$, $f_2 = \mathbf{v}\,\mathbf{v}$, $f_3 = -\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}$, $g_1 = \mathbf{u}\,\mathbf{w}$,
$g_2 = \mathbf{v}\,\mathbf{w}$, $g_3 = -\,\mathbf{w}\,\mathbf{w}$, $h_1 = \mathbf{a}\,\mathbf{u}$, $h_2 = -\,\mathbf{b}\,\mathbf{u}$, $m_1 = \mathbf{a}\,\mathbf{v}$, $m_2 = -\,\mathbf{b}\,\mathbf{v}$,
$n_1 = \mathbf{a}\,\mathbf{w}$, $n_2 = -\,\mathbf{b}\,\mathbf{w}$, $e_4 = h_1 + h_2$, $f_4 = m_1 + m_2$, $g_4 = n_1 + n_2$,

bulunur. e dizisi birinci denklemde, f dizisi ikinci denklemde ve g dizisi de üçüncü denklemde sıra ile λ, μ ve ν'nün katsayıları ve sabitleridir.Üç bilinmeyenli üç denklem çözülür. Bulunan λ, μ ve ν değerleri (19) da yerlerine konulursa, düzlemde ve doğru üzerindeki dikme ayakları H ve P bulunmuş olur. HP dikme uzunluğu, bulunan nokta koordinatlarının, uzaklık formülünde yerine konulması ile bulunur.

Matlab ile ortak dikmenin bilgisayar programı**:**

```
A = [3 7 12 8];  u = [4 9 16 19];  v = [5 14 7 12];   B = [13 21 5 8];  w = [7 19 25 –6];
e1 = u*u';  e2 = u*v'; e3 = – u*w';  f1 = u*v';  f2 = v*v';  f3 = – v*w';  g1 = u*w';
g2 = v*w';  g3 = – w*w';  e4 = (A – B)*u';  f4 = (A – B)*v';   g4 = (A – B)*w';
E = [e1 e2 e3];  F = [f1 f2 f3];  G = [g1 g2 g3]; D = [E;F;G];  EF = – [e4;f4;g4];
Z = inv(D)*EF; for i = 1:4   x(i) = A(i) + u(i)*Z(1) + v(i)*Z(2); y(i) = B(i) + w(i)*Z(3);end
d = sqrt((x – y)*(x – y)'),       a1 = (x – y)*u',     a2 = (x – y)*v',     a3 = (x – y)*w',
```

a1, a2, a3'lerin sıfır olmaları, ortak dikmenin düzlem ve doğruya dik olduğunu gösterirler. İşlemlerin sağlamalarıdır.

İkinci bir yöntem olarak, vektörel işlemler akla gelir.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{b} + \nu\mathbf{w} \qquad x_i = a_i + \lambda u_i + \mu v_i, \quad x_i = b_i + \nu wi \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

Ortak dikme CD olsun. C (**c**), noktası doğru, D(**d**) noktası da düzlem üzerinde olsun.

$$(\mathbf{d} - \mathbf{c})\,\mathbf{w} = 0, \qquad (\mathbf{d} - \mathbf{c})\,\mathbf{u} = 0, \qquad (\mathbf{d} - \mathbf{c})\,\mathbf{v} = 0,$$
$$(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} - \mathbf{b} - \nu\mathbf{w})\,\mathbf{w} = 0, \quad (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} - \mathbf{b} - \nu\mathbf{w})\,\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} - \mathbf{b} - \nu\mathbf{w})\,\mathbf{v} = 0,$$

Parantezler açılırsa, parametrelerden oluşan üç bilinmeyen ve üç denklemli bir sistem oluşur. Bulunacak parametre değerleri, doğru denkleminde yerine konulursa, C dikme ayağı, düzlem denkleminde yerlerine konulursa, D dikme ayağı bulunur

$$d^2 = (\mathbf{d} - \mathbf{c})^2$$

Üst Düzlemin Denklemi (Hiper düzlem)

Nokta, doğru, düzlem, üst düzlem, esas geometrik şekillerdendir. Tanımsız terimdirler. Bir tanım verilemez. Ancak benzer kavramlar ile, tanıtılmaya çalışılır. Düzlem için su yüzeyi, masa yüzeyi gibi benzer şekiller gösterilir. İçinde bulunduğumuz uzay, bir tane üst düzlemdir. Üst düzlem, düzlemin bir üst boyuta genelleştirilmesidir. Dört boyutlu uzayda, dört nokta veya üç nokta ile bir doğrultu veya iki nokta ile iki doğrultu veya bir nokta ile üç doğrultu veya kesişen iki düzlem veya bir noktada kesişen üç doğru bir üst düzlem belirler. Üç bağımsız parametreye sahiptir. Üst düzlemin bu denklemine **birinci vektörel** denklemi denilecektir.

21) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{v} + \mu(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \nu\mathbf{w}$,
$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + + \nu\mathbf{w}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + \nu(\mathbf{a} - \mathbf{d})$,
, $x_i = a_i + \lambda u_i + \mu v_i + \nu w_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$

olur. Birinci denklemde, **r** yer vektörünü de sağa geçirip, dört bileşene ayıralım.

22) $-x_1 + a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1 = 0$, $-x_2 + a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2 = 0$,
$-x_3 + a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 + \nu w_3 = 0$, $-x_4 + a_4 + \lambda u_4 + \mu v_4 + \nu w_4 = 0$,

Dört denklem arasında üç parametre yok edilir. Bu türdeş sistemde, üç parametrenin yok edilebilmesi için, parametrelere göre, dördüncü mertebeden katsayılar determinantı sıfır olmalıdır. Bu determinantın sıfır olması, **r** yer vektörünün, verilen noktanın denklemi sağlama koşuludur. Bu determinantın birinci sütun (x_i)'lerin minörleri, büyük harflerle, determinantın açılımından gelen sabitlerin toplamı da, E ile gösterilsin.

23) $$d(x) = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 + E = \mathbf{n.r} + u_0 = 0$$

Dört boyutlu uzayda üst düzlemin denklemi elde edilir. **n**(A, B, C, D) üst düzlemin normalidir.

İki üst düzlemi karşılaştırmak ve analitik özeliklerini incelemek için, dört boyutlu uzaya çıkmak gereklidir. Üç boyutlu, uzay bir tane üst düzlemden ibaret olduğundan, ikinci bir üst düzlem, üç boyutlu uzayda tasarlanamaz. Bu nedenle üst düzlem, dört boyutlu uzayın esas geometrik şeklidir. Bir doğrunun, üst düzlemi kestiği noktayı bulmak için,.ikisi ortak çözülür.

24) $$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{b} + \rho\mathbf{t}, \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w} - \rho\mathbf{t} = 0,$$

$$a_1 - b_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1 - \rho_1 = 0, \qquad a_2 - b_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2 - \rho_1 = 0,$$

$$a_3 - b_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 + \nu w_3 - \rho_3 = 0, \qquad a_4 - b_4 + \lambda u_4 + \mu v_4 + \nu w_4 - \rho_4 = 0,$$

Dört bilinmeyen parametrelerle, dört denklemden oluşan, bir denklem sistemi elde edilir. Katsayılar matrisinin rangı 4 ise, sistemin parametrelere göre, bir çözümü vardır. Doğru, üst düzlemi bir noktada keser. Bulunan parametreler. Doğruda veya üst düzlemde yerlerine konulursa, kesim noktasının koordinatları bulunur. Eğer bu matrisin rangı 3 ise, parametreler için çözüm sonsuz tanedir, doğru üst düzlemin içindedir veya paraleldir. Eğer rang 3 ise ve üst düzlemin üç parametresinden biri, diğer ikisi arasında yok ediliyorsa, üst düzlem düzleme soysuzlaşır. Bir doğru ile bir üst düzlemin, en az bir ortak noktası vardır. Aykırılık söz konusu değildir.

Bir üst düzlemle bir düzlemi ortak çözelim. Bu defa 5 bilinmeyen dört denklemden oluşan bir sistem elde edilecektir. Katsayılar matrisinin rangı 4 ise, dört parametre, parametrelerden biri cinsinden hesap edilir. Bu bir parametreye istenilen değerler verilirse, ortak çözüm bir doğru olur. Arakesit bir doğrudur. Katsayılar matrisinin rangı 3 ise, üç parametre, iki parametre cinsinden hesap edilir, düzlem üst düzlemin içindedir veya üst düzleme paraleldir. Rang daha aşağı düşerse, üst düzlemde ve düzlemde soysuzlaşmalar olur. Bir üst düzlem ile bir düzlem, en az bir doğru boyunca ortak noktalara sahiptir. Arakesit en az bir doğrudur. Bir ortak nokta veya aykırı durum söz konusu değildir.

İki üst düzlemi ortak çözelim. Altı parametre, dört denklemden oluşan bir sistem oluşur. Dört parametre, diğer iki parametre cinsinden hesap edilir. İki parametre bağımsız değişir, arakesit bir düzlemdir. İki üst düzlem, bir düzlem boyunca kesişir. Rang 3 ise, İki üst düzlem iç içedir.(çakışıktır) veya paraleldir. .

İki üst düzlem bir düzlem boyunca kesişir. Bu düzleme **arakesit düzlemi** denilir. Üst düzlem üç bouytlu bir geometrik şekil olduğundan, içinde üç boyutlu uzayın teoremleri geçerlidir. İki üst düzlemin arakesit düzlemine, belli bir noktada dik olan ve üst düzlemin elemanı olan doğru bir tanedir. Çünkü bir düzleme dik olan diğer doğruların hepsi, üst düzlemin dışına çıkarlar, dördüncü boyuta taşarlar. Birinci ve ikinci üst düzlemler içinde kalan ve arakesit düzlemine dik olan, iki doğru arasındaki açıya, **iki üst düzlemli açı** veya iki üst düzlemin **ölçek açısı** denilir. Ölçek açısı dik olan üst düzlemlere **dik üst düzlemler** denilir. Bir üst düzlem içinde, farklı üç doğrultuya dik olan doğruya, **üst düzleme diktir** denilir, doğruya da üst düzlemin **normali** denilir. Bir üst düzlemin normali, üst düzlemin elemanı olan bütün düzlem ve doğrulara diktir.

Uzayda bir düzlemin bütün doğrularına dik olan bir doğru vardır. Düzlem iki boyutludur. Bu gerçek üç boyutun düzleme getirdiği bir özeliktir ve postüladır. Dört boyutlu uzayda, üst düzlemin bütün doğrularına ve düzlemlerine, dik olan bir doğru vardır. Dört boyutun üst düzleme getirdiği bir özeliktir ve postüladır.

Teorem

Bir doğru bir üst düzlemin bağımsız üç doğrusuna dikse, üst düzleme de diktir. Bu doğruya üst düzlemin normali denilir. Kesişen iki düzlem bir üst düzlem belirler.(postüla). Kesişmeyen, bir ortak noktası olan iki düzlemi, bir üst düzlem kapsamaz. Çünkü bu iki düzlemin, ortak çözümünden gelen katsayılar matrisinin rangı dörttür. Üst düzlem ise, üç boyutlu bir geometrik şekildir. Üst düzlem, bu iki düzlemden biri ile, diğerinin ancak bir doğrusunu kapsar. Bir düzlem ile, bu düzlemi kesen bir doğru, bir üst düzlem belirler. Kesişen iki düzlemin içinde, bağımsız birer doğruya ve bir de, arakesite dik olan doğruyu göz önüne alalım. Bu doğru iki düzleme de diktir. Çünkü bu düzlemlerin bağımsız, ikişer doğrularına diktir. Bu iki düzlemin belirlediği üst düzleme de diktir. Karşıt durumda, postüla ile çelişilir. Kesişen iki düzlem bir üst düzlem belirlemiş olmaz. Dört boyutlu uzayın karteziyen koordinatlarında, her eksen, diğer üç eksenin belirlediği üst düzleme diktir.

Normalleri dik olan üst düzlemler diktirler. Bir üst düzlem içinde, iki üst düzlemin arakesit düzlemine, dik bir doğru çizilebilir. İkinci üst düzlem içinde de arakesit düzlemine dik bir doğru çizelim. Arakesit düzlemine çizilen bu doğrular, içinde bulundukları üst düzlemlerin normal vektörlerine diktirler. Çünkü üst düzlemlerin normal vektörleri, dik oldukları üst düzlemin, doğru ve düzlemlerine diktirler. Böylece arakesit düzlemine dik olan doğrularla normal vektörlerin oluşturduğu dörtgenin üç açısı diktir. Dördüncü açı ise, iki üst düzlemin ölçek açısıdır. Ölçek açı da, dik olmalıdır. İki üst düzlemin ölçek açısının kenarları ile, üst düzlemlerin normalleri diktirler. Ölçek açı ile, normaller arasındaki açı, kenarları dik açılardır. Kenarları dik açılar, eşittir veya bütünlerdir. Normaller arsındaki açı dikse, ölçek açı da dik olur, sıfırsa, ölçek açı da 0^o veya 180^o olur, çakışırlar veya paraleldirler.

Bir Noktanın Üst Düzleme Uzaklığı

A(**a**), **u**, **v, w** nokta ve doğrultuları ile verilen üst düzleme, P(**p**) noktasının uzaklığı, diğerlerinde olduğu gibi hesaplanacaktır. Üst düzlemin (23) ile verile denklemini göz önüne alalım. Dikme ayağı H(**h**) ve **PH** = λ**u** olsun.

$$\mathbf{PH} = \mathbf{p} - \mathbf{h} = \lambda\mathbf{u}, \qquad \mathbf{h} = \mathbf{p} - \lambda\mathbf{u}, \qquad d(H) = 0, \quad . .$$

olur. H noktası üst düzlemin bir noktası olduğundan, üst düzlemin denklemini sağlar.

$$d(H) = \mathbf{u}\,(\mathbf{p} - \lambda\mathbf{u}) + u_0 = 0, \qquad \lambda = (\mathbf{u}\,\mathbf{p} + u_0)/\mathbf{u}^2 = d(P)/\mathbf{u}^2$$

25) $$dd^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{h})^2 = \lambda^2\mathbf{u}^2 = d^2(P)\,\mathbf{u}^2/(\mathbf{u}^2)^2, \qquad dd = d(P)/\sqrt{\mathbf{u}^2}$$

26) $$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}, \qquad x_i = a_i + \lambda u_i + \mu v_i + \nu w_i, \qquad P(p_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Üst düzlem üzerindeki bir noktanın yer vektörü **r**(x_i) ve dikme ayağı H noktasının da, yer vektörü **h**(h_i), nokta da **p(**p_i**)** olsun. Üst düzlem üzerinde herhangi bir nokta X(**x**) ise,. PX doğru parçasının uzunluğu,

27) $$d^2 = (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2 + (x_4 - p_4)^2$$

olur. En kısa uzaklık için, diklik koşulu gereklidir.

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0, \qquad \mathbf{v}\,(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0, \qquad \mathbf{w}\,(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0$$

$$u(\mathbf{a} - \mathbf{p} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}, \qquad \mathbf{v}(\mathbf{a} - \mathbf{p} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}) = 0, \qquad \mathbf{w}(\mathbf{a} - \mathbf{p} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}) = 0,$$

Parametrelerin katsayılarının hesabı**:**

$$u_1(x_1 - p_1) + u_2(x_2 - p_2) + u_3(x_3 - p_3) + u_4(x_4 - p_4) = 0,$$
$$v_1(x_1 - p_1) + v_2(x_2 - p_2) + v_3(x_3 - p_3) + v_4(x_4 - p_4) = 0,$$
$$w_1(x_1 - p_1) + w_2(x_2 - p_2) + w_3(x_3 - p_3) + w_4(x_4 - p_4) = 0,$$

Parantezler açılır ve işlemler kısaltılırsa,

$$e_1 = \mathbf{u}\,\mathbf{u}, \quad e_2 = \mathbf{u}\,\mathbf{v}, \quad e_3 = \mathbf{u}\,\mathbf{w}, \quad f_1 = \mathbf{v}\,\mathbf{u}, \quad f_2 = \mathbf{v}\,\mathbf{v}, \quad f_3 = \mathbf{v}\,\mathbf{w}, \quad g_1 = \mathbf{w}\,\mathbf{u},$$
$$g_2 = \mathbf{w}\,\mathbf{v}, \quad g_3 = \mathbf{w}\,\mathbf{w}, \quad h_1 = \mathbf{a}\,\mathbf{u}, \quad h_2 = \mathbf{u}\,\mathbf{p}, \quad m_1 = \mathbf{a}\,\mathbf{v}, \quad m_2 = \mathbf{p}\,\mathbf{v},$$
$$n_1 = \mathbf{a}\,\mathbf{w}, \quad n_2 = \mathbf{p}\,\mathbf{w}, \quad e_4 = h_1 - h_2, \quad f_4 = m_1 - m_2, \quad g_4 = n_1 - n_2,$$

bulunur. e dizisi birinci denklemde, f dizisi ikinci denklemde ve g dizisi de üçüncü denklemde sıra ile λ, μ ve ν'nün katsayıları ve sabitleridir.Üç bilinmeyenli üç denklem çözülür. Bulunan λ, μ ve ν değerleri (26) da yerlerine konulursa, üst düzlemde dikme ayağı H bulunmuş olur. HP dikme uzunluğu da, bulunan nokta koordinatlarının, uzaklık formülünde yerine konulması ile bulunur.

$$\mathbf{HP.u} = 0, \qquad \mathbf{HP.v} = 0, \qquad \mathbf{HP.w} = 0$$

Eşitlikleri işlemlerin sağlamasıdır.

Bu işlemleri vektörel hesapla yapalım.

28) $\mathbf{r = a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}$, $x_i = a_i + \lambda u_i + \mu v_i + \nu w_i$, $P(p_i)$ (i = 1, 2, 3, 4)
Üst düzlem üzerinde bir **r**(xi) noktasının P noktasına uzaklığı, uzaklık fonksiyonunda minimum olmalıdır.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p})^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{p} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w})^2, \quad 2\mathbf{u}\,(\mathbf{a} - \mathbf{p} + + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}) = 0,$$

$$2\mathbf{v}\,(\mathbf{a} - \mathbf{p} + + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}) = 0, \quad 2\mathbf{w}\,(\mathbf{a} - \mathbf{p} + + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}) = 0,$$

e(1) = **u * u’;** e(2) = **u * v’**; e(3) = **u * w’**; f(1) = **u * v’**; f(2) = **v * v’ ;** f(3) = **v * w’**;
g(1) = **u * w’**; g(2) = **v * w’ ;** g(3) = **w * w’**; m = – (**a** – **p**)**u**’;
n = – (**a** – **p**)**v**’; s = – (**a** – **p**)**w**’

Bulunan üç denklem çözülür. Çözüm y dizisi olsun.

λ = y(1); μ = y(2); ν = y(3); $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}$,

29) $$d^2 = (\mathbf{h} - \mathbf{p})^2$$

h dikme ayağının yer vektörüdür. Bir üst düzleme, bir doğrunun dik olması için, birbirinden farklı üç doğrultusuna dik olması gerekir.. Dört boyutlu uzayda, üç farklı doğrultuya dik olan doğrultu, bir tanedir. Fakat bir doğrunun, bir düzleme dik olması için, iki doğrultusuna dik olması yeterlidir. Dört boyutlu uzayda, bu nedenle aykırı olanlar da sayılırsa, bir düzleme, bir noktadan sonsuz tane dikme inilebilir ve çıkılabilir. Çünkü üst düzleme dik olan bir doğru, üst düzlemin içinde bulunan, bütün doğrulara ve düzlemlere dik veya dik durumludur..

Üst düzleme bir noktanın uzaklığını hesap etmek için, bilgisayar programı**:**

```
   A = [1 4 2 10]; B = [3 7 12 8]; C = [6 8 4 5]; D = [5 8 11 17]; P = [8 12 6 17];
u = (A – B);  v = (A – C); w = (A – D); e(1) = u*u’; e(2) = u*v’; e(3) = u*w’; f(1) = e(2);
f(2) = v*v’, f(3) = v*w’; g(1) = e(3); g(2) = f(3); g(3) = w*w’; h = (A – P)*u’;
m = (A – P)*v’; n = (A – P)*w’;  RB = [e;f;g]; RC = – [h;m;n]; y = inv(RB)*RC;
   for i = 1:4  x(i) = A(i) + y(1)*u(i) + y(2)*v(i) + y(3)*w(i) end
     d = sqrt((x – P)*(x – P)’),     a1 = (x’ – P)*u’,  a2 = (x‘ – P)*v’,  a3 = (x’ – P)*w’,
```

(25) formülünün uygulaması:

```
A1= [A(1);B(1);C(1);D(1)];  A2 = [A(2);B(2);C(2);D(2)];  A3 = [A(3);B(3);C(3);D(3)];
A4 = [A(4);B(4);C(4);D(4)]; E = [1;1;1;1]; D1= [A;B;C;D]; D2 = [E A2 A3 A4];
D3 = [E A1 A3 A4];  D4 = [E A1 A2 A4];  D5 = [E A1 A2 A3];  DE1 = det(D1);
DE2 = – det(D2); DE3 = det(D3); DE4 = – det(D4); DE5 = det(D5);
PD = P(1)*DE2 + P(2)*DE3 + P(3)*DE4 + P(4)*DE5 + DE1;
de = sqrt(DE2*DE2 + DE3*DE3+ DE4*DE4 + DE5*DE5);
                              dd = PD/de,
PA = A(1)*DE2 + A(2)*DE3 + A(3)*DE4 + A(4)*DE5 + DE1;
nor = [DE2 DE3 DE4 DE5]; a1 = nor*u’,  a2 = nor*v’,  a3 = nor*w’,
```

a1, a2, a3 ‘lerin ve PA’nın sıfır olmaları, üst düzlemi belirleyen doğrultuların, üst düzlemin normaline, dik olduklarını ve A’nın üst düzlem üzerinde olduğunu gösterirler. İşlemlerin sağlamalarıdır.

İlk 5 satırda uzaklık, dikme ayağının yardımıyla hesaplanmış, son 8 satırda üst düzlemin (23) ile verilen denklemi yardımı ile hesaplanmıştır.

Teorem

Normalleri dik olan üst düzlemler dik, normalleri paralel olan üst düzlemler de paraleldirler. Bir üst düzlemin üç farklı doğrultusuna dik olan doğru bir tanedir, o da üst düzlemin normalidir. Üst düzlemin dışındaki bir noktadan, bir tane dikme inilir. Üst düzleme üzerindeki bir noktada bir tane dikme çıkılır.

Yukarda yapılan üst düzleme bir noktanın uzaklığı hesabı, teoremin birinci kısmını kanıtlar. İkinci kısım için, üzerindeki bir noktasından iki tane dikme çizildiğini varsayalım. Bu iki dikmenin üst düzlemle oluşturduğu üçgenin açılarının toplamı, 180^o‘yi geçer.

Dış Çarpımlar

Bir boyutlu uzayda dış çarpım olmaz. Çünkü dış çarpım vektörler arasında tanımlanır. Bir boyutlu uzayda vektör olmaz. Düzlemde vektör vardır ve dış çarpım tanımlanır. Bir noktadan çıkan iki vektörün üzerine kurulan paralelkenarın alanına eşit değerde olan, iki vektörün işlemine **dış çarpımı** denilir. Bu değer sayısal bir büyüklüktür. Bileşenlerle ifadesi,

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = b_1\,\mathbf{e}_1 + b_2\,\mathbf{e}_2, \quad s = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|, \quad s = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\alpha, \quad s = a_1b_2 - a_2b_1$

olur. Dış çarpım, vektörler üzerine kurulan paralelkenarın alanı ve vektörlerin bileşenleri ile oluşan matrisin determinantıdır.

Üç boyutlu uzayda vektör vardır ve dış çarpım tanımlanır. Burada dış çarpım bir vektördür. Düzlemsel büyüklükler de, kendilerine dik vektörlerle temsil edilirler. Uzayda iki vektör üzerine kurulan paralelkenarın alanı, bu iki vektörün dış çarpımında, vektörünün şiddeti, düzleme dik doğrultu, doğrultusu ve matematik yön de yönüdür. Bileşenlerle ifadesi,

30) $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\,\mathbf{e}_1 + b_2\,\mathbf{e}_2 + b_3\,\mathbf{e}_3,$

$\mathbf{s} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{e}_3$

olur. Bileşenler vektörlerin katsayılar matrisinin minörleridir. Dış çarpımın bileşenleri, paralelkenarın koordinat yüzleri üzerindeki izdüşümleridir. Paralelkenarın izdüşümleri de, paralelkenardırlar. Uzaydaki dış çarpımın da, paralelkenarın alanı ve bu iki vektörün bileşenlerinden oluşan matrisin minörleri olduğu görülür.

Üç vektörün karma çarpımında, dış ve iç çarpımlar sıra ile yapılır. İlk ikisinin dış çarpımının, üçüncü ile iç çarpımı yapılırsa, elde edilen çarpıma **karma çarpım** veya **üçlü çarpım** denilir.

$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\,\mathbf{e}_1 + b_2\,\mathbf{e}_2 + b_3\,\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{c} = c_1\,\mathbf{e}_1 + c_2\,\mathbf{e}_2 + c_3\,\mathbf{e}_3,$

$v = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,\mathbf{c} = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\,] = (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\,c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,c_3$

Üçlü çarpımın değeri sayısal olup, bu üç vektör üzerine kurulu paralelyüzün hacmine eşittir.

Dört boyutlu uzayda vektör vardır ve dış çarpım tanımlanır..Alan ölçümlerinde, Paralelkenar düzlem parçalarının temsilcileridir. Paralelkenar düzlemine dik olan doğrultu, dört boyutlu uzayda sonsuz tanedir. Dört boyutlu uzayda paralelkenarın alanı için, bu normallerden hangisi alınacaktır?

Teorem

Dört boyutlu uzayda, bir düzlemin her doğrusu, diğer bir düzlemin her doğrusuna dikse, bu düzlemlere **iki kat dik** düzlemler denilir. Dört boyutlu uzayın karteziyen koordinatlarının, birim vektörlerinden ikisinin belirlediği koordinat düzlemi, diğer ikisinin belirlediği koordinat düzlemine iki kat diktir. Bu özelik, dört boyutlu uzaya özgü bir özeliktir, alt uzaylarda bulunmaz.

Karteziyen koordinatların dört birim vektörü, ikişer, ikişer diktirler. $\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{e}_4$ vektörleri, $P\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$'nin belirlediği düzlem) düzleminin iki vektörüne dik olduklarından, bu düzlemin her doğrusuna dik olurlar. Sözü geçen $P\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ düzleminin bir doğrusu, $\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{e}_4$ vektörlerine dik olduklarından, bunların belirlediği, $Q\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4$ düzlemine de dik olurlar.

Uzayda bir dörtgen piramit göz önüne alalım. Bu piramidi çevreleyen dört tane yanal yüzü vardır. Kenarların ikişer, ikişer kombinezonu ile oluşmuşlardır. İki kombinezon köşegen yüz durumunda olduklarından, onları yüz olarak saymıyoruz. Aynı şekli dört boyutlu uzaya taşıyalım. Burada köşegen durumunda olan yüzler, artık köşegen durumunda olmazlar, üst piramidin (hiper piramit) yanal yüzleri olurlar. Dört boyutlu uzayda dörtgen üst piramidin altı tane yanal yüzü vardır. Koordinat üst dörtyüzlüsünün (dört boyutlu uzayda, bir noktadan çıkan dört doğrunun oluşturduğu geometrik şekil) dört tane üst düzlemsel yüzü ve altı tane de, düzlemsel yanal yüzü vardır. Üst dörtgen piramidin, dört tane yanal, bir de,taban olmak üzere beş tane dörtyüzlülerden oluşan, beş tane üst yüzü vardır Dört boyutlu uzayda bir paralelkenar göz önüne alalım. Üst dörtyüzlünün ayrıtları, karteziyen koordinatların eksenleri ise, paralelkenarların koordinat düzlemleri üzerindeki izdüşümleri paralelkenarlardır. Altı tane izdüşümü vardır...

Bu açıklamalardan sonra sorumuzun yanıtını arayalım. Uzayda $\mathbf{e}_1 \Lambda\, \mathbf{e}_2$ çarpımı ile, birim vektörlerin üzerinde bulunduğu düzlemi belirleyen, normal vektör gösterilmiştir. Dört boyutlu uzayda düzlemin, ∞ tane normal vektörü vardır. Bu nedenle normal vektör ile, dört boyutlu uzayda düzlem belirlenemez. Halbuki $\mathbf{e}_1 \Lambda \mathbf{e}_2$ terimi ile uzayda,düzlem belirlenmiştir. İki doğrultu vektörü, düzlemi belirler. Karteziyen koordinat üst dörtyüzlüsünde, iki eksenin belirlediği düzlem, bu düzleme ayrı, ayrı dik olan, diğer iki eksenin birim vektörleri tarafından belirlenmiştir. O halde $\mathbf{e}_1 \Lambda \mathbf{e}_2$ dış çarpım terimi, bir vektörle gösterilemez. Mertebesi 1, boyutu 4'ten küçük olan tansörlere **vektör** denilir. Tanörün indis sayısı, mertebesini, bir indisin alabileceği en büyük değer de, tansörün boyutunu verir Vektörlerin bu tanımına uygun olarak, $\mathbf{e}_1 \Lambda \mathbf{e}_2$ terimi mertebesi iki olan, dört boyutlu bir aykırı simetrik tansör olarak algılanacaktır. Dört boyutlu uzayda moment vektörü yoktur, ikinci mertebeden, dört boyutlu aykırı simetrik moment tansörü vardır. Çarpım kuralı genel tansör çarpım kuralıdır. Çarpanın her bileşeni, çarpılanın her bileşeni ile, çarpılacak ve toplanacaktır.Yalnız uyarı amacı ile,.aynı indisli bileşenlerin dış çarpımlarının, sıfır olacakları anımsatılacaktır.. Çünkü aralarındaki açının sinüsü çarpandır. Her terimin işareti, indisler üzerindeki enversiyon sayısı ile belirlenir. Tek enversiyon negatif, çift ve sıfır enversiyon pozitif alınır. İki veya daha yüksek mertebeli çarpımlarda, determinantlarda olduğu gibi, iki veya daha fazla indis kullanılır. Bu indislerde yapılacak toplam enversiyon sayısı, terimin işaretini verecektir. İkinci mertebeden yüksek mertebede dış çarpımlar da, aynı tanıma göre yapılacaktır. İkinci mertebeden yüksek dış çarpımlar, iç çarpımdır. Çünkü, genel tansör çarpım kuralına göre, çarpanın her bileşeni, çarpılanın her bileşeni ile çarpılacak ve toplanacaktır. Bu kuralı uyguladığımız zaman, aynı indisli bileşenlerin dış çarpımı sıfır olacağından, geride kalan terimlerle yapılacak çarpımlar, iç çarpım anlamındadır. Böylece bir bileşenin çarpılacağı terimler, çarpılanın bir bileşeni demektir..İkinci mertebeden yüksek mertebeli dış çarpımlar. karma çarpımdır. Birinci mertebe iki tansörün dış çarpımında, indisler birinci terimde, küçükten büyüğe, ikinci terimde negatif işaretle, büyükten küçüğe sıralanırsa, işaret yanlışlığı olmaz.

31) $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i}\, \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + b_4 \mathbf{e}_4,$

$$\mathbf{S} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + (a_1b_3 - a_3b_1)\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + (a_1b_4 - a_4b_1)\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + (a_2b_3 - a_3b_2)\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + (a_2b_4 - a_4b_2)\, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + (a_3b_4 - a_4b_3)\, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$$

Tansör işlemlerinde,

$$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$$

ile gösterilir ve $\mathbf{g}_{ij}$ tansörüne **esas tansör** veya **metrik tansör** denilir. İkinci mertebe, U_n^2 tansör uzayının baz elemanıdır. Dört boyutlu uzayda 16 tanedir. Konumuz dış çarpımlardır. Konu gereği olarak,

$$\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$$

ile gösterilecektir. Yukarda verilen dış çarpım,

32) $$\mathbf{S} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\, \mathbf{g}_{12} + (a_1b_3 - a_3b_1)\, \mathbf{g}_{13} + (a_1b_4 - a_4b_1)\, \mathbf{g}_{14} + (a_2b_3 - a_3b_2)\, \mathbf{g}_{23} + (a_2b_4 - a_4b_2)\, \mathbf{g}_{24} + (a_3b_4 - a_4b_3)\, \mathbf{g}_{34},$$

gösterilimi ile verilecektir. **g** tansörünün indisleri artan yönde sıralanmıştır.Parentez önündeki işaret, hepsinde pozitiftir. Hacim hesaplarında, dış çarpım ve sonra iç çarpım işlemi kullanılmayacak, hepsi dış çarpım olacaktır. Terimler dış çarpım kuralına göre yazılacaktır.

33) $$\mathbf{V} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1\, \mathbf{g}_{231} + (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_1\, \mathbf{g}_{241} + (a_3b_4 - a_4b_3)\, c_1\, \mathbf{g}_{341} + (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_2\, \mathbf{g}_{132} + (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_2\, \mathbf{g}_{142} + (a_3b_4 - a_4b_3)\, c_2\, \mathbf{g}_{342} + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3\, \mathbf{g}_{123} + (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_3\, \mathbf{g}_{143} + (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_3\, \mathbf{g}_{243} + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_4\, \mathbf{g}_{124} + (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_4\, \mathbf{g}_{134} + (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_4\, \mathbf{g}_{234},$$

İkinci ve üçüncü mertebe dış çarpımlar aykırı simetrik tansörlerdir. Metrik tansörün indisleri ile, parantezin birinci teriminin indisleri aynıdır. Metrik tansörün indislerinde oluşan enversiyonları, işaretlere dönüştürelim.

34) $$\mathbf{V} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1\, \mathbf{g}_{123} + (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_1\, \mathbf{g}_{124} + (a_3b_4 - a_4b_3)\, c_1\, \mathbf{g}_{134} - (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_2\, \mathbf{g}_{123} - (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_2\, \mathbf{g}_{124} + (a_3b_4 - a_4b_3)\, c_2\, \mathbf{g}_{234} + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3\, \mathbf{g}_{123} - (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_3\, \mathbf{g}_{134} - (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_3\, \mathbf{g}_{234} + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_4\, \mathbf{g}_{124} + (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_4\, \mathbf{g}_{134} + (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_4\, \mathbf{g}_{234},$$

$\mathbf{V}$ = $[(a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3]\, \mathbf{g}_{123} + [(a_2b_4 - a_4b_2)\, c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_4]\, \mathbf{g}_{124} + [(a_3b_4 - a_4b_3)\, c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_4]\, \mathbf{g}_{134} + [(a_3b_4 - a_4b_3)\, c_2 - (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_4]\, \mathbf{g}_{234}$,

Teorem

Dört boyutlu uzayda, bir paralelkenarın, koordinat yüzleri üzerindeki izdüşümlerinin alanları ile, paralelkenarın alanı arasında, Pisagor teoremi geçerlidir.

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2 + S_6^2$$

Bu izdüşümler 6 tanedir. Bir köşesi başlangıç olan, üst dikdörtgenler prizmasının, köşegen karşıtı köşesine gitmek için, karşıt iki köşeden geçen prizmaların köşegenleri takip edilmelidir. Bir köşegen üç ayrıt ile diğer köşegen de üç ayrıt ile, hesaplanacağından, üst prizmanın köşegeni, 6 ayrıtla hesaplanacaktır. Bu prizmaların birer ayrıtları farklı, diğer ayrıtları ikişer, ikişer eşit ve paraleldirler. Üst prizmanın köşegeninin karesi, iki prizma köşegeninin karesi toplamı veya 6 ayrıtın kareleri toplamı olacaktır. A ve B noktalarının, başlangıç noktasından geçen yüzler üzerinde alınan izdüşümlerinin koordinatları, A ve B noktalarında, bu koordinat yüzlerine dik koordinat eksenlerinin koordinatları, sıfır yapılarak bulunacaktır. Bu sıfırlama işlemi, 6 türlü olur. 6'şar tane izdüşümleri vardır. Böylece, iki koordinatı sıfırlanmış koordinatlarla, izdüşümlerin kareleri toplamı, (32) de verilen toplamın terimlerinin kareleri olur. S paralelkenarın alanıdır.

35) $$S^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_4 - a_4b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_2b_4 - a_4b_2)^2 + (a_3b_4 - a_4b_3)^2$$

olur. Uygun biçimde paralel kaydırma ile şekil, üst dikdörtgenler prizması konumuna gelir. Bileşenlerin alanlarının kareleri, üst prizmanın 6 ayrıtı konumuna, Paralelkenarın alanı da, prizmanın köşegeni konumuna gelir. Pisagor teoremi burada Analitik Geometrinin bir ilkesidir(postüla). Çünkü en başta Analitik Geometrinin Öklidsel olduğu ortaya konuldu. Dört boyutlu uzayda uzunluklar,

$$d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2$$

formülü ile hesaplanacaktır. Bu nedenle Pisagor teoremi bir ilkedir.

Teorem

Dört boyutlu uzayda bir paralelkenarın, başlangıçtan geçen koordinat üst yüzleri üzerindeki izdüşümlerinin alanlarının kareleri toplamı, paralelkenarın alanının karesinin, iki katına eşittir.

Başlangıçtan geçen, 4 tane koordinat üst yüzleri vardır. Koordinat eksenleri, içinden geçmediği üst yüze diktir. Bu üst yüzdeki izdüşümde, kendisine dik olan eksenin koordinatı sıfırdır. Pisagor teoreminin uygulaması için, (31) de verilen **a** ve **b** vektörlerinden sıra ile bir koordinat sıfır yapılarak, izdüşüm parelekenarlarının köşe koordinatları belirlenecektir.S_1, S_2, S_3, S_4 bileşenleri, 3 boyutlu uzaydadırlar. Bu koordinatlarla, uzay bileşenlerde dış çarpım ile(uzayda dış çarpım ile), her izdüşümün 3 tane bileşeni hesaplanacaktır. Dış çarpım işlemi, S_i uzayının dış çarpım işlemidir. Uzay gösterilimi ile,

36)
$$\mathbf{S}_1 = (a_2b_3 - a_3b_2)\, \mathbf{g}_{23} + (a_2b_4 - a_4b_2)\, \mathbf{g}_{24} + (a_3b_4 - a_4b_3)\, \mathbf{g}_{34},$$
$$\mathbf{S}_2 = (a_1b_3 - a_3b_1)\, \mathbf{g}_{13} + (a_1b_4 - a_4b_1)\, \mathbf{g}_{14} + (a_3b_4 - a_4b_3)\, \mathbf{g}_{34},$$
$$\mathbf{S}_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)\, \mathbf{g}_{12} + (a_1b_4 - a_4b_1)\, \mathbf{g}_{14} + (a_2b_4 - a_4b_2)\, \mathbf{g}_{24},$$
$$\mathbf{S}_4 = (a_1b_2 - a_2b_1)\, \mathbf{g}_{12} + (a_1b_3 - a_3b_1)\, \mathbf{g}_{13} + (a_2b_3 - a_3b_2)\, \mathbf{g}_{23},$$
$$\mathbf{S} = S_1\, \mathbf{g}_{234} + S_2\, \mathbf{g}_{134} + S_3\, \mathbf{g}_{124} + S_4\, \mathbf{g}_{123}$$

37)
$$S_1^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_2b_4 - a_4b_2)^2 + (a_3b_4 - a_4b_3)^2,$$
$$S_2^2 = = (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_4 - a_4b_1)^2 + (a_3b_4 - a_4b_3)^2,$$
$$S_3^2 == (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_4 - a_4b_1)^2 + (a_2b_4 - a_4b_2)^2,$$
$$S_4^2 = = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2,$$

S_1 de x_1 koordinatı, S_2 x_2 koordinatı, S_3 de x_3 koordinatı S_4 de de, x_4 koordinatı sıfır olmuştur. Üstteki $\mathbf{S}_i$'ler koordinat üst düzlemleri üzerindeki izdüşümlerin vektörel toplamıdır. Alttaki S_i'ler ise, $S_i = |\mathbf{S}_i|$ dir.(32) den,

$$\mathbf{S} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{g}_{12} + (a_1b_3 - a_3b_1)\,\mathbf{g}_{13} + (a_1b_4 - a_4b_1)\,\mathbf{g}_{14} + (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{g}_{23} + (a_2b_4 - a_4b_2)\,\mathbf{g}_{24} + (a_3b_4 - a_4b_3)\,\mathbf{g}_{34},$$

dır. Bu alanın mutlak değeri,

38) $$S^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_4 - a_4b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_2b_4 - a_4b_2)^2 + (a_3b_4 - a_4b_3)^2, \qquad 2\,S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$$

39) $$S^2 = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2)/2,$$

dır.

Teorem

Dört boyutlu uzayda, bir paralelyüzün, koordinat üst yüzleri üzerindeki izdüşümlerinin hacimleri ile, paralelyüzün hacmi arasında, Pisagor teoremi geçerlidir.

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2$$

Dört boyutlu uzayda bir doğru parçası göz önüne alalım. Bu doğru parçasının izdüşümü, doğru parçasına bölünürse, bulunan oran, izdüşüm düzlemi ile, şekil düzleminin oluşturduğu, iki düzlemli açının kosinüsüdür.Bu açı aynı zamanda, izdüşüm düzlemi ve şekil düzleminin normalleri arasındaki açıya eşittir.(kenarları birbirine dik açılar). Bu kosinüslere, şekil düzleminin **doğrultman kosinüsleri** denilir. Düzlemde karteziyen koordinatlarda, bir doğrunun doğrultman kosinüslerinin kareleri toplamı 1 dir. Uzayda ve düzlemde de benzer bağıntılar, Pisagor teoreminin uygulaması olarak karşımıza çıkar. Uzayda bir üçgeni izdüşürelim. Üçgenin bir kenarı izdüşüm düzlemine paralel olsun. Eğer paralel değilse, izdüşüm düzlemine bir paralel düzlem çizerek, iki parça halinde üçgenin izdüşümünü inceleriz.. İzdüşüm düzlemine paralel olan kenarın, izdüşümde uzunluğu değişmez. Üçgenin izdüşümünün alanını, üçgenin alanına bölelim. Taban kenarları kısalır, yüksekliklerin oranı kalır. Bu oran, sözü edilen, şekil düzleminin doğrultman kosinüsüdür.Diğer izdüşümlerle birlikte doğrultman kosinüslerinin kareleri toplamı, Pisagor teoremi gereği olarak, 1 olacaktır. Dört boyutlu uzayda, bir paralelyüzü, koordinat üst yüzlerine izdüşürelim. Paralelyüzün tabanı, izdüşüm üst yüzüne paralel olsun. Taban izdüşümle değişmeyecektir. İzdüşüm paralelyüzün hacmini, paralelyüzün hacmine bölelim. Taban değişmediğinden kısalacak, yalnız yüksekliklerin oranı kalacaktır. Bu oran da, şekil üst yüzünün doğrultman kosinüsüdür. Dört boyutlu uzayda da, doğrultman kosinüslerinin kareleri toplamı, pisagor teoreminin uygulaması olarak, 1 dir

Dört boyutlu uzayda üçüncü mertebe dış çarpım örneği (33) de verildi. Bu çarpım aykırı simetrik bir tansördür. Dört boyutlu uzayda, birinci mertebe üç baz elemanı bir üst düzlem belirler. Üst düzlemi, kendi normal vektörü de belirler. Çünkü bir üst düzleme, bir noktasından bir tane dik çıkılabilir. Üç farklı doğruya dik olan doğru bir tanedir. Üç baz elemanının dış çarpımı, dördüncü baz elemanı ile aynı fonksiyondadır. Dört boyutlu uzayda üç baz elemanının dış çarpımı, dördüncü baz elemanı ile eşdeğerdir. İşareti, indisler üzerindeki enversiyonla belirlenecektir. .

40) $$\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_{234}, \qquad \mathbf{e}_2 = \mathbf{g}_{134}, \qquad \mathbf{e}_3 = \mathbf{g}_{124}, \qquad \mathbf{e}_4 = \mathbf{g}_{123},$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4\,, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4\,, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4\,, \quad \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\,,$$

41) $$\mathbf{S} = S_1\,\mathbf{g}_{234} + S_2\,\mathbf{g}_{134} + S_3\,\mathbf{g}_{124} + S_4\,\mathbf{g}_{123}$$

İzdüşümler, üst yüzlerdeki izdüşümlerdir. Dört boyutlu uzayda paralelkenarın alanı, yeni bileşenleri ile,

42) $$\mathbf{S} = S_1\,\mathbf{e}_1 + S_2\,\mathbf{e}_2 + S_3\,\mathbf{e}_3 + S_4\,\mathbf{e}_4, \qquad \mathbf{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$$

olur..Paralelyüzün hacmi,

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_1\,\mathbf{e}_4 + (a_2b_4 - a_4b_2)c_1\,\mathbf{e}_2 + (a_3b_4 - a_4b_3)c_1\,\mathbf{e}_2 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2\,\mathbf{e}_4 - (a_1b_4 - a_4b_1)c_2\,\mathbf{e}_3 + (a_3b_4 - a_4b_3)c_2\,\mathbf{e}_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3\,\mathbf{e}_4 - (a_1b_4 - a_4b_1)\,c_3\,\mathbf{e}_2 - (a_2b_4 - a_4b_2)\,c_3\,\mathbf{e}_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,c_4\,\mathbf{e}_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\,c_4\,\mathbf{e}_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_4\,\mathbf{e}_1,$$

43) $\mathbf{V} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = [(a_3b_4 - a_4b_3)\,c_2 - (a_2b_4 - a_4b_2)\,c_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_4]\,\mathbf{e}_1 + [(a_3b_4 - a_4b_3)c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\,c_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\,c_4]\,\mathbf{e}_2 + [(a_2b_4 - a_4b_2)\,c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\,c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,c_4]\,\mathbf{e}_3 +$

$[(a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3]\, \mathbf{e}_4$

44) $\mathbf{V}_1 = (a_3b_4 - a_4b_3)\, c_2 - (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_4$

$\mathbf{V}_2 = (a_3b_4 - a_4b_3)\, c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_4,$

$\mathbf{V}_3 = (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1) c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_4,$

$\mathbf{V}_4 = (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1) c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_3,$

$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1\, \mathbf{e}_1 + \mathbf{V}_2\, \mathbf{e}_2 + \mathbf{V}_3\, \mathbf{e}_3 + \mathbf{V}_4\, \mathbf{e}_4, \qquad \mathbf{V}^2 = \mathbf{V}_1^2 + \mathbf{V}_2^2 + \mathbf{V}_3^2 + \mathbf{V}_4^2$

Bu dış çarpımı dördüncü mertebeye çıkaralım. Bunun için **d** vektörü ile dış çarpalım.

$\mathbf{d} = d_1\, \mathbf{e}_1 + d_2\, \mathbf{e}_2 + d_3\, \mathbf{e}_3 + d_4\, \mathbf{e}_4$

Dış çarpımın gereği olarak, bir terimde iki aynı indisli bileşenin çarpımı sıfırdır..(20) de görüldüğü gibi, bir terimde bulunmayan indis, baz elemanında vardır. O halde dış çarpım kuralına göre, baz elemanı ile aynı indise sahip bileşen, bu terime çarpan olarak girecektir. Diğer yandan, aynı iki baz elemanı çarpılacaktır. Başka bir deyimle, iç çarpım yapılacaktır. Uygulanan kural, dış çarpım kuralıdır, fakat yapılan işlem, iç çarpım işlemidir. Dört boyutlu uzayda, dördüncü mertebe dış çarpım, sayısal bir değerdir. O değer de, dördüncü mertebe determinanttır, dört boyutlu uzayda, üst paralelyüzün üst hacmidir. Bu sonuç uzayda da vardır. Uzayda baz elemanlarının ikinci mertebe dış çarpımı, düzlemi belirler. Uzayda düzlemi, kendi normal vektörü de belirler. O halde uzayda, düzlemin normal vektörü ile, düzlemi belirleyen baz elemanlarının dış çarpımı, aynı fonksiyondadırlar. Yapılacak dış çarpım, iç çarpım ile aynıdır ve paralelyüzün hacmidir. Yukarıdaki sonuca gelinmiş olur. Uzayda karma çarpım, yukarda tanımı verilen üçüncü mertebe dış çarpımdır. Dördüncü mertebe de, dış çarpım uygulandığı halde sonuç iç çarpımdır. Üst paralelyüzün üst hacmi,

45) $\text{ÜV} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = [-(a_3b_4 - a_4b_3) c_2 + (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_3 - (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_4]\, d_1 + [(a_3b_4 - a_4b_3) c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_4]\, d_2 + [-(a_2b_4 - a_4b_2) c_1 + (a_1b_4 - a_4b_1) c_2 - (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_4]\, d_3 + [(a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1) c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1) c_3]\, d_4,$

dır.İndislerde oluşan enversiyonlar, işaretlere dönüştürülmüştür.

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Doğru A(**a**) noktası ve **u** doğrultu vektörü ile verilsin. P(**p**) noktasının doğruya dik uzaklığını araştıralım.**AP** ile **u** vektörü üzerine bir paralelkenar kuralım. **u** vektörünü birim vektör yapmak için mutlak değerine bölelim. Paralelkenarın alanı P noktasının doğruya uzaklığıdır. Dört boyutlu uzayda **AP** ve **u** vektörlerinin dış çarpımının bileşenlerini bulalım. 6 bileşenin karesel ortalaması, parelelkenarın alanıdır. Bu alan **u** vektörünün mutlak değerine bölünecektir. Matlab ile bilgisayar programı:

```
A = [3 5 2 7]; B = [11 8 4 17]; P = [13 8 19 6]; u = (A – B);  v = (P – A);
g(1) = u(1)*v(2) – u(2)*v(1); g(2) = u(1)*v(3) – u(3)*v(1); g(3) = u(1)*v(4) – u(4)*v(1);
g(4) = u(2)*v(3) – u(3)*v(2); g(5) = u(2)*v(4) – u(4)*v(2); g(6) = u(3)*v(4) – u(4)*v(3);
S = sqrt(g*g');         h = S/sqrt(u*u'),
```

Matlab ile bir noktanın bir doğruya uzaklık programı**:**. (8) den,

```
A = [3 5 2 7]; B = [11 8 4 17]; P = [13 8 19 6];  m = (A – P); u = (A – B); g = m*m';
n = m*u'; s = u*u';    d = sqrt(g – n*n)/s)
```

Aykırı İki Doğru Arasındaki Uzaklık

Doğrular A(**a**) noktası, **u** doğrultusu ve B(**b**) noktası, **v** doğrultusu ile verilsinler. Birinci doğru üzerinde C(**c**), ikinci doğru üzerinde D(**d**) noktalarını alalım. CD doğrusu her iki doğruya da dik olmalıdır.

46) $\mathbf{CD}\, \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{CD}\, \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{b} + \mu\mathbf{v}, \quad \mathbf{CD} = \mathbf{b} - \mathbf{a} + \mu\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u},$

$(b_1 - a_1 + \mu v_1 - \lambda u_1)\, u_1 + (b_2 - a_2 + \mu v_2 - \lambda u_2)\, u_2 + (b_3 - a_3 + \mu v_3 - \lambda u_3)\, u_3 + (b_4 - a_4 + \mu v_4 - \lambda u_4)\, u_4 = 0, \qquad (b_1 - a_1 + \mu v_1 - \lambda u_1)\, v_1 + (b_2 - a_2 + \mu v_2 - \lambda u_2)\, v_2 + (b_3 - a_3 + \mu v_3 - \lambda u_3)\, v_3 + (b_4 - a_4 + \mu v_4 - \lambda u_4)\, v_4 = 0,$

$(\mathbf{b} - \mathbf{a})\, \mathbf{u} + \mu(\mathbf{v}\, \mathbf{u}) - \lambda(\mathbf{u}\, \mathbf{u}) = 0, \qquad (\mathbf{b} - \mathbf{a})\, \mathbf{v} + \mu(\mathbf{v}\, \mathbf{v}) - \lambda(\mathbf{u}\, \mathbf{v}) = 0$

İç çarpımları sıfıra eşitlenmiştir. λ ve μ parametreler iki denklemden çözülür ve CD uzunluğu bulunur. Matlab ile bilgisayar programı:

```
A= [3  8  12  7]: u = [4  6  15  –3];  B = [13  7  5  10];  v = [13  8  17  4];
s =  u*u’; q = v*u’; t = v*v’; da = [(B – A)*u’  (B – A)*v’];  e = [s q];
f = – [q t]; h = [e’ f’];           x = inv(h)*da’;
for i = 1:4  C(i) = A(i) + x(1)*u(i);  D(i) = B(i) + x(2)*v(i);end
d = sqrt(C – D)*(C – D)’);
D = (A – B); r = D*D’; s = u*u’; t = v*v’; q = u*v’ m = D*u’; n = D*v’;
dg = sqrt(r + (m*m*t – 2*m*n*q + n*n*s)/(– s*t + q*q) );  dg
```

Son iki satır, daha önce verilen, türev hesaplanarak bulunan, aykırı doğruların ortak dikme programıdır.

Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı

A(**a**), B(**b**), P(**p**) noktaları ile oluşan, OAB düzlemine P noktasının uzaklığını hesaplayalım. (41) ile verilen paralelyüzün hacim formülü ile, Paralelyüzün hacmi ve (32) formülü ile **OA** ve **OB** vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı hesaplanır..

$$\mathbf{V}_1 = (a_3b_4 - a_4b_3)\, p_2 - (a_2b_4 - a_4b_2)\, p_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)\, p_4$$

$$\mathbf{V}_2 = (a_3b_4 - a_4b_3)\, p_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\, p_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\, p_4,$$

$$\mathbf{V}_3 = (a_2b_4 - a_4b_2)\, p_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\, p_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, p_4,$$

$$\mathbf{V}_4 = (a_2b_3 - a_3b_2)\, p_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\, p_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, p_3,$$

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}_1^2 + \mathbf{V}_2^2 + \mathbf{V}_3^2 + \mathbf{V}_4^2, \qquad \mathbf{S}^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_4 - a_4b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_2b_4 - a_4b_2)^2 + (a_3b_4 - a_4b_3)^2,$$

$$d = V/S \text{ Birim uzunluk}$$

P noktasının OAB düzlemine uzaklığıdır. Matlab ile bilgisayar programı:

```
A = [2 –5 –1 8]; B = [12 –9 –6 15];  P = [5 11 8 18];
V(1) = (A(3)*B(4) – A(4)*B(3))*P(2) – (A(2)*B(4) – A(4)*B(2))*P(3) + (A(2)*B(3) –
A(3)*B(2))*P(4);      V(2) = (A(3)*B(4) – A(4)*B(3))*P(1) – (A(1)*B(4) – A(4)*B(1))*P(3)
+ (A(1)*B(3) – A(3)*B(1))*P(4);       V(3) = (A(2)*B(4) – A(4)*B(2))*P(1) – (A(1)*B(4) –
A(4)*B(1))*P(2) + (A(1)*B(2) – A(2)*B(1))*P(4);          V(4) = (A(2)*B(3) –
A(3)*B(2))*P(1) – (A(1)*B(3) – A(3)*B(1))*P(2) + (A(1)*B(2) – A(2)*B(1))*P(3);
VA = Sqrt ( V*V’ ) ;
S(1) = A(1)*B(2) – A(2)*B(1);         S(2) = A(1)*B(3) – A(3)*B(1);       S(3) = A(1)*B(4) –
A(4)*B(1);         S(4) = A(2)*B(3) – A(3)*B(2);       S(5) = A(2)*B(4) – A(4)*B(2);
S(6) = A(3)*B(4) – A(4)*B(3);           SA = sqrt( S*S’);
d = VA/SA;
A = [2 –5 –1 8];  B = [12 –9 –6 15];    C = [0 0 0 0];   P = [5 11 8 18]; A1 = (A – B);
A2 = (A – C);   A3 = (A – P); e(1) = A1*A1’;  e(2) = A1*A2’;  f(1) = e(2);    f(2) = A2*A2’;
c(1) = – A1*A3’;   c(2) = – A2*A3’;    fa = [e;f]; y = inv(fa)*c’;   da = [A1’ A2’];
x = A’ + da*y;   g = (P – x’);  d = sqrt(g*g’);   g1 = A1*g’;   g2 = A2*g’;  d, g1, g2
```

Son 4 satır, 6’ıncı sayfada verilen yöntemle, burada uzaklığı hesaplayacaktır.

Bir Noktanın Bir Üst Düzleme Uzaklığı

Düzlemde olduğu gibi, dört boyutlu uzayın üst paralelyüzünün üst hacmini, tabanındaki paralelyüzün hacmine bölmek suretiyle. OABC üst düzleminin P noktasına uzaklığı hesaplanacaktır. Formül (45) den,

$$\text{ÜV} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = [-(a_3b_4 - a_4b_3)c_2 + (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_3 - (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_4]\, p_1 + [(a_3b_4 - a_4b_3)c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_4]\, p_2 + [-(a_2b_4 - a_4b_2)c_1 + (a_1b_4 - a_4b_1)c_2 - (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_4]\, p_3 + [(a_2b_3 - a_3b_2)\, c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3]\, p_4,$$

üst paralelyüzün üst hacmi bulunur. Formül (44) den,

$$\mathbf{V}_1 = (a_3b_4 - a_4b_3)\, c_2 - (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)\, c_4$$

$$\mathbf{V}_2 = (a_3b_4 - a_4b_3)\, c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_3 + (a_1b_3 - a_3b_1)\, c_4,$$

$$\mathbf{V}_3 = (a_2b_4 - a_4b_2)\, c_1 - (a_1b_4 - a_4b_1)\, c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\, c_4,$$

$\mathbf{V}_4 = (a_2b_3 – a_3b_2)\, c_1 – (a_1b_3 – a_3b_1)\, c_2 + (a_1b_2 – a_2b_1)\, c_3,$

$\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}_1^2 + \mathbf{V}_2^2 + \mathbf{V}_3^2 + \mathbf{V}_4^2, \qquad d = ÜV/V,$

bulunur. Üst düzlem paragrafında bir noktanın bir üst düzleme uzaklığının bulunması için, bilgisayar programı verilmiştir. Burada üst hacmin, hacme oranı için yazılan formül, aynen bilgisayara yazılırsa, bilgisayar işlemi için yeterli olur. Her ikisini karşılaştırma fırsatı doğar.

Dört Boyutlu Uzayda Doğrunun Vektörel Denklemi

Bir A(**a**) noktası ve **v** doğrultusu bilinen doğrunun vektörel denklemi,

49) $\quad \mathbf{v}\Lambda(\mathbf{r} – \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{v}\Lambda\mathbf{r} – \mathbf{v}\Lambda\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{v}\Lambda\mathbf{r} + \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{m} = – \mathbf{v}\Lambda\mathbf{a}$

v ve (**r – a**) doğrultularının paralel olmasıyla ifade edilir. Doğrunun bu denklemine **ikinci vektörel biçim** denilecektir. **m** vektörüne moment tansörü denilir. Moment tansörü, doğrultu vektörüne diktir. Çünkü **v** vektörü ile **m** tansörünün dış çarpımında, **v** vektörü iki defa gelmektedir. Üçüncü mertebe çarpım, iç çarpımdır.

Örnek:.

$\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 – \mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4, \qquad \mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 – 2\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4,$

(32) den,

$\mathbf{m} = – 19\mathbf{g}_{12} + 17\mathbf{g}_{13} – 18\mathbf{g}_{14} + 16\mathbf{g}_{23} + 11\mathbf{g}_{24} – 25\, \mathbf{g}_{34},$

$\mathbf{r} – \mathbf{a} = (x_1 – 5)\mathbf{e}_1 + (x_2 + 2)\mathbf{e}_2 + (x_3 – 6)\mathbf{e}_3 + (x_4 – 1)\mathbf{e}_4$

$\mathbf{v}\Lambda(\mathbf{r} – \mathbf{a}) = [2(x_2 + 2) – 3(x_1 – 5)]\mathbf{g}_{12} + [2(x_3 – 6) + (x_1 – 5)]\mathbf{g}_{13} + [2(x_4 – 1) – 4(x_1 – 5)]\mathbf{g}_{14} +$
$[3(x_3 – 6) + (x_2 + 2)]\mathbf{g}_{23} + [3(x_4 – 1) – 4(x_2 + 2)]\mathbf{g}_{24} + [– (x_4 – 1) – 4(x_3 – 6)]\mathbf{g}_{34} = 0,$

$\mathbf{v}\Lambda(\mathbf{r} – \mathbf{a}) = (– 3x_1 + 2x_2 + 19)\mathbf{g}_{12} + (x_1 + 2x_3 – 17)\mathbf{g}_{13} + (– 4x_1 + 2x_4 + 18)\mathbf{g}_{14} +$
$(x_2 + 3x_3 – 16)\mathbf{g}_{23} + (– 4x_2 + 3x_4 – 11)\mathbf{g}_{24} + (– 4x_3 – x_4 + 25)\mathbf{g}_{34} = 0,$

Bu ifadenin sıfıra eşitlenmesi ile, 6 tane denklem yazılır. Katsayılar matrisi 6 satır, 4 sütunludur.. **v** vektörü **m** tansörüne diktir. İkisinin dış çarpımında, **v** iki kez gelmiştir. Üçüncü mertebe dış çarpım, iç çarpım uygulamasıdır. Dördüncü mertebe dış çarpım da, iç çarpım uygulamasıdır, fakat bu çarpım tansör değildir, sayıdır.

50) $\quad \mathbf{v}\Lambda\mathbf{m} = 2.16\, \mathbf{g}_{123} + 2.11\, \mathbf{g}_{124} – 2.25\, \mathbf{g}_{134} + 3.17\, \mathbf{g}_{213} – 3.18\, \mathbf{g}_{214} – 3.25\, \mathbf{g}_{234} +$
$19\, \mathbf{g}_{312} + 18\, \mathbf{g}_{314} – 11\, \mathbf{g}_{324} – 4.19\, \mathbf{g}_{124} + 4.17\, \mathbf{g}_{413} + 4.16\, \mathbf{g}_{423} = 0,$

Metrik tansörün indisleri üzerindeki enversiyonları, işaretlere dönüştürelim.

$\mathbf{v}\Lambda\mathbf{m} = 32\, \mathbf{g}_{123} + 22\, \mathbf{g}_{124} – 50\, \mathbf{g}_{134} – 51\, \mathbf{g}_{123} + 54\, \mathbf{g}_{124} – 75\, \mathbf{g}_{234} + 19\, \mathbf{g}_{123} – 18\, \mathbf{g}_{134}$
$+ 11\, \mathbf{g}_{234} – 76\, \mathbf{g}_{124} + 68\, \mathbf{g}_{134} + 64\, \mathbf{g}_{234} = 0,$

$\mathbf{v}\Lambda\mathbf{m} = (32 – 51 + 19)\, \mathbf{g}_{123} + (22 + 54 – 76)\, \mathbf{g}_{124} + (– 50 – 18 + 68)\, \mathbf{g}_{134} +$
$(– 75 + 11 + 64)\, \mathbf{g}_{234},$

Eşitliğin doğruluğu görülüyor.

İki Doğrunun Kesim Noktası

Doğrular birinci ve ikinci vektör biçiminde verilmiş olsunlar.

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\, \mathbf{u}, \qquad \mathbf{v} \Lambda \mathbf{r} – \mathbf{v} \Lambda \mathbf{b} = 0, \qquad \mathbf{v} \Lambda (\mathbf{a} + \lambda\, \mathbf{u}) – \mathbf{v} \Lambda \mathbf{b} = 0, \qquad \mathbf{v} \Lambda (\mathbf{a} + \lambda\, \mathbf{u} – \mathbf{b}) = 0,$

yerleştirmesini yapalım. Soldan **v** parantezine alınırsa**,** eşitliğin sağlanması için,.bu iki çarpanın bileşenlerinin orantılı olmaları gerekir. Orantı katsayısı k olsun.

$\mathbf{a} – \mathbf{b} + \lambda\, \mathbf{u} – k\, \mathbf{v} = 0,$

Bu denklem bileşenlerle ifade edilirse, iki bilinmeyen dört denklem yazılır. Sistemin türdeş olduğu varsayılırsa, çözüm olması için, herhangi üç satırdan oluşan katsayılar matrisinin rangı, 3'ten küçük olmalıdır. 3'ten küçük olmazsa, yalnız sıfır çözümü olur. Dördüncü satırı da içeren, ikinci bir sistemin de rangı, 3'ten küçük olmalıdır. Eğer bu iki sistemin rangı da 3 olursa, doğrular **iki kat aykırıdır** denilir. Çünkü iki denklemden çözülen iki bilinmeyen, diğer iki denklemi sağlamaz, Eğer sistemlerden birinin rangı 3 diğeri 2 olursa, bulunan iki bilinmeyen, diğer iki denklemin birini sağlar, diğerini sağlamaz. Doğrular **bir kat aykırıdır** denilir. Çözümün var olması için, rang 2 olmalıdır. Bulunan λ değeri birinci doğru denkleminde yerine konulursa, kesim noktası bulunur.

Dört Boyutlu Uayda Düzlemin Vektörel Denklemi

Doğruda olduğu gibi, dış çarpımla düzlem denklemi verilecektir. Düzlemin iki doğrultu vektörü ve bir noktası verilsin.

51) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0, \qquad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{r} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = 0, \qquad \mathbf{m} = -\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{a},$

m tansörüne **moment tansörü** denilir. Düzlemin bu denklemine **ikinci vektörel biçim** denilecektir. Moment tansörü **u** ve **v** vektörlerine diktir. Çünkü bu vektörler, iki defa dış çarpıma girmiş olacaklardır. Doğruda olduğu gibi, **r** – **a** vektörü, **u** ve **v** vektörlerinin belirlediği düzleme, paralel kılınmaya çalışılmıştır. Üçüncü mertebe dış çarpım, karma çarpım olduğundan, sıfıra eşitlemekle, üç vektörün bu düzleme paralel veya bu düzlemin içinde olduğu, ifade edilmiş olur. Üçüncü mertebe dış çarpım veya karma çarpım, paralelyüzün hacmidir. Fakat burada hacim, aykırı simetrik tansörel bir kavramdır. Ancak üst paralelyüzün üst hacmi sayısal bir değerdir. Uzayda paralelkenarın alanı, vektörel bir kavramdır. Ancak paralelyüzün hacmi, sayısal bir değerdir. Dört boyutlu uzayda, paralelyüzün koordinat üst yüzeylerinde, dört tane paralelyüzlerden oluşan izdüşümleri vardır. İçinden geçmeyen, koordinat ekseninin baz elemanı, bu izdüşümlerin baz elemanıdır. Bu eksenler sözü geçen üst düzlemlere diktirler. Üç boyutlu üst düzlemler, dört boyutlu uzayda, dört bileşenli bir aykırı simetrik tansör olmuşlardır.

Bir Doğru İle Bir Düzlemin Kesim Noktası

Doğru denklemini, birinci vektörel biçimde, düzlemin denklemini de, ikinci vektörel biçimde alalım.

52) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0, \qquad \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge (\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} - \mathbf{b}) = 0,$

Üçüncü mertebe dış çarpım, karma çarpım olduğundan, çarpımın sıfır olması için, doğrunun düzleme paralel veya içinde olması gerekir. Bunun için de, doğrunun **v**, **w** vektörlerinin doğrusal toplamı olarak ifade edilmesi gerekir

53) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\,\mathbf{u} = \mu\,\mathbf{v} + \nu\,\mathbf{w}; \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\,\mathbf{u} - \mu\,\mathbf{v} - \nu\,\mathbf{w} = 0;$

Son vektörel denklem bileşenleri ile ifade edilirse, üç bilinmeyen dört denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Eğer rang 4 ise, doğru düzlemi kesmez, aykırıdır. Rang 3 ise, üç bilinmeyenli denklem sisteminin kökleri, dördüncü denklemi de sağlar. Bulunan bilinmeyenler doğruda yerine konularak, kesim noktası bulunur. Bu işlem doğrunun ikinci vektörel biçimde, düzlemin birinci vektörel biçimde, alınması ile de yapılabilir.

İki Düzlemin Arakesiti

Düzlemlerden birinin denklemini birinci, ikincinin denklemini de ikinci vektörel biçimde alalım. İkinci düzlemde birinci düzlemin ifadesini, **r** yerine koyalım.

54) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v}, \qquad \mathbf{w} \wedge \mathbf{t} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0, \qquad \mathbf{w} \wedge \mathbf{t} \wedge (\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v} - \mathbf{b}) = 0,$

Üçüncü mertebe dış çarpım, karma çarpımdır Üçüncü mertebe dış çarpımın sıfır olması için, parantez içindeki vektörel toplamın, **w** ve **t** vektörlerinin doğrusal toplamı olarak ifade edilmesi gerekir. Bu vektörel toplamın bileşenlerle ifadesi, dört bilinmeyen, dört denklemli bir denklem sistemi oluşturur. Katsayılar matrisinin rangı 4 ise, bir çözüm vardır. İki düzlemin bir ortak noktası vardır. Çözüm olmaması, aykırı durum söz konusu değildir. Katsayılar matrisinin rangı 3 ise, üç bilinmeyen, dördüncü bilinmeyene bağlı olarak çözülür. Dördüncü bilinmeyen parametre olur, bir doğru belirlenir. Bu doğruya **arakesit** denilir. Rang daha aşağı inerse, düzlemlerde soysuzlaşmalar görülür.

Bir Doğrunun Bir Düzlem İçinde Olması

Düzlem ve doğru,

55) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0, \qquad \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\,\mathbf{u}) = 0,$

denklemleri ile verilsin. Doğrunun ifadesi düzlemde yerine konulursa, ikinci mertebe dış çarpım bulunur. Bu değerin sıfır olması ancak, **v** ve **w** vektörlerinin doğrusal toplamı olmasıyla mümkündür.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\,\mathbf{u} - \mu\,\mathbf{v} - \nu\mathbf{w} = 0,$$

Bu vektörün bileşenlerle ifadesi 3 bilinmeyen 4 denklemden oluşan bir sistem oluşturur. Eğer katsayılar matrisinin rangı 4 ise, çözüm yoktur, doğru ile düzlemin ortak noktası yoktur, doğru ile düzlem aykırıdır. Rang 3 ise, doğru düzlemi bir noktada keser. Rang 2 ise, doğru düzlemin içindedir.

Dört Boyutlu Uzayda Üst Düzlemin Vektörel Denklemi

Düzlemde olduğu gibi, dış çarpımla üst düzlem denklemi verilecektir. Üst düzlemin üç doğrultu vektörü ve bir noktası verilsin.

55) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0, \qquad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{r} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{a} = 0,$

$$\mathbf{m} = -\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{a},$$

m tansörüne **moment tansörü** denilir. Üst düzlemin bu denklemine, **ikinci vektörel biçim** denilecektir. Moment tansörü **u, v** ve **w** vektörlerine diktir. Çünkü bu vektörler, iki defa dış çarpıma girmiş olacaklardır. Düzlemde olduğu gibi, **r** – **a** vektörü, **u**, **v** ve **w** vektörlerinin belirlediği üst düzleme, paralel kılınmaya çalışılmıştır. Dördüncü mertebe dış çarpım, karma çarpım olduğundan, sıfıra eşitlemekle, dört vektörün bu üst düzleme paralel veya bu üst düzlemin içinde olması sağlanmıştır.

Bir Doğru İle Bir Üst Düzlemin Kesim Noktası

Doğru denklemini, birinci vektörel biçimde, düzlemin denklemini de, ikinci vektörel biçimde alalım.

56) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{s} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0, \qquad \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{s} \wedge (\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} - \mathbf{b}) = 0,$

Üçüncü mertebe dış çarpım, karma çarpım olduğundan, çarpımın sıfır olması için, doğrunun üst düzleme paralel veya içinde olması gerekir. Bunun için de, doğrunun **v**, **w, t** vektörlerinin doğrusal toplamı olarak ifade edilmesi gerekir

57) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\,\mathbf{u} = \mu\,\mathbf{v} + \nu\,\mathbf{w} + \rho\,\mathbf{s}; \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \lambda\,\mathbf{u} - \mu\,\mathbf{v} - \nu\,\mathbf{w} - \rho\,\mathbf{s} = 0;$

Son vektörel denklem bileşenleri ile ifade edilirse, dört bilinmeyen dört denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Eğer rang 4 ise, doğru üst düzlemi keser. Çözülen bilinmeyen değerleri yerine konularak, kesim noktası bulunur. Rang 3 ise, μ, ν, ρ parametreleri λ'ya bağlı olarak hesaplanır. λ'nın her değeri için, (55) üst düzlem denklemi sağlanır. Doğru üst düzlemin içindedir.

Bir Düzlemle Bir Üst düzlemin Arakesiti

Düzlemin denklemini birinci, üst düzlemin denklemini de ikinci vektörel biçimde alalım. Üst düzlemde, düzlemin ifadesini, **r** yerine koyalım.

58) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v}, \quad \mathbf{w} \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{t} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0, \quad \mathbf{w} \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{t} \wedge (\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v} - \mathbf{b}) = 0,$

Dördüncü mertebe dış çarpım, karma çarpımdır Dördüncü mertebe dış çarpımın sıfır olması için, parantez içindeki vektörel toplamın, **w**, **s** ve **t** vektörlerinin doğrusal toplamı olarak ifade edilmesi gerekir.

$$\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v} - \mathbf{b} = \nu\,\mathbf{w} + \rho\,\mathbf{s} + \tau\,\mathbf{t}$$

Bu vektörel toplamın bileşenlerle ifadesi, beş bilinmeyen, dört denklemli bir denklem sistemi oluşturur. Katsayılar matrisinin rangı 4 ise, dört bilinmeyen, bir bilinmeyene bağlı olarak çözülür. Beşinci bilinmeyen bağımsız olarak değerler alır. Düzlemle üst düzlemin arakesiti bir doğrudur. Rang 3 ise üç parametre iki parametreye bağlı olarak çözülür. Arakesit düzlemdir. Düzlem, üst düzlemin içindedir. Rang daha aşağı düşerse, soysuzlaşmalar görülür. .

İki Üst Düzlemin Arakesiti

59) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v} + \nu\,\mathbf{w}, \qquad \mathbf{s} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{p} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0,$

$$\mathbf{s} \wedge \mathbf{t} \wedge \mathbf{p} \wedge (\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v} + \nu\,\mathbf{w} - \mathbf{b}) = 0,$$

Dördüncü mertebe dış çarpım, karma çarpımdır Dördüncü mertebe dış çarpımın sıfır olması için, parantez içindeki vektörel toplamın, **s**, **t** ve **p** vektörlerinin doğrusal toplamı olarak ifade edilmesi gerekir.

$$\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{u} + \mu\,\mathbf{v} + \nu\,\mathbf{w} - \mathbf{b} = \rho\,\mathbf{s} + \tau\,\mathbf{t} + \theta\,\mathbf{p}$$

Bu vektörel toplamın bileşenlerle ifadesi, altı bilinmeyen, dört denklemli bir denklem sistemi oluşturur. Katsayılar matrisinin rangı 4 ise, dört bilinmeyen, iki bilinmeyene bağlı olarak çözülür. İki bilinmeyen bağımsız olarak değerler alır. İki üst düzlemin arakesiti bir düzlemdir.. Rang 3 ise üç parametre, üç parametreye bağlı olarak çözülür. Arakesit üst düzlemdir. İki üst düzlem iç içedir. veya paraleldir. Rang daha aşağı düşerse, soysuzlaşmalar görülür.

II TEMEL GEOMETRİK ŞEKİLLER.

Üst Dikdörtgenler Prizması (Hiper prizma)

Dört boyutlu uzayın temel geometrik şekillerindendir. Uzayda dikdörtgenler prizmasının 8 köşesi vardır. Üst dikdörtgenler prizması, uzaydaki prizmayı taban olarak alır ve dördüncü boyuta uzanır. Üst dikdörtgenler prizmasının 8 köşesi de, dördüncü boyutta üst taban olarak vardır. Üst dikdörtgenler prizmasının 16 köşesi vardır. Bir köşede 4 ayrıtı birleşir. Bu ayrıtlar ikişer, ikişer dik olup, $C_4^2 = 6$ tane yüz ve $C_4^3 = 4$ tane üst yüz (üst düzlem) oluştururlar. Yüzler birer dikdörtgen, üst yüzler ise, dikdörtgenler prizmasıdır. 4 prizma bir köşede ve 4 prizma da, köşegen karşıtı köşede, üst prizmayı dört boyutlu uzayda sınırlarlar. 8 tane prizması vardır. Bu prizmaların kenarları, ikişer, ikişer paralel, eşit ve paralel olmayanlar da, birbirlerine diktirler. Her bir ayrıt, içinde bulunmadığı prizmaya diktir. Bir köşede 6 yüz birleşirler. Bir yüz yalnız bir köşeden geçseydi, 16 köşeden geçen, 96 yüzü olması gerekirdi, halbuki bir yüz üzerinde 4 tane köşe vardır. Üst dikdörtgenler prizmasının 24 yüzü vardır. Bir köşeden geçen 4 ayrıtın biri, diğer üç ayrıtla ikişer, ikişer üç tane düzlem belirler. Bir ayrıttan, üç yüz geçer. Bu yüzler ikişer, ikişer diktirler. Bir yüz üzerinde 4 ayrıt vardır. Eğer bir ayrıt yalnız bir yüz üzerinde bulunsaydı, 24 yüz üzerinde 96 ayrıtın olması gerekirdi. Fakat bir ayrıttan üç yüz geçtiği için, üst dikdörtgenler prizmasının, 32 ayrıtı vardır. Bu ayrıtlar, sekizer, sekizer paralel ve eşittirler. Bir köşede birleşen dört ayrıt ve bir ayrıtta birleşen üç yüz, birbirlerine ikişer, ikişer diktirler. Bir köşeden geçen üç ayrıt bir üst yüz oluşturur. Bir köşeden geçen 4 üst yüzden her biri, içinden geçmeyen ayrıta diktir

Bir üst dikdörtgenler prizmasının toplam alanı, toplam hacmi ve üst hacmi sıra ile,

$S_t = 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$ Birim^2, $V_t = 2(abc + abd + acd + bcd)$ Birim^3,

$$ÜV = abcd \text{ Birim}^4$$

olur .

Üst Beşyüzlü (hiper beşyüzlü)

Dört boyutlu uzayda, $C_5^1 = 5$ tane köşesi, $C_5^2 = 10$ tane ayrıtı, $C_5^3 = 10$ tane yüzü, $C_5^4 = 5$ tane üst yüzü olan geometrik şekle **üst beşyüzlü** denilir. Uzayda dörtyüzlünün, dört boyutlu uzaydaki temsilcisidir. Dört boyutlu uzayın köşesi en az olan, geometrik şeklidir. Beş köşenin her birinden 4 ayrıt geçer. Bir ayrıt yalnız bir köşeden geçseydi, 20 ayrıtı olması gerekirdi. Halbuki bir ayrıt iki köşeden geçer. Üst beşyüzlünün 10 ayrıtı vardır. Bir ayrıttan üç yüz geçer. Her yüz üçgendir. Her yüz üzerinde 3 ayrıt bulunur. Bu nedenle, ayrıt sayısı yüz sayısına eşittir.

Düzgün Üst Beşyüzlü

Düzgün üst beşyüzlü, uzaydaki düzgün dörtyüzlünün, dört boyutlu uzaydaki temsilcisidir. 10 tane yüzü eşkenar üçgen ve 5 tane üst yüzü, düzgün dörtyüzlüdür. Yüzlerinin alanları,

60) $h = a\sqrt{3}/2$, $S = a.a\sqrt{3}/(2.2)$, $10S = 5.a^2\sqrt{3}/2$, birim^2

Dörtyüzlülerin hacimleri:

61) $h^2 = a^2 - (a\sqrt{3}/2.2/3)^2 = a^2 - a^2/3 = 2.a^2/3$, $h = a\sqrt{2}/\sqrt{3}$, $V = a^2\sqrt{3}/4.(a\sqrt{2}/\sqrt{3})/3$

$V = a^3.\sqrt{2}/12$,birim^3, $5V = 5\, a^3.\sqrt{2}/12$,birim^3,

Düzgün üst beşyüzlünün yüksekliği ve üst hacmi:

62) $h^2 = a^2 - (a\sqrt{2}/\sqrt{3}.3/4)^2 = a^2 - 3a^2/8 = 5.a^2/8$, $h = a\sqrt{5}/(2.\sqrt{2})$, $UV = V.h/4$

$UV = a^3.\sqrt{2}/12.[a\sqrt{5}/(2.\sqrt{2})]/4 = a^4\sqrt{5}/96$, $UV = a^4\sqrt{5}/96$, birim^4

olur. Üst beşyüzlünün yüksekliği bulunurken, düzgün dörtyüzlünün yüksekliği üzerinde Tales teoremi nedeni ile, 3/4'ü alınmıştır. Tales teoremi nedeni ile, dörtyüzlüde yüz ortayları bir noktada ve 3/4 oranında kesişirler. Bu teorem, Karmaşık Sayılar kitabımın VI'ıncı bölümünün dörtyüzlüler paragrafında kanıtlanmıştır. Bu teorem düzgün üst beşyüzlüde de geçerlidir Fakat oran 4/5 olur.

Düzgün üst beşyüzlünün, uygun bir karteziyen koordinat sistemi seçimi yaparak, köşe koordinatlarını hesaplayalım. Yukarda düzgün üst beşyüzlünün yüksekliği hesaplandı. Bu yükseklik üzerinde, köşeden itibaren, yüksekliğin 4/5'i kadar ilerisinde, üst beşyüzlünün ağırlık merkezi vardır. Koordinat sisteminin başlangıç noktası ağırlık merkezidir. Bu noktayı köşelere birleştiren vektörler, denge halindedirler. Toplamları sıfırdır. Aralarındaki açılar eşittir. A(1, 0, 0, 0) noktası, Ox_1 ekseni üzerinde alınacaktır. OA uzunluğu birimdir. Üst beşyüzlünün bütün kenarları eşittir. Bir kenar uzunluğu düzgün üst beşyüzlünün yüksekliği formülünden bulunacaktır. Başlangıç noktası ağırlık merkezi olduğundan, OA uzaklığı yüksekliğin, 4/5'i olur.

63) $OA = 4\,h/5 = a.4\sqrt{5}/(2.\sqrt{2}.5) = a\sqrt{2}/\sqrt{5} = 1, \qquad a = \sqrt{5}/\sqrt{2},$

olur. Başlangıcı köşelere birleştiren vektörler, Ox_1 ekseni ile eşit açılar yaparlar. Birinci bileşenleri eşit olacaklardır. OA ile dengeleneceğinden, diğer vektörlerin birinci bileşenleri –1/4 olacaktır. B noktasını Ox_1x_2 düzleminde, C noktasını da, $Ox_1x_2x_3$ üst düzleminde alalım. $B(-1/4, b_2, 0, 0)$, $C(-1/4, c_2, c_3, 0)$, $D(-1/4, d_2, d_3, d_4)$, $E(-1/4, e_2, e_3, e_4)$ olurlar. AB uzunluğu, üst beşyüzlünün bir kenarı olup, $a = \sqrt{5}/\sqrt{2}$ olacaktır.

$$AB^2 = (1 + 1/4)^2 + b_2^2 = 5/2, \qquad b_2{}^2 = 40/16 - 25/16 = 15/16, \quad b_2 = -\sqrt{15}/4$$

olur. Kare kökün önündeki işaret, pozitif veya negatif alınabilir. Bundan sonra gelecek noktaların, ikinci bileşenleri, buradan hesaplanacağından, ters işaret gelirler. Başka bir şey değişmez. Köşe noktaları birim üst kürenin üzerindedirler. Vektörler arasındaki açılar eşit olup, kosinüsleri –1/4 tür.

64) $\mathbf{OB.OC} = (-1/4)^2 - \sqrt{15}/4.c_2 = -1/4, \qquad c_2 = (1/16 + 1/4).4/\sqrt{15} = \sqrt{5}/(4\sqrt{3})$

$BC^2 = (-1/4 + 1/4)^2 + (-\sqrt{15}/4 - c_2)^2 + c_3^2 = a^2, \qquad c_3^2 = 5/2 - [-\sqrt{15}/4 - \sqrt{5}/(4\sqrt{3})]^2$

$$c_3^2 = 5/2 - (-\sqrt{15}/3)^2 = 5/2 - 15/9 = 5/2 - 5/3 = 5/6, \qquad c_3 = \sqrt{5}/\sqrt{6},$$

$$\mathbf{OB.OD} = (-1/4)^2 - \sqrt{15}/4.d_2 = -1/4, \qquad d_2 = c_2 = \sqrt{5}/(4\sqrt{3})$$

$\mathbf{OC.OD} = (-1/4)^2 + [\sqrt{5}/(4\sqrt{3})]^2 +. d_3\sqrt{5}/\sqrt{6} = -1/4,. \quad d_3 = (-1/4 - 1/16 - 5/48)\sqrt{6}/\sqrt{} + d_4^2 = 1$

$$d_4^2 = 1 - 1/16 - 5/48 - 5/24 = (48 - 3 - 5 - 10)/48 = 5/8, \qquad d_4 = \sqrt{5}/(2\sqrt{2}),$$

65) $A(1, 0, 0, 0), \quad B(-1/4, -\sqrt{15}/4, 0, 0), \quad C(-1/4, \sqrt{5}/(4\sqrt{3}), \sqrt{5}/\sqrt{6}, 0),$
$D(-1/4, \sqrt{5}/(4\sqrt{3}), -\sqrt{5}/(2\sqrt{6}), \sqrt{5}/(2\sqrt{2}), \quad E(-1/4, \sqrt{5}/(4\sqrt{3}), -\sqrt{5}/(2\sqrt{6}), -\sqrt{5}/(2\sqrt{2}))$

Bu noktaların düzgün üst beşyüzlünün köşeleri olduğunu bilgisayar ile görelim.

```
p = sqrt(2);  q = sqrt(3);  r = sqrt(5);
b1 = [1  0  0  0];  b2 = [–1/4  –q*r/4  0  0];  b3 = [–1/4  r/(4*q)  r/(p*q)  0];
b4 = [–1/4  r/(4*q)  –r/(2*p*q)  r/(2*p)];     b5 = [–1/4  r/(4*q)  –r/(2*p*q)  –r/(2*p)];
b = [b1;b2;b3;b4;b5];    for i = 2:5   for j = 1:i–1   d(i,j) = 0;  c(i,j) = 0;   for k = 1:4
t(i,j,k) = b(i,k) – b(j,k);  d(i,j) = d(i,j) + t(i,j,k)*t(i,j,k);   c(i,j) = c(i,j) + b(i,j)*b(j,k); end
dd(i,j) = sqrt(d(i,j)); end
end
for i = 1:5   rr(i) = 0; for  k = 1:4   rr(i) = rr(i) + b(i,k)*b(i,k);  end
ra(i) = sqrt(rr(i));  end
dd,c,ra
```

Problemler

$$-416\,x_1 - 468\,x_2 - 718\,x_3 - 2650\,x_4 + 14954 = 0,$$
$$-1440\,x_1 - 1620\,x_2 - 3778\,x_3 - 2710\,x_4 + 14278 = 0$$
$$-2752\,x_1 - 3096\,x_2 - 872\,x_3 - 3312\,x_4 + 9736 = 0,$$
$$2244\,x_1 + 424\,x_2 + 76\,x_3 - 328\,x_4 - 5936 = 0,$$
$$1532\,x_1 + 3824\,x_2 + 3856\,x_3 + 3700\,x_4 - 36732 = 0,$$

Dört boyutlu uzayda, 5 tane üst düzlem denklemi verilmiştir. 1) Bu üst düzlemlerin oluşturduğu, üst beşyüzlünün köşelerini bulunuz. 2) Üst beşyüzlünün üst hacmini, dört tane dörtyüzlüsünün hacimlerini, yüzlerinin alanlarını ve ayrıtlarının uzunluklarını bulunuz. 3) Üst beşyüzlüye içten teğet, üst küresinin denklemini bulunuz. 4) Üst kürenin üst hacmini, üst yüzey hacmini ve yüzey alanını bulunuz.

Çözüm.

Üst düzlemlerin normal vektörleri, sıra ile u harfine, sabit terimler ikinci yana geçirilip, cb harfine atanacaklardır. cb'ye atama yaparken, sondan başlamak üzere, birer, birer çıkarılacak, en sona beşinci üst düzlemin sabit terimi gelecektir.

u1 = [– 416 – 468 – 718 – 2650]; u2 = [1532 3824 3856 3700]; u3 = [2244 424 76 – 328]; u4 = [– 2752 – 3096 – 872 – 3312]; u5 = [– 1440 – 1620 – 3778 – 2710];
cb1 = [14954 – 36732 – 5936 9736]; cb2 = [14954 – 36732 – 5936 14278];
cb3 = [14954 – 36732 9736 14278]; cb4 = [14954 – 5936 9736 14278];
cb5 = [– 36732 – 5936 9736 14278];

D1 = [u1;u2;u3;u4]; x = inv(D1)*(– cb1');

x birinci noktanın koordinatlarıdır. A(4, – 7, 12, 3), İkinci noktanın koordinatları için, D1 matrisinde, u4 yerine u5, cb1 yerine de cb2, B(2, 8, – 4, 5), üçüncü nokta için, u3 yerine u4, cb2 yerine cb3, C(– 13, 8,1, 6), dördüncü nokta için, u2 yerine u3, cb3 yerine de cb4 D(5, – 8, 1, 6), beşinci nokta için, u1 yerine u2, cb4 yerine cb5, E(– 2, 15, 6, –11), yazılacaktır..

İkinci yanıt için (32), (43) ve (45) formülleri uygulanacaktır. Bilgisayar programı:.
A = [4 –7 12 3]; B = [2 8 –4 5]; C = [–13 8 1 6]; D = [5 –8 1 6]; E = [–2 15 6 –11];
g = (A – E); h = (B – E); ve g = (A – E); h = (C – E); ve g = (A – E); h = (D – E); ve g = (B – E); h = (C – E); ve g = (B – E); h = (D – E); ve g = (C – E); h = (D – E); ve g = (B – A); h = (C – A); ve g = (B – A); h = (D – A); ve g = (C – A); h = (D – A); ve g = (C – B); h = (D – B); değer çiftleri ile,

w(1) = g(1)*h(2) – g(2)*h(1); w(2) = g(1)*h(3) – g(3)*h(1); w(3) = g(1)*h(4) – g(4)*h(1); w(4) = g(2)*h(3) – g(3)*h(2); w(5) = g(2)*h(4) – g(4)*h(2);
w(6) = g(3)*h(4)– g(4)*h(3); S = sqrt(w*w')/2;

alanlar bulunur.Yüzler üçgen olduğundan, ikiye bölünmüştür. Yukarda konulan değerler ile sırasıyla, S_{EAB} = 223.3987 birim^2, S_{EAC} = 262.8460 birim^2, S_{EAD} = 157.5183 birim^2, S_{EBC} = 155.5916 birim^2, S_{EBD} = 169.1235 birim^2, S_{ECD} = 261.4020 birim^2, S_{ABC} = 173.5187 birim^2, S_{ABD} = 96.5958 birim^2, S_{ACD} = 137.2989 birim^2, S_{BCD} = 134.7961 birim^2, alanları bulunur. Hacimler için benzer işlemler yapılır.

a = (A – E); b = (B – E); c = (C – E); ve a = (A – E); b = (B – E); c = (D – E); ve a = (A – E); b = (C – E); c = (D – E), ve a = (B – E); b = (C – E); c = (D – E); konularak hacimler hesaplanır.

V (1) = (a(3)*b(4) – a(4)*b(3))*c(2) – (a(2)*b(4) – a(4)*b(2))*c(3) + (a(2)*b(3) – a(3)*b(2))*c(4), V(2) = (a(3)*b(4) – a(4)*b(3)))*c(1) – (a(1)*b(4) – a(4)*b(1))*c(3) + (a(1)*b(3) – a(3)*b(1))*c(4), V(3) = (a(2)*b(4) – a(4)*b(2))*c(1) – (a(1)*b(4) – a(4)*b(1))*c(2) + (a(1)*b(2) – a(2)*b(1))*c(4), V(4) = (a(2)*b(3) – a(3)*b(2))*c(1) – (a(1)*b(3) – a(3)*b(1))*c(2)$_2$ + (a(1)*b(2) – a(2)*b(1))*c(3),
VA = sqrt(V*V')/3;

Yukardaki değerler sıra ile verilirse,

V_{EABC} = 6747.5 birim^3, V_{EABD} = 2308.4 birim^3, V_{EACD} = 5374.8 birim^3
V_{ABCD} = 2816 birim^3.

hacimleri bulunur. Üst hacim için, aşağıdaki formül uygulanır.

ÜV = ((– (a(3)*b(4) – a(4)*b(3))*c(2) + (a(2)*b(4) – a(4)*b(2))*c(3) – (a(2)*b(3) – a(3)*b(2))*c(4))*d(1) + ((a(3)*b(4) – a(4)*b(3))*c(1) – (a(1)*b(4) – a(4)*b(1))*c(3) + (a(1)*b(3) – a(3)*b(1))*c(4))*d(2) + (– (a(2)*b(4) – a(4)*b(2))*c(1) + (a(1)*b(4) – a(4)*b(1))*c(2) – (a(1)*b(2) – a(2)*b(1))*c(4))*d(3) + ((a(2)*b(3) – a(3)*b(2))*c(1) – (a(1)*b(3) – a(3)*b(1))*c(2) + (a(1)*b(2) – a(2)*b(1))*c(3))*d(4))/4;

$$ÜV = -33608 \text{ birim}^4$$

Ayrıtların uzunlukları:

d_{AB} = sqrt((A–B)*(A–B)'); d_{AC} = sqrt((A–C)*(A–C)'); d_{AD} = sqrt((A–D)*(A–D)');
d_{AE} = sqrt((A–E)*(A–E)'); d_{BC} = sqrt((B–C)*(B–C)'); d_{BD} = sqrt((B–D)*(B–D)');
d_{BE} = sqrt((B–E)*(B–E)'); d_{CD} = sqrt((C–D)*(C–D)'); d_{CE} = sqrt((C–E)*(C–E)');
d_{DE} = sqrt((D–E)*(D–E)');

d_{AB} = 22.1133 birim uzunluk, d_{AC} = 25.3772 birim uzunluk, d_{AD} = 11.4891 birim uzunluk, d_{AE} = 27.4226 birim uzunluk, d_{BC} = 15.8430 birim uzunluk, d_{BD} = 17.0587 birim uzunluk, d_{BE} = 20.5183 birim uzunluk, d_{CD} = 24.0832 birim uzunluk, d_{CE} = 22 birim uzunluk, d_{DE} = 29.8664 birim uzunluk,

Üçüncü yanıt için, üst beşyüzlünün, E köşesi tepe alınacak ve ABCD dörtyüzlüsü taban olarak alınacaktır. Üst beşyüzlünün bir dörtyüzlü tabanında, dört dörtyüzlü de yanlarında, üst beşyüzlüyü dört boyutlu uzayda sınırlarlar Yanal dörtyüzlülerin üst düzlemleri ile, taban üst düzleminin ölçek açılarının, açıortay üst düzlemlerinin, denklemleri yazılacaktır.Açıortay üst düzlemlerinin özeliği, her iki üst düzleme de eşit uzaklıkta olmalarıdır. (25) ile bir noktanın üst düzleme uzaklık formülü verildi.

$$h_1 = d_1(P)/\sqrt{\mathbf{u}_1^2}, \quad h_2 = d_2(P)/\sqrt{\mathbf{u}_2^2} \quad h_1 = h_2, \quad \sqrt{\mathbf{u}_2^2}\, d_1(P) - \sqrt{\mathbf{u}_1^2}\, d_2(P) = 0,$$

Çıkarılan bu formül, iki üst düzlemin açıortay üst düzleminin denklemidir.Taban üst düzleminin, yanal üst düzlemlerle oluşturduğu, dört açıortay üst düzleminin denklemleri bulunur ve dört açıortay üst düzleminin kesim noktası, içten teğet üst kürenin merkezidir. Üst beşyüzlüyü belirleyen üst düzlemlerden, ilk dördü yanal üst düzlemler, beşinci üst düzlem, taban üst düzlemidir. Formülde görülen **u** vektörleri, üst düzlemlerin normal vektörleridir. u4'e kadar olanlar yanal üst yüzlerin, u5 taban üst yüzünün normalleridir. ds1, ds2, ds3, ds4, ds5 açıortay üst düzlemlerinin normal vektörleridir. dc matrisi, problemde verilen üst düzlemlerin, ikinci yanına geçirilen sabit terimlerinin matrisidir.

Matlab ile bilgisayar programı: .

u1k = sqrt(u1*u1'); u2k = sqrt(u2*u2'); u3k = sqrt(u3*u3'); u4k = sqrt(u4*u4'); u5k = sqrt(u5*u5'); u1k = 2816; u2k = 5129.9; u3k = 5374.8, u4k = 2308.4, u5k = 6747.5; ds1 = [u5k*u1(1) – u1k*u5(1) u5k*u1(2) – u1k*u5(2) u5k*u1(3) – u1k*u5(3) u5k*u1(4) – u1k*u5(4)]; ds2 = [u5k*u2(1) – u2k*u5(1) u5k*u1(2) – u2k*u5(2) u5k*u2(3) – u2k*u5(3) u5k*u2(4) – u2k*u5(4)]; ds3 = [u5k*u3(1) – u3k*u5(1) u5k*u3(2) – u3k*u5(2) u5k*u3(3) – u3k*u5(3) u5k*u3(4) – u3k*u5(4)]; ds4 = [u5k*u4(1) – u4k*u5(1) u5k*u4(2) – u4k*u5(2) u5k*u4(3) – u4k*u5(3) u5k*u4(4) – u4k*u5(4)]; dc = [– u5k*cb1(1) – u1k*cb2(4) – u5k*cb1(2) – u2k*cb2(4) u5k*cb1(3) – u3k*cb2(4) u5k*cb1(4) – u4k*cb2(4)]; D1 = [ds1;ds2;ds3;ds4];

M = inv(D1)*(– dc)';

Bu dört açıortay üst düzleminin ortak çözümü bir noktadır, bu noktanın koordinatları M ile verilmiştir. Üst kürenin merkezidir. M noktasının bu üst kürenin merkezi olduğunu, yani üst düzlemlere eşit uzaklıkta olduğunu, Matlab bilgisayar programı ile görelim. Önce dört noktadan geçen üst düzlemin denklemini çıkaralım.

A = [4 – 7 12 3]; B = [2 8 – 4 5]; C = [– 13 8 1 6]; D = [5 – 8 1 6]; E = [– 2 15 6 – 11]; A1 = [A(1);B(1);C(1);D(1)]; A2 = [A(2);B(2);C(2);D(2)]; A3 = [A(3);B(3);C(3);D(3)]; A4 = [A(4);B(4);C(4);D(4)]; F = [1;1;1;1]; D1 = [A;B;C;D]; D2 = [F A2 A3 A4]; D3 = [F A1 A3 A4]; D4 = [F A1 A2 A4]; D5 = [F A1 A2 A3]; t5 = det (D1); t1 = – det (D2); t2 = det (D3); t3 = – det (D4); t4 = det (D5); u1 = [t1 t2 t3 t4];

u1 birinci ABCD üst düzleminin normal vektörüdür. t5 de, üst düzlemin sabit terimidir

$$u1 = -416\,x_1 - 468\,x_2 - 718\,x_3 - 2650\,x_4 + 14954 = 0,$$

İkinci satırdan sonra A = (E); yazılırsa, ikinci üst düzlemin normal vektörü bulunur.

$$u2 = -1440\,x_1 - 1620\,x_2 - 3778\,x_3 - 2710\,x_4 + 14278 = 0,$$

İkinci satırdan sonra B = (E); yazılırsa, üçüncü üst düzlemin normal vektörü bulunur.

$u3 = -2752\, x_1 - 3096\, x_2 - 872\, x_3 - 3312\, x_4 + 9736 = 0,$

İkinci satırdan sonra C = (E); yazılırsa, dördüncü üst düzlemin normal vektörü bulunur.

$u4 = 2244\, x_1 + 424\, x_2 + 76\, x_3 - 328\, x_4 - 5936 = 0$

İkinci satırdan sonra D = (E); yazılırsa, beşinci üst düzlemin normal vektörü bulunur.

$u5 = 1532\, x_1 + 3824\, x_2 + 3856\, x_3 + 3700\, x_4 - 36732 = 0$

E noktası tepe, ABCD dörtyüzlüsü taban olarak alınmıştır. İlk dört üst düzlem yanal üst yüzler, u5 taban üst düzlemidir.

Bu üst düzlemlere M merkezinin uzaklığı iki yöntemle bulunacaktır. (25) ve (28) formüllerinin uygulamalarıdır. Bilgisayar programı beşyüzlünün köşe noktaları yazıldığı yerden itibaren devam ediyor. Açıklamalar çıkarıldıktan sonra bilgisayara yazılmalıdır Aşağıdaki programda ABCD üst düzlemine merkezin uzaklığı hesaplanmıştır. Diğer üst düzlemlerin merkeze uzaklıkları, A = (E), ve B = (E); ve C = (E), ve D = (E) eşitliklerinden birini, en başa yazmak suretiyle bulunacaktır. .

```
                 u = (A – B);  v = ( C – B);   w = (D – B);
e(1) = u*u';   e(2) = u*v';  e(3) = u*w';f(1) = v*u';  f(2) = v*v';  f(3) = v*w';
g(1) = w*u';  g(2) = w*v';   g(3) = w*w';  h = (B – C)
  h1 = (B – M')*u';     h2 = (B – M')*v';      h3 = (B – M')*w';    RB = [e;f;g];
             RC = – [h1;h2;h3];            s = inv (RB)*RC;         for i = 1:4  P(i) = B(i) + s(1)*u(i)
          + s(2)*v(i) + s(3)*w(i); end         d = sqrt ((P – M')*(P – M')');     a1 = (P – M')*u';
  a2 = (P – M')*v';     a3 = (P – M')*w';
```

a1, a2, a3'lerin sıfır gelmeleri, sağlamadır. (25) numaralı uzaklık formülü:

```
 dd = (u1*M + cb1(1))/uk1;         dd = (u2*M + cb1(2))/uk2;    dd = (u3*M + cb1(3))/uk3;
dd = (u4*M + cb1(4))/uk4;     dd = (u5*M + cb2(4))/uk5;
```

Bu iki uzaklık formülünün verdiği sonuçlar, ters işaretli gelmişlerdir. Nedeni, kare kök önündeki işaretin, hepsinde pozitif alınmasıdır.

$$(x_1 - 2.4264)^2 + (x_2 + 4.2201)^2 + (x_3 - 1.9241)^2 + (x_4 - 7.6189)^2 = 2.0071^2$$

4) Üst Kürenin Hacmi, Küresel Koordinatlar:

Küresel koordinatları kurmak için herhangi bir küre alalım. Bunun merkezinden geçen yatay düzlem başlangıç düzlemi olsun. Bu düzleme dik doğrulara, **düşey doğru** ve düşey doğrudan geçen her düzleme, **düşey düzlem** denilir. Merkezden geçen düşey doğru, x_3 eksenidir. Yatay düzlem içinde bir doğru seçilir Bu doğru x_1 eksenidir. İki eksene dik olan ve sağ el sistemi oluşturan eksen de, x_2 eksenidir. Bir A noktasından geçen düşey düzlemle, A noktasını yatay düzleme izdüşürelim. A noktasının izdüşümünü başlangıca birleştiren doğrunun x_1 ekseni ile yaptığı açıya, **azimut açısı** denilir. Aşağıda bu açı u ile gösterilmiştir. A noktasını başlangıca birleştiren doğrunun, x_3 ekseni ile yaptığı açıya, **zenit açısı** denilir. Aşağıda bu açı v ile gösterilmiştir. Eğer Yer küresini dayanak seçersek, adlandırmalar biraz değişir. Başlangıç düzlemi ekvator düzlemi ve Yerin ekseni, x_3 ekseni olsun. Yer ekseninden geçen her düzleme, **meridyen düzlemi** denilir. Londrada Greenwich'den geçen meridyen düzlem, başlangıç meridyen düzlemdir. Bir meridyen düzlemin, başlangıç meridyen düzlemi ile, yaptığı iki düzlemli açıya, **boylam açısı** denilir.Aşağıda bu açı u ile gösterilmiştir. Boylam açısı sabit olan noktaların geometrik yerine, **boylam dairesi** denilir. Ekvator düzlemi ile başlangıç meridyen düzleminin arakesiti, x_1 eksenidir.Bu iki eksene dik olan ve sağ el sistemi oluşturan eksen de, x_2 eksenidir. Yukarda azimut açısı olarak tanımlanan açı, burada boylam açısıdır. Bir noktayı başlangıca birleştiren doğrunun, Yer ekseni ile yaptığı açıya, **birinci kutup açısı,** ekvator düzlemi ile yaptığı açıya da, **enlem açısı** denilir. Birinci kutup açıları sabit olan noktaların geometrik yerine, **paralel daire** veya **enlem dairesi** denilir. Kutup açısı ile enlem açısı tümlerdir. Aşağıda kutup açısı, v ile gösterilmiştir.

Dört boyutlu uzayın küresel koordinatlarını, Yer küresine dayandırmak, daha uygun olacaktır. Dört boyutlu uzayın kutuplar ekseni, x_4 ekseni olsun. Bu eksen Yer küresini içine alan üst düzleme dik olmalıdır. Bir A noktasını başlangıca birleştiren radyal doğrultunun, x_4 ekseni ile yaptığı açıya, **ikinci kutup açısı** denilecektir.Aşağıda bu açı, w ile gösterilmiştir.

$x_1 = r.\sin(w).\sin(v).\cos(u)$, $\quad x_2 = r.\sin(w).\sin(v).\sin(u)$

$x_3 = r.\sin(w).\cos(v)$. $\quad x_4 = r.\cos(w)$

u boylam açısı, v birinci kutup açısı, w de x_4 ekseni ile, radyal doğrultunun yaptığı, ikinci kutup açısıdır. u'nun, 0 dan 2π'ye kadar, v'nin, 0 dan π'ye kadar değiştiğini veya v'yi, 0'dan π/2'ye kadar değiştirip, 2 katının alındığını, küresel koordinatlardan biliyoruz. w de, 0 dan π'ye kadar değiştirilir veya 0'dan π/2'ye kadar değiştirilip, iki katı alınır. Çünkü r =1, w = π/4, v = π/4, u = π/4, değerleri ve r = 1, w = π + π/4, v = π/4, u = π/4 değerleri için, üst küre, $M_1(1/(2\sqrt{2}), 1/(2\sqrt{2}), 1/2, 1/\sqrt{2})$, $M_2(1/(2\sqrt{2}), 1/(2\sqrt{2}), 1/2, 1/\sqrt{2})$ noktalarını almıştır. w'nin π'den sonraki değerleri için, üst küre aynı noktaları, ikinci kez almaktadır. Bu nedenle w, 0'dan π'ye kadar değerler almalıdır. Bu dönüşümün fonksiyonel determinantı,

$$\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)/\partial(r, w, v, u) = -\, r^3.\sin^2(w).\sin(v).$$

dir.

66) $$UV = 2.2\int_{r=R}^{0}\int_{w=0}^{pi/2}\int_{v=0}^{pi/2}\int_{u=0}^{2pi}[1-\cos(2w)]/2\sin(v)\, r^3\, dr\, dw\, dv\, du$$

$$UV = 2.2\, r^4/4\, [w/2 - \sin(2w)/4].[-\cos(v)]\, u$$

$$UV = 2.2,\, r^4/4\, (\pi/2)/2.(1).(2\pi) = \pi^2 r^4/2, \qquad UV = \pi^2 r^4/2,$$

Üst koninin üst hacmini bulalım. Üst silindirik koordinatlar kullanılacaktır.

$x_1 = r.\sin(v).\cos(u)$, $\quad x_2 = r.\sin(v).\sin(u)$

$x_3 = r.\cos(v)$. $\quad x_4 = x_4$

v ve u değişkenleri bağımsızdırlar. Fakat r ve x_4 aralarında bağımlıdırlar Üst koninin tabanı küredir. Üst yanal yüzeyini oluşturmak için,

$$h/R = (h - x_4)/r, \qquad x_4 = h - r\, h/R = h(1 - r/R)$$

bağıntısı vardır. R taban kürenin yarıçapı, h üst koninin yüksekliğidir. v, 0'dan π/2'ye kadar değişecek ve 2 katı alınacaktır. u, 0'dan 2π'ye kadar, r de, R'den 0'a kadar değişecektir.

67) $$UV = \int_{r=R}^{0}\int_{x4=0}^{h(1-r/R)}\int_{v=0}^{pi/2}\int_{u=0}^{2pi}\sin(v)\, r^2\, dr\, dx_4\, dv\, du = [-\cos(v)]\, u\, h\, [r^3/3 - r^4/(4R)]$$

$$= 2.(1).2\pi\, h.\, R^3/12 = \pi\, h.R^3/3 = (4.\pi\, R^3/3).h/4 = V.h/4$$

Üst koninin hacmi, taban küresinin hacmi ile, yüksekliği çarpımının, 4 ile bölümüne eşittir. Bir üst koninin, çok sayıda düzgün beşkenlerden oluşmuş, bir çok yüzlü tabana sahip, bir üst piramidin limiti olduğu söylenebilir. Bu üst piramidin üst hacmi, taban yüzeyinin hacmi ile, yüksekliği çarpımının, 4 ile bölümüne eşittir.

Üst Kürenin Sınırları: Dört boyutlu uzayda, dört boyutlu bir nesneyi, üç boyutlu bir nesne sınırlar. Dört boyutlu üst küreyi, üç boyutlu üst yüzey sınırlar. Üç boyutlu üst yüzeyi de, iki boyutlu yüzey sınırlar. Önce iki boyutlu yüzeyin alanını bulalım. Bu yüzey üç tane yüz göstermektedir. Birinci yüz, gerçel yüz diye niteleyeceğim, u ve v parametrelerinin değişimi ile oluşan yüzdür. İkinci yüz, u ve w parametrelerinin değişimi ile oluşan sanal yüzdür. Üçüncü yüz de, v ve w parametrelerinin değişimi ile oluşan ikinci sanal yüzdür. Sanallık ve gerçellik nitelemesini, bu parametrelerin başlangıç eksenlerine göre yaptım. w ikinci kutup açısının başlangıç ekseni, x_4 eksenidir. Bu eksen bizim tasarımımız dışında olan bir eksendir. Bize göre sanaldır.

Üst Küre Yüzeyinin Alanı:

Üç boyutlu uzayda bilinen işlemler tekrarlanacaktır.

68) $$dS_1 = |\mathbf{r}_u \Lambda \mathbf{r}_v|\, du\, dv$$

$r = 1$, $\quad \mathbf{r}_u = -\sin(w).\sin(v).\sin(u)\mathbf{e}_1 + \sin(w).\sin(v)\cos(u)\mathbf{e}_2$.

$\mathbf{r}_v = \sin(w).\cos(v).\cos(u)\mathbf{e}_1 + \sin(w).\cos(v).\sin(u)\mathbf{e}_2 - \sin(w).\sin(v)\mathbf{e}_3$

$\mathbf{r}_u \Lambda \mathbf{r}_v = [-\sin(w).\sin(v).\sin(u)\, \sin(w).\cos(v).\sin(u) - \sin(w).\sin(v).\cos(u)\, \sin(w).\cos(v).\cos(u)]\mathbf{g}_{12} + \sin(w).\sin(v).\sin(u)\, \sin(w).\sin(v)g_{13} - \sin(w).\sin(v)\cos(u)\, \sin(w).\sin(v)\, \mathbf{g}_{23}$

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = -\sin^2(w).\sin(v).\cos(v).\mathbf{g}_{12} + \sin^2(w).\sin^2(v).\sin(u)\ \mathbf{g}_{13} - \sin^2(w).\sin^2(v).\cos(u)g_{23}$

$|\ \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|^2 = \sin^4(w).\sin^2(v).\cos^2(v) + \sin^4(w).\sin^4(v).\sin^2(u) + \sin^4(w).\sin^4(v).\cos^2u) =$

$|\ \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|^2 = \sin^4(w).\sin^2(v).\cos^2(v) + \sin^4(w).\sin^4(v).= \sin^4(w)\sin^2(v).$

$dS_1 = \sin^2(w)\sin(v)$ du dv. $\quad S_1 = 2.\sin^2(w) \int_{v=0}^{pi/2} \int_{u=0}^{2pi} \sin(v)dudv$

$S_1 = 2.\sin^2(w).[-\cos(v)]\ u = 2.\sin^2(w).(1).2\pi = 4\pi \sin^2(w)$, r<>1, $S_1 = 4\pi\ r^2 \sin^2(w)$,
Yüzey w'ye bağlıdır. $w = \pi/2$ için $x_4 = 0$, olur. Üst küre, üç boyutlu uzaya indirgenir. $S = 4\pi$ olur. Kürenin bilinen alanıdır. Dört boyutlu uzayda üst kürenin yüzeyi tabaka, tabaka olup, w açısı küçüldükçe yüzey alanı küçülmektedir.

69) $dS_2 = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_w|$ du dw

r = 1, $\mathbf{r}_u = -\sin(w).\sin(v).\sin(u)\mathbf{e}_1 + \sin(w).\sin(v).\cos(u)\mathbf{e}_2$.

$\mathbf{r}_w = \cos(w).\sin(v).\cos(u)\mathbf{e}_1 + \cos(w).\sin(v).\sin(u)\mathbf{e}_2 + \cos(w).\cos(v)\mathbf{e}_3 - \sin(w)\mathbf{e}_4$

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_w = [-\sin(w).\sin(v).\sin(u)\ \cos(w).\sin(v).\sin(u) - \sin(w).\sin(v).\cos(u)\ \cos(w).\sin(v).\cos(u)]\mathbf{g}_{12} - \sin(w).\sin(v).\sin(u)\ \cos(w).\cos(v)g_{13} - \sin(w).\sin(v)\ \cos(u)\ \cos(w).\cos(v)\ \mathbf{g}_{23} + \sin(w).\sin(v).\sin(u).\sin(w)\ \mathbf{g}_{14} - \sin(w).\sin(v).\cos(u)\ \sin(w)\ \mathbf{g}_{24}$,

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_w = [-\sin(w).\sin^2(v).\sin^2(u)\ \cos(w).-\sin(w).\sin^2(v).\cos^2(u)\ \cos(w)]\mathbf{g}_{12} - \sin(w).\sin(v).\sin(u)\ \cos(w).\cos(v)g_{13} - \sin(w).\sin(v)\ \cos(u)\ \cos(w).\cos(v)\ g_{23} + \sin^2(w).\sin(v).\sin(u).g_{14} - \sin2(w).\sin(v).\cos(u)\ g_{24}$,

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = -\sin(w).\sin^2(v).\cos(w).g_{12} - \sin(w).\sin(v).\sin(u)\ \cos(w).\cos(v)g_{13} - \sin(w).\sin(v)\ \cos(u)\ \cos(w).\cos(v)\ \mathbf{g}_{23} + \sin^2(w).\sin(v).\sin(u).\mathbf{g}_{14} - \sin^2(w).\sin(v).\cos(u)\ \mathbf{g}_{24}$,

$|\ \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|^2 = \sin^2(w).\cos^2(w).\sin^4(v) + \sin^2(w).\cos^2(w).\sin^2(v).\cos^2(v).\sin^2(u) + \sin^2(w).\cos^2(w)\sin^2(v).\cos^2(v).\cos^2(u) + \sin^4(w).\sin^2(v).\sin^2(u) + \sin^4(w).\sin^2(v).\cos^2(u) =$

$|\ \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|^2 = \sin^2(w).\cos^2(w).\sin^4(v) + \sin^2(w).\cos^2(w).\sin^2(v).\cos^2(v).+ \sin^4(w).\sin^2(v)$,

$|\ \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|^2 = \sin^2(w).\cos^2(w).\sin^2(v) + \sin^4(w).\sin^2(v) = \sin^2(w).\sin^2(v)$

$dS_2 = \sin(w).\sin(v)$ dw du. $\quad S_2 = 2.\sin(v) \int_{w=0}^{pi/2} \int_{u=0}^{2pi} \sin(w)dudw$

$S_2 = \sin(v).[-\cos(w)]\ u = 2.\sin(v).(1).2\pi = 4\pi \sin(v)$, r<>1, $S_2 = 4\pi\ r^2 \sin(v)$,
Yüzey v'ye bağlıdır. $v = \pi/2$ için $x_3 = 0$ olur. Üst küre, üç boyutlu uzaya indirgenir. $S = 4\pi$. Kürenin bilinen alanı olur.

70) $dS_3 = |\mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w|$ dv dw

r = 1, $\mathbf{r}_v = \sin(w).\cos(v).\cos(u)\mathbf{e}_1 + \sin(w).\cos(v).\sin(u)\mathbf{e}_2 - \sin(w).\sin(v)\mathbf{e}_3$

$\mathbf{r}_w = \cos(w).\sin(v).\cos(u)\mathbf{e}_1 + \cos(w).\sin(v).\sin(u)\mathbf{e}_2 + \cos(w).\cos(v)\mathbf{e}_3 - \sin(w)\mathbf{e}_4$

$\mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w = [-\sin(w).\cos(v).\cos(u)\ \cos(w).\sin(v).\sin(u) - \sin(w).\cos(v).\sin(u)\ \cos(w).\sin(v).\cos(u)]\mathbf{g}_{12} + [\sin(w).\cos(v).\cos(u)\ \cos(w).\cos(v) + \sin(w).\sin(v).\cos(w).\sin(v).\cos(u)]\mathbf{g}_{13} - \sin(w).\cos(v).\cos(u).\sin(w)\mathbf{g}_{14}$
$[\sin(w).\cos(v)\ \sin(u)\ \cos(w).\cos(v) + \sin(w).\sin(v).\cos(w).\sin(v).\sin(u)]\mathbf{g}_{23} - \sin(w).\cos(v).\sin(u)\ \sin(w)\ g_{24} + \sin^2(w).\sin(v)\mathbf{g}_{34}$

$\mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w = +[\sin(w).\cos^2(v).\cos(u)\ \cos(w).+ \sin(w).\sin^2(v).\cos(w).\cos(u)]\mathbf{g}_{13} - \sin^2(w).\cos(v).\cos(u)\mathbf{g}_{14} + [\sin(w).\cos^2(v)\ \sin(u)\ \cos(w).+ in(w).\sin^2(v).\cos(w).\sin(u)]\mathbf{g}_{23} - \sin^2(w).\cos(v).\sin(u)g_{24} + \sin^2(w).\sin(v)\mathbf{g}_{34}$

$\mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w = \sin(w).\cos(u)\ \cos(w)\mathbf{g}_{13} - \sin^2(w).\cos(v).\cos(u)\mathbf{g}_{14} + \sin(w).\ \sin(u)\ \cos(w)\mathbf{g}_{23} - \sin^2(w).\cos(v).\sin(u)\mathbf{g}_{24} + \sin^2(w).\sin(v)\mathbf{g}_{34}$

$|\ \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w|^2 = \sin^2(w).\cos^2(w).\cos^2(u) + \sin^4(w).\cos^2(v).\cos^2(u) + \sin^2(w).\cos^2(w).\sin^2(u) + \sin^4(w).\cos^2(v).\sin^2(u) + \sin^4(w).\sin^2(v).=$

$|\ \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w|^2 = \sin^2(w).\cos^2(w). + \sin^4(w).\cos^2(v).+ \sin^4(w).\sin^2(v).= \sin^2(w)..$

$dS_3 = \sin(w)$ dw dv. $\quad S_3 = 2.2 \int_{w=0}^{pi/2} \int_{v=0}^{pi/2} \sin(w)dvdw$

$S_3 = 2.2.[-\cos(w)]\ v = 2.2.(1).\pi/2 = 2\pi$, r<>1, , $S_3 = 2\pi\ r^2$

Üst kürenin üst yüzey hacmi:

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v = -\sin^2(w).\sin(v).\cos(v).\mathbf{g}_{12} + \sin^2(w).\sin^2(v).\sin(u)\ \mathbf{g}_{13} - \sin^2(w).\sin^2(v).\cos(u)\mathbf{g}_{23}$

$\mathbf{r}_w = \cos(w).\sin(v).\cos(u)\mathbf{e}_1 + \cos(w).\sin(v).\sin(u)\mathbf{e}_2 + \cos(w).\cos(v)\mathbf{e}_3 - \sin(w)\mathbf{e}_4$

71) $dV = |\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w|\, dw\, dv\, du$

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w = -\sin^2(w).\sin(v).\cos(v)\cos(w).\cos(v).\mathbf{g}_{123} + \sin^2(w).\sin(v).\cos(v)\sin(w).\mathbf{g}_{124} + \sin^2(w).\sin^2(v).\sin(u)\cos(w).\sin(v).\sin(u)\,\mathbf{g}_{132} - \sin^2(w).\sin^2(v).\sin(u)\sin(w)\mathbf{g}_{134} - \sin^2(w).\sin^2(v).\cos(u)\cos(w).\sin(v).\cos(u)\mathbf{g}_{231} + \sin^2(w).\sin^2(v).\cos(u)\sin(w)\mathbf{g}_{234}$

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w = -\sin^2(w).\sin(v).\cos^2(v)\cos(w).\mathbf{g}_{123} + \sin^2(w).\sin(v).\cos(v)\sin(w).\mathbf{g}_{124} - \sin^2(w).\sin^3(v).\cos(w).\sin^2(u)\,\mathbf{g}_{123} - \sin^2(w).\sin^2(v).\sin(u)\sin(w)\mathbf{g}_{134} - \sin^2(w).\sin^3(v).\cos(w).\cos^2(u).\mathbf{g}_{123} + \sin^3(w).\sin^2(v).\cos(u)\sin(w).\mathbf{g}_{234}$

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w = [-\sin^2(w).\sin(v).\cos^2(v)\cos(w) - \sin^2(w).\sin^3(v).\cos(w).\sin^2(u) - \sin^2(w).\sin^3(v).\cos(w).\cos^2(u)].\mathbf{g}_{123} + \sin^2(w).\sin(v).\cos(v)\sin(w).\mathbf{g}_{124} - \sin^2(w).\sin^2(v).\sin(u)\sin(w)\mathbf{g}_{134} + \sin^3(w).\sin^2(v).\cos(u)\sin(w).\mathbf{g}_{234}$

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w = [-\sin^2(w).\sin(v).\cos^2(v)\cos(w) - \sin^2(w).\sin^3(v).\cos(w)].\mathbf{g}_{123} + \sin^2(w).\sin(v).\cos(v)\sin(w).\mathbf{g}_{124} - \sin^2(w).\sin^2(v).\sin(u)\sin(w)\mathbf{g}_{134} + \sin^3(w).\sin^2(v).\cos(u)\sin(w).\mathbf{g}_{234}$

$\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w = -\sin^2(w).\sin(v).\cos(w).\mathbf{g}_{123} + \sin^2(w).\sin(v).\cos(v)\sin(w).\mathbf{g}_{124} - \sin^2(w).\sin^2(v).\sin(u)\sin(w)\mathbf{g}_{134} + \sin^3(w).\sin^2(v).\cos(u).\mathbf{g}_{234}$

$|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w|^2 = \sin^4(w).\sin^2(v).\cos^2(w) + \sin^6(w).\sin^2(v).\cos^2(v).+ \sin^6(w).\sin^4(v).\sin^2(u) + \sin^6(w).\sin^4(v).\cos^2(u)$

$|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w|^2 = \sin^4(w).\sin^2(v).\cos^2(w) + \sin^6(w).\sin^2(v).\cos^2(v).+ \sin^6(w).\sin^4(v).$

$|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \wedge \mathbf{r}_w|^2 = \sin^4(w).\sin^2(v).\cos^2(w) + \sin^6(w).\sin^2(v).= \sin^4(w).\sin^2(v).$

$dV = \sin^2(w).\sin(v).dw\,dv\,du,\quad V = 2.2.\int_{w=0}^{pi/2}\int_{v=0}^{pi/2}\int_{u=0}^{2pi}\sin(v)\,[1-\cos(2w)]/2\ dw.dv.du$

$V = 2.2.\,[-\cos(v)]\,[w/2 - \sin(2w)/4]\,u = 2.2.(1).(\pi/4).2\pi = 2\pi^2,\quad r<>1,\quad V = 2\pi^2 r^3$

Burada yapılan Analiz işlemleri ile, Analitik Geometrinin konusu dışına çıkılmıştır. Fakat, bu uygulamaların, dört boyutlu uzayın dış çarpımlarına ve Pisagor teoremlerine, tipik örnek oluşturmaları, değer taşıyacaktır.

III DÖRT BOYUTLU PROJEKTİF UZAYDA ÜST KUADRİK YÜZEYLER

Bilimsel gelişmeler, daima bilinen bilimsel gerçekler üzerine kurulmalıdır. Eğer bilinen bilimsel gerçeklerden uzak kalınmışsa, ilerleme sağlanamaz. Burada yapılan işlemler, daha çok analitik geometrinin, bugüne kadar kazandığı bilimsel gerçeklerin, dört boyuta uyarlanmasıdır. Uyarlama işleminde, Prof. Dr. Macit Bükenin Analitik Geometri II kitabındaki, formüller ve kavramlar esas alınmıştır.

Projektif Uzayda Üst Kuadrik Yüzeyler

Koordinatları,

$$S(x, x) = S(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i,j=0}^{4} aijxixj = 0$$

$$S(x, x) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + 2a_{10}x_1x_0 + 2a_{20}x_2x_0 + 2a_{30}x_3x_0 + 2a_{40}x_4x_0 = 0$$

denklemini sağlayan noktaların geometrik yerine, **nokta üst kuadrik yüzeyi** denilir.

72)
$$A = \begin{matrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

$S(x, x) = X'\,A\,X = 0$

$S_0(x) = 1/2\ \partial S/\partial x_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4$

$S_1(x) = 1/2\ \partial S/\partial x_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$

$S_2(x) = 1/2\ \partial S/\partial x_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$

$S_3(x) = 1/2\ \partial S/\partial x_3 = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4$

$S_4(x) = 1/2\ \partial S/\partial x_4 = a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4$

$$S(x, x) = x_0 S_0(x) + x_1 S_1(x) + x_2 S_2(x) + x_3 S_3(x) + x_4 S_4(x) = 0$$

eşitlikleri kolayca yazılır.

Doğru Düzlem ve Üst Düzlemle Olan Arakesitler

b ve c noktalarından geçen doğrunun üst kuadrikle kesim noktalarını arayalım. Doğruyu türdeş parametreleyelim.

73) $S_i(\lambda b + \mu c) = S_i(\lambda b) + S_i(\mu c) = \lambda S_i(b) + \mu S_i(c)$
özeliği göz önüne alınırsa, kesim noktaları
74) $S(\lambda b + \mu c,\ \lambda b + \mu c) = \lambda^2 S(b, b) + 2\lambda\mu\, S(b, c) + \mu^2\, S(c, c) = 0,$
türdeş parametrelerin, λ/μ'nün ikinci dereceden bir fonksiyonudur. Eğer $\Delta > 0$ ise iki noktada keser, $\Delta < 0$ kesmez, $\Delta = 0$ ise doğru üst kuadriğe teğettir. b noktasının üst kuadrik üzerinde olduğunu varsayalım.
75) $S(b, b) = 0, \qquad 2\lambda\mu\, S(b, x) + \mu^2\, S(x, x) = 0,$
olur. $\mu = 0$, kesim noktasının birini verir. İkinci kesim noktasının da, $\mu = 0$, değeri ile elde edilmesi için,
76) $S(b, x) = 0$
olmalıdır. Verilen doğrunun teğet olma koşuludur. b'yi sabit tutalım.
77) $S(b, x) = x_0S_0(b) + x_1S_1(b) + x_2S_2(b) + x_3S_3(b) + x_4S_4(b) = 0,$
Bu üst düzlemin denklemidir. Teğet olma koşulu, üst düzlem ve düzlem için de aynıdır. b noktasından geçen bütün doğrular üst kuadriğe teğetse veya b noktasından geçen bütün düzlemler üst kuadriğe teğetseler, bu doğruların oluşturduğu düzlemler ve bu düzlemlerin oluşturduğu üst düzlem de, üst kuadriğe teğettir. Üst kuadriğe teğet olan doğru ve düzlemler (77) ile verilen teğet üst düzlemin içindedirler.

Düzlem b, c, d noktalarından geçsin. .

$$S(\lambda b + \mu c + \nu d,\ \lambda b + \mu c + \nu d) = \lambda^2 S(b, b) + \mu^2 S(c, c) + \nu^2 S(d, d) + 2\lambda\mu\, S(b, c) +$$
78) $$2\lambda\nu\, S(b, d) + 2\mu\nu\, S(c, d) = 0,$$
Bulunan sonuç, λ, μ, ν türdeş parametrelerinin ikinci dereceden bir fonksiyonudur. Genelde arakesit bir koniktir. Eğer koniğin rangı 2 ise, iki doğruya soysuzlaşır..Bu doğrular eşlenik karmaşıksa, kesim noktası gerçeldir. Düzlem üst kuadriğe teğettir. Bu doğrular gerçelse, üst kuadrkle düzlemin iki ortak doğrusu vardır. Bunlar regle üst kuadriğinin doğuranlarıdır.
Üst kuadriğin üst düzlemle arakesitini arayalım. Üst düzlem, b, c, d, e noktalarından geçsin.

$$S(\lambda b + \mu c + \nu d + \rho e,\ \lambda b + \mu c + \nu d + \rho e) = \lambda^2 S(b, b) + \mu^2 S(c, c) + \nu^2 S(d, d) + \rho^2 S(e, e) +$$
$$2\lambda\mu\, S(b, c) + 2\lambda\nu\, S(b, d) + 2\lambda\rho\, S(b, e) + 2\mu\nu\, S(c, d) + 2\mu\rho\, S(c, e) + 2\nu\rho\, S(d, e) = 0,$$
Kesim noktaları, dört türdeş parametrenin, ikinci dereceden fonksiyonudurlar.Genelde arakesit kuadriktir. Bir doğrunun üst kuadriğe teğet olma koşulu olarak, (76) da,

$$S(b, x) = 0,$$
koşulunu bulmuştuk. Bu ifade x'in doğrusal bir fonksiyonudur. Dört boyutlu uzayda üst düzlemin denklemidir. Bu koşul altında üst düzlem, üst kuadriğe teğettir. Bu koşul varsa, b noktası arakesiti aranan düzlemin ve doğrunun üzerinde ise, düzlem ve doğru da, üst kuadriğe teğettirler. Düzlem ve doğru, teğet üst düzlemin içindedirler.
Örnek:

$$A = \begin{matrix} 3 & -2 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & 6 & 6 & 4 & -3\ . \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & -3 & -8 \\ 2 & -3 & 1 & -8 & 4 \end{matrix}$$

a) A matrisi ile oluşan üst kuadrik yüzeyinin, P(1, –1, 2, 3, 4) noktasından geçen teğet üst düzlemini, b) bir teğet düzlemini c) ve bir teğet doğrusunu bulunuz.d) y(2, 4, 7 1), z(5, 8 3, 1) noktalarından geçen doğrunun, üst kuadriği kestiği noktaları bulunuz.

(76) formülünün uygulaması yapılacaktır. Teğet düzlem ve teğet doğrular sonsuz tanedir. Bir tanesi yazılacaktır. Bilgisayar programı:
a) a1= [3 –2 3 5 2]; a2 = [–2 6 6 4 –3]; a3 = [3 6 2 7 1]; a4 = [5 4 7 –3 –8];
a5 = [2 –3 1 –8 4]; A = [a1;a2;a3;a4;a5]; P = [1 –1 2 3 4]; B = P*(A*P');
S = P*A ;
B'nin sıfır olması, verilen noktanın, üst kuadrik üstünde olduğunu gösterir. İkinci terim S, beş boyutlu bir dizidir. Teğet üst düzlemin koordinatlarını verir. Teğet üst düzlem,
b), c) $S(x) = 34x_0 + 4x_1 + 26x_2 - 26x_3 - x_4 = 0,$
dır. Teğet düzlem, teğet doğru,

$$\mathbf{r} = \mathbf{P} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 4\,\mathbf{e}_4, \qquad \mathbf{v} = 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 8\,\mathbf{e}_4$$

$\mathbf{r} = \mathbf{P} + \lambda\mathbf{w}$, $\mathbf{w} = 3\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 12\,\mathbf{e}_4$,

Birincisi teğet düzlem, ikincisi teğet doğrudur. Bunların bir noktası. P dir. Doğrultu vektörleri, teğet üst düzlemin içinde olacağından, teğet üst düzlemin normal vektörüne dik olacak biçimde seçilmişlerdir. Normal vektörle, iç çarpımlarının sıfır olduğu görülüyor.

d) y(1, 2, 4, 7, 1), z(1, 5, 8, 3, 1), B = A*y'; yy = y*B; C = Az' ; zz = z*C;

yz = z*B; g = sqrt(yz*yz – yy*zz); d1 = (– yz + g)/zz; d2 = (– yz – g)/zz

F1 = (y + d1*z); F2 = (y + d2*z);

$F_1(0.655,\ 0.2573,\ 1.2116,\ 5.9544,\ 0.6515)$,

$F_2(-0.1774,\ -3.8871,\ -5.4193,\ 3.4678,\ -0.1774)$

Türdeş olmayan koordinatlarla,

$F_1(0{,}3949,\ 1.8599,\ 9.1401,\ 1)$, $F_2(21.9094,\ 30.5459,\ -19.5459,\ 1)$

y ve z noktaları matris işlemlerinde, türdeş kılınmıştır,. Çünkü matris türdeştir.

Üst Kuadriğin Normal Biçime İndirgenmesi

Bir üst kuadrik sonsuz biçimde, beş kareli terimin toplamı biçimine indirgenebilir. Üst kuadriği bir T matrisi ile dönüştürelim.

79) $t_0(t_{00}, t_{10}, t_{20}, t_{30}, t_{40})$, $t_1(t_{01}, t_{11}, t_{21}, t_{31}, t_{41})$, $t_2(t_{02}, t_{12}, t_{22}, t_{32}, t_{42})$,
$t_3(t_{03}, t_{13}, t_{23}, t_{33}, t_{43})$, $t_4(t_{04}, t_{14}, t_{24}, t_{34}, t_{44})$,

t_i matrisleri, T dönüşüm matrisinin sütun matrisleridir.

$x = Tx'$, $x = t_0x'_0 + t_1x'_1 + t_2x'_2 + t_3x'_3 + t_4x'_4$, $x_i = t_{i0}\,x'_0 + t_{i1}\,x'_1 + t_{i2}\,x'_2 +, t_{i3}\,x'_0 + t_{i4}\,x'_0$,

80) $$S(x, x) = \sum_{i=0}^{4} xiSi(x) = 0,$$

$$S_i(x) = S_i(t_0\,x'_0 + t_1\,x'_1 + t_2\,x'_2 + t_3\,x'_3 + t_4\,x'_4) = x'_0S_i(t_0) + x'_1S_i(t_1) + x'_2S_i(t_2) + x'_3S_i(t_3) + x'_4S_i(t_4)$$

x_i ve S_i değerlerini, (80) toplam ifadesinde yerler
-ine koyalım

$$\sum_{i=0}^{4} xiSi(x) = \sum_{i=0}^{4} (t_{i0}\,x'_0 + t_{i1}\,x'_1 + t_{i2}\,x'_2 + t_{i3}\,x'_0 + t_{i4}\,x'_0)\,[x'_0S_i(t_0) + x'_1S_i(t_1) + x'_2S_i(t_2) +$$
$$x'_3S_i(t_3) + x'_4S_i(t_4)] = x'^2_0S(t_0, t_0) + x'^2_1S(t_1, t_1) + x'^2_2S(t_2, t_2) + x'^2_3S(t_3, t_3) + x'^2_4S(t_4, t_4) +$$
$$2\,x_0\,x_1\,S(t_0, t_1) + 2\,x_0\,x_2\,S(t_0, t_2) + 2\,x_0\,x_3\,S(t_0, t_3) + 2\,x_0\,x_4\,S(t_0, t_4) + 2\,x_1\,x_2\,S(t_1, t_2) +$$
$$2\,x_1\,x_3\,S(t_1, t_3) + 2\,x_1\,x_4\,S(t_1, t_4) + 2\,x_2\,x_3\,S(t_2, t_3) + 2\,x_2\,x_4\,S(t_2, t_4) + 2\,x_3\,x_4\,S(t_3, t_4)$$

Son eşitliğin nasıl yazıldığını daha iyi görmek için, çarpımdan gelecek ilk terim üzerinde, toplam işlemi yapılır.

$$\sum_{i=0}^{4} xiSi(x) = x'^2_0\,[t_{00}\,S_0(t_0) + t_{10}\,S_1(t_0) + t_{20}\,S_2(t_0) + t_{30}\,S_3(t_0) + t_{40}\,S_4(t_0)] \ldots = x'^2_0\,S_0(t_0, t_0)\ldots$$

(79) dan, ilk terimin toplamı, bu sonucu verecektir. Çarpımın diğer terimlerinin de, bu sonuca geleceği göz önüne alınırsa, eşitliğin nasıl kurulduğu anlaşılır.

81) $$S'(x', x') = \nu_0x'^2_0 + \nu_1x'^2_1 + \nu_2x'^2_2 + \nu_3x'^2_3 + \nu_4x'^2_4 = 0,$$

Biçiminde beş tane kareli terimin toplamı olarak yazılabilmesi için,

82) $$S(t_i, t_j) = \nu_j\,\delta_{ij} \qquad (i,j = 0, 1, 2, 3, 4, \quad i =< j)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Üst kuadriğin dönüşüm matrisinde, belirlenmesi gereken 25 elemanı vardır. Beş tane de, ν elemanı ile, 30 bilinmeyen vardır. (82) koşulu 15 denklem verir. Sonsuz türlü dönüşüm belirlenebilir. Eğer dönüşüm matrisinin ortogonal olması öngörülürse,

83) $$\sum_{k=0}^{4} tkitkj = t_{0i}t_{0j} + t_{1i}t_{1j} + t_{2i}t_{2j} + t_{3i}t_{3j} + t_{4i}t_{4j} = \delta ij \qquad (i,j = 0, 1, 2, 3, 4,\ i =< j)$$

ortogonallik koşulu ile, 15 denklem daha gelir. 30 bilinmeyen ve 30 denklemden oluşan sistem içinde, dönüşüm belirlenir. (82) koşulu, (83) de yerine konulursa,

84) $$S(t_i, t_j) = \nu_j\,(t_{0i}t_{0j} + t_{1i}t_{1j} + t_{2i}t_{2j} + t_{3i}t_{3j} + t_{4i}t_{4j}),$$

bulunur. (80) eşitliği göz önüne alınır ve (83), (84)'den çıkarılırsa,

$$X_k = S_k(t_j) - \nu\, t_{kj} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad i = < j)$$

konulursa, (84) bağıntısı,

$$t_{0i}\, X_0 + t_{1i}\, X_1 + t_{2i}\, X_2 + t_{3i}\, X_3 + t_{4i}\, X_4 = 0,$$

olur. i yerine değerleri konulursa , beş tane denklem elde edilir.

85)
$$\begin{aligned} &t_{00}\, X_0 + t_{10}\, X_1 + t_{20}\, X_2 + t_{30}\, X_3 + t_{40}\, X_4 = 0,\\ &t_{01}\, X_0 + t_{11}\, X_1 + t_{21}\, X_2 + t_{31}\, X_3 + t_{41}\, X_4 = 0,\\ &t_{02}\, X_0 + t_{12}\, X_1 + t_{22}\, X_2 + t_{32}\, X_3 + t_{42}\, X_4 = 0,\\ &t_{03}\, X_0 + t_{13}\, X_1 + t_{23}\, X_2 + t_{33}\, X_3 + t_{43}\, X_4 = 0,\\ &t_{04}\, X_0 + t_{14}\, X_1 + t_{24}\, X_2 + t_{34}\, X_3 + t_{44}\, X_4 = 0,\end{aligned}$$

Denklem sisteminin yalnız sıfır çözümü vardır. Çünkü katsayılar determinantı, |T'| olduğundan, sıfırdan farklıdır. Bu nedenle,.

$$X_k = S_k(t_j) - \nu\, t_{kj} = 0, \qquad a_{k0}\, t_{0j} + a_{k1}\, t_{1j} + a_{k2}\, t_{2j} + a_{k3}\, t_{3j} + a_{k4}\, t_{4j} - \nu_j\, t_{kj} = 0$$

bulunur. k = 0, 1, 2, 3, 4 konularak,

.86)
$$\begin{aligned} &(a_{00} - \nu_j)\, t_{0j} + a_{01} t_{1j} + a_{02} t_{2j} + a_{03}\, t_{3j} + a_{04}\, t_{4j} = 0,\\ &a_{10}\, t_{0j} + (a_{11} - \nu_j)\, t_{1j} + a_{12}\, t_{2j} + a_{13}\, t_{3j} + a_{14}\, t_{4j} = 0\\ &a_{20}\, t_{0j} + a_{21}\, t_{1j} + (a_{22} - \nu_j)\, t_{2j} + a_{23}\, t_{3j} + a_{24}\, t_{4j} = 0\\ &a_{30}\, t_{0j} + a_{31}\, t_{1j} + a_{32} t_{2j} + (a_{33} - \nu_j)\, t_{3j} + a_{34}\, t_{4j} = 0,\\ &a_{40}\, t_{0j} + a_{41}\, t_{1j} + a_{42}\, t_{2j} + a_{43}\, t_{3j} + (a_{44} - \nu_j)\, t_{4j} = 0,\end{aligned}$$

türdeş doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu doğrusal denklemin, bir sıfır çözümünden başka, çözümünün olması için, katsayılar determinantı sıfır olmalıdır.

87)
$$\begin{vmatrix} a_{00} - \nu_j & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04}\\ a_{10} & a_{11} - \nu_j & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{20} & a_{21} & a_{22} - \nu_j & a_{23} & a_{24}\\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} - \nu_j & a_{34}\\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \nu_j \end{vmatrix} = 0$$

determinantı sıfır kılınacaktır. Beşinci dereceden bir denklem geleceği için, çözüm için gündemimize almayacağız. Çünkü bilgisayar, matris hesapları ile, öz değerleri ve öz vektörleri hesap etmektedir.. Ortogonallik koşulu ile, dönüşüm matrisinin bütün elemanları bulunur. Bilgisayarın verdiği öz vektörler matrisi ortogonaldir.

Örnek

$$2\, x_0^2 + 4\, x_1^2 + 11\, x_2^2 + 2\, x_3^2 - 3\, x_4^2 + 10\, x_0\, x_1 - 16\, x_0\, x_2 + 14\, x_0\, x_3 + 12\, x_0 x_4 + 6\, x_1\, x_2 + 2\, x_1\, x_3 + 18\, x_1\, x_4 + 8\, x_2\, x_3 + 24\, x_2\, x_4 + 10\, x_3\, x_4 = 0,$$

Üst kuadriğini normal biçime indirgeyiniz. Önce bilgisayardan üst kuadriğin öz değerlerini almalıyız. Bilgisayar öz değerleri ve öz vektörleri birlikte verir. Fakat öz vektör ve bilgisayar programı uygulaması olması bakımından, öz vektörleri programla bulacağız. .

Matlab bilgisayar programı:

```
a1 = [2  5  – 8  7  6]; a2 = [5  4  3  1  9]; a3 = [– 8  3  11  4  12]; a4 = [7  1  4  2  5];
  a5 = [6  9  12  5  – 3];  A = [a1;a2;a3;a4;a5];  v = eig(A);v,
g1 = (a1); g2 = (a2); g3 = (a3);g4 = (a4); g5 = (a5);
for i = 1:5  a(1) = g1(1) – v(i); a2(2) = g2(2) – v(i); a3(3) = g3(3) –v(i);a4(4) = g4(4) – v(i);
a5(5) = g5(5) – v(i); b2 = [a2(2)  a2(3)  a2(4)  a2(5)];  b3 = [a3(2)  a3(3)  a3(4)  a3(5)];
b4 = [a4(2)  a4(3)  a4(4)  a4(5)];  b5 = [a5(2)  a5(3)  a5(4)  a5(5)]; d1 = [b2;b3;b4;b5];
                    t0(i) = det(d1);    end
   for i = 1:5  a(1) = g1(1) – v(i); a2(2) = g2(2) – v(i); a3(3) = g3(3) –v(i);
a4(4) = g4(4) – v(i); a5(5) = g5(5) – v(i); b2 = [a2(1)  a2(3)  a2(4)  a2(5)];  b3 = [a3(1)  a3(3)
a3(4)  a3(5)];  b4 = [a4(1)  a4(3)  a4(4)  a4(5)];  b5 = [a5(1)  a5(3)  a5(4)  a5(5)];
          d2 = [b2;b3;b4;b5]; t1(i) = – det(d2);    end
for i = 1:5  a(1) = g1(1) – v(i); a2(2) = g2(2) – v(i); a3(3) = g3(3) –v(i);
```

a4(4) = g4(4) – v(i); a5(5) = g5(5) – v(i); b2 = [a2(1) a2(2) a2(4) a2(5)]; b3 = [a3(1) a3(2) a3(4) a3(5)]; b4 = [a4(1) a4(2) a4(4) a4(5)]; b5 = [a5(1) a5(2) a5(4) a5(5)];
d3 = [b2;b3;b4;b5]; t2(i) = det(d3);   end
for i = 1:5 a(1) = g1(1) – v(i); a2(2) = g2(2) – v(i); a3(3) = g3(3) –v(i);
a4(4) = g4(4) – v(i); a5(5) = g5(5) – v(i); b2 = [a2(1) a2(2) a2(3) a2(5)]; b3 = [a3(1) a3(2) a3(3) a3(5)]; b4 = [a4(1) a4(2) a4(3) a4(5)]; b5 = [a5(1) a5(2) a5(3) a5(5)];
d4 = [b2;b3;b4;b5]; t3(i) = – det(d4);   end
for i = 1:5 a(1) = g1(1) – v(i); a2(2) = g2(2) – v(i); a3(3) = g3(3) –v(i);
a4(4) = g4(4) – v(i); a5(5) = g5(5) – v(i); b2 = [a2(1) a2(2) a2(3) a2(4)]; b3 = [a3(1) a3(2) a3(3) a3(4)]; b4 = [a4(1) a4(2) a4(3) a4(4)]; b5 = [a5(1) a5(2) a5(3) a5(4)];
d5 = [b2;b3;b4;b5]; t4(i) = det(d5);   end
b1 = T(:,1); b2 = T(:,2); b3 = T(:,3); b4 = T(:,4); b5 = T(:,5); c1 = sqrt(b1'*b1);
c2 = sqrt(b2'*b2);c3 = sqrt(b3'*b3); c4 = sqrt(b4'*b4); c5 = sqrt(b5'*b5);
T = [b1/c1 b2/c2 b3/c3 b4/c4 b5/c5]; B = T'*(A*T);

$$S(x', x') = -15.5731\, x'^2_0 - 8.3187\, x'^2_1 + 2.4609\, x'^2_2 + 14.4913\, x'^2_3 + 22.9396\, x'^2_4 = 0$$

$$S(x, x) = 2 x_0^2 + 8 x_1^2 + 4 x_2^2 + x_3^2 - 6 x_4^2 + 12 x_0 x_1 - 24 x_0 x_2 + 10 x_0 x_3 + 22 x_0 x_4 + 6 x_1 x_2 + 14 x_1 x_3 + 18 x_1 x_4 + 4 x_2 x_3 + 16 x_2 x_4 + 10 x_3 x_4 = 0,$$

Üst kuadriğini normal biçime indirgeyiniz.
Matlab programı:

```
a1 = [2  6   – 12  5  11]; a2 = [6  8  3  7  9];  a3 = [– 12  3  4  2  8]; a4 = [5  7  2  1  5];
a5 = [11  9  8  5  – 6];  A = [a1;a2;a3;a4;a5];  [T, v] = eig(A);T,v,
DD = det(A);B = T'*(A*T), B, DD,
```

$$S(x', x') = -21.2232\, x'^2_0 - 4.3199\, x'^2_1 - 3.2368\, x'^2_2 + 14.2114\, x'^2_3 + 23.5685\, x'^2_4 = 0$$

$$X'AX = 0, \quad X = TY, \quad (TY)'A(TY) = 0, \quad (Y'T')\, A\, (TY) = Y'(T'AT)Y, \quad B = T'AT$$

Projektif Uzayda Üst Kuadriklerin Sınıflandırılması

Üst kuadrikler beş tane kareli terimin toplamı olarak yazılabilirler. Yukarda örneği verildi Bu terimlerin işaretlerine dayanılarak, üst kuadrikler projektif uzayda sınıflandırılırlar.

Ia) $r = 5,\ \Delta > 0,\quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, sanal üst kuadrik
Ib) $r = 5,\ \Delta < 0,\quad -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, gerçel dışbükey üst kuadrik
Ic) $r = 5,\ \Delta > 0,\quad -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, gerçel içbükey üst kuadrik
IIa) $r = 4,\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, sanal kuadrik
IIb) $r = 4,\quad x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, gerçel dışbükey(eliptik) kuadrik
IIc) $r = 4, -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, gerçel içbükey(hiperbolik) kuadrik
IIIa) $r = 3,\quad x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, sanal konik
IIIb) $r = 3,\ -x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, gerçel dışbükey konik
IIIc) $r = 3\ \ -x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$, gerçel içbükey konik
IVa) $r = 2,\quad x_3^2 + x_4^2 = 0$, sanal bir çift üst düzlem
IVb) $r = 2,\quad x_3^2 - x_4^2 = 0$, gerçel bir çift üst düzlem
IVc) $r = 1, .\ x_4^2 = 0$, çakışık bir üst düzlem.

Kutup ve Kutup Doğrusu

Bu konuda bilinenleri anımsamakta yarar vardır.(y) ve (z) noktalarından geçen bir doğrunun konikle arakesit noktaları, (74) bağıntısıyla verilir.

74) $$S(\lambda b + \mu c,\ \lambda b + \mu c) = \lambda^2 S(b, b) + 2\lambda\mu\, S(b, c) + \mu^2\, S(c, c) = 0,$$

(y) ve (z) nokta çifti, bu arakesit noktaları ile, harmonik eşlenik iseler, (y) ve (z) nokta çifti, koniğe göre **eşleniktir** denilir. Eşlenik noktalar,

$$\lambda y + \mu z, \qquad \lambda y - \mu z$$

biçiminde yazılabilirler. Bu yazılımın sağlanması için, λ/μ oranına göre türdeş olan bu denklemin kökleri, mutlak değerce aynı, fakat ters işaretli olmalıdırlar. O halde,

88) $$S(y, z) = 0$$

olmalıdır. (y) noktası sabit tutulur, (z) noktası değiştirilirse,

$$S(y, x) = x_0 S_0(y) + x_1 S_1(y) + x_2 S_2(y) = 0$$

olur, geometrik yer bir doğrudur. Bu doğruya, (y) noktasının **kutup doğrusu** denilir. Nokta konik üzerinde ise, kutup doğrusu, bu noktada teğettir.

Özelik I. Bir iç noktanın bütün eşlenikleri, dış noktadır.

Özelik II. Bir A noktasının kutup doğrusu, bir B noktasından geçerse, B noktasının kutup doğrusu da, A noktasından geçer.

Özelik III. Bir A noktasının kutup doğrusu, bu noktadan koniğe çizilen teğetlerin değme kirişidir.

Özelik IV. Bir dış noktanın kutup doğrusu, koniği gerçel iki noktada, bir iç noktanınki ise, eşlenik karmaşık iki noktada keser.

Bir ABC üçgeninin köşeleri bir koniğe göre, ikişer, ikişer eşlenik iseler, ABC üçgeni koniğe göre **kutupsal üçgendir** denilir.

89) $$S(a, b) = S(a, c) = S(b, c) = 0,$$

Ortogonal dönüşümü sağlayan matrisin sütunları ile oluşan üçgen, izotrop koniğe göre kutupsaldır.

Üç boyutlu Öklid Uzayı

Sonsuzdaki düzlem üzerinde alınan, izotrop konik yardımı ile, uzayda diklik tanımları yapılır.

Tanım I. İki doğrunun sonsuzdaki noktaları, izotrop koniğe göre harmonik eşlenik iseler, bu iki doğruya **diktir** denilir.

Tanım II. İki düzlemin sonsuzdaki doğrularından biri, diğerinin izotrop koniğe göre kutbundan geçiyorsa, bu iki düzlem **diktir** denilir.

Tanım III. Bir doğrunun sonsuzdaki noktası, bir düzlemin sonsuzdaki doğrusunun izotrop koniğe göre kutbu ise, bu doğru, düzleme **diktir** denilir.

Tanım IV. Bir düzlemin sonsuzdaki doğrusu, izotrop koniğe teğetse, bu düzleme **izotrop düzlem** denilir.

İki düzlemin arakesit doğrusundan geçen, izotrop düzlem çiftini göz önüne alalım. Hem verilen düzlem çiftine ve hem de, izotrop düzlem çiftine harmonik eşlenik olan düzlem çiftine, verilen düzlemlerin **açıortay düzlemi** denilir.

Bu açıklamalardan sonra, uzayda karteziyen koordinatların dayandığı, izotrop koniği belirleyelim.

Koordinat dörtyüzlüsünün, $A_0A_1 = x_1$, $A_0A_2 = x_2$, $A_0A_3 = x_3$, eksenleri ikişer, ikişer birbirlerine dik olsunlar. B birim noktası, eksenlerin açıortayı üzerinde bulunsun. İzotrop koniğin denklemi, (82)' ye göre,

90) $$x_0 = 0, \qquad S(x, x) = \nu_1 x_1^2 + \nu_2 x_2^2 + \nu_3 x_3^2 = 0,$$

olur. ν_1, ν_2, ν_3, aynı işaretli sabitlerdir. x_1 ekseninden geçen koordinat düzlem çiftinin denklemi,

91) $$x_2 x_3 = 0,$$

dır. Koordinat düzlem çiftinin arakesitinden geçen izotrop düzlem çiftinin sonsuzdaki doğruları, $A_1(0, 1, 0, 0)$ noktasından izotrop koniğe çizilen teğet doğru çifti olduğundan,

92) $$y = A_1, \qquad S(y, x) = \nu_1 x_1, \qquad S(y, y) = \nu_1 x_1^2, \quad S^2(y, x) - S(y, y).S(x, x) = 0,$$
$$S^2(y, x) - S(y, y).S(x, x) = \nu_2 x_2^2 + \nu_3 x_3^2 = 0,$$

dır. (91) düzlem çiftinin açıortay düzlemleri hem bu çifte, hem de, (92) izotrop düzlem çiftine harmonik eşlenik olması için denklemi,

93) $$\nu_2 x_2^2 - \nu_3 x_3^2 = 0,$$

olmalıdır. Çünkü,

$$a\rho^2 + 2b\rho + c = 0, \qquad a_1\rho^2 + 2b_1\rho + c_1 = 0, \qquad ac_1 - 2b\, b_1 + ca_1 = 0$$

parametrik gösterilimi ile verilen nokta çiftlerinin, harmonik eşlenik olmaları için, üçüncü denklemle verilen bağıntının sağlanması gerekir. Bu koşul (91) çiftine ve (92)'nin son yazılan izotrop çifte, ayrı, ayrı uygulanır ve ρ yerine x_1/x_2 konulursa, (93) eşitliği görülür.

B(1, 1, 1) birim noktası bu açıortay düzlemi üzerinde olacağı için, $\nu_2 = \nu_3$ dür. Birim noktasının diğer açıortay düzlemleri üzerinde olduğu da yazılırsa,

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$$

olur. İzotrop koni,

94) $\qquad x_0 = 0, \qquad S(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$

olur. Bu açıklamalar, Prof. Dr. Macit Bükenin Analitik Geometri I kitabından alınmıştır.

Kutup ve Kutup Üst Düzlemi

Bu açıklamaları, dört boyutlu Öklidsel uzaya uyarlayalım. Önce temel işlemlerde ranga dayalı irdelemelerle çıkarılan, aynı zamanda postüla denilen, sonuçlardan bazılarını, düali ile birlikte anımsatalım.

1) İki doğru bir noktada kesişir. İki nokta bir doğru belirler.
2) İki düzlem bir doğru boyunca kesişir. Kesişen iki doğru bir düzlem belirler.
3) Doğrusal bağımsız üç nokta, bir düzlem belirler. Doğrusal bağımsız üç düzlem, bir noktada kesişir.
4) Doğrusal bağımsız dört nokta, bir üst düzlem belirler. Doğrusal bağımsız dört üst düzlem bir noktada kesişir.
5) Paralel ve çakışık olmayan iki düzlem, bir üst düzlem belirler. Çakışık ve paralel olmayan iki üst düzlem, bir düzlem boyunca kesişir.
6) Doğrusal bağımsız üç doğru, bir üst düzlem belirler. Doğrusal bağımsız üç üst düzlem, bir doğru boyunca kesişir. Çünkü iki üst düzlem, altı bağımsız parametreye sahiptir. Ortak çözülürse, dört bileşen sıfıra eşitlenecek ve dört parametre, iki bağımsız parametreye bağlı olarak hesaplanacaktır. Bu arakesit bir düzlem olup, üçüncü üst düzlemle arakesiti, bir doğrudur. İkinci arakesit beş paramtreden, dördünün beşinciye bağlı olarak hesaplanması nedeni ile, arakesit bir doğrudur.

(y) ve (z) noktaları ile belirlenen doğrunun, üst kuadriği deldiği noktalar,

74) $\qquad S(\lambda b + \mu c,\ \lambda b + \mu c) = \lambda^2 S(b, b) + 2\lambda\mu\, S(b, c) + \mu^2\, S(c, c) = 0,$

denklemi ile verilir. Eğer (y) ve (z) nokta çifti, doğrunun üst kuadrikle kesim noktalarına göre, harmonik eşlenik ise, (y) ve (z) nokta çiftine, üst kuadriğe göre **eşleniktir** denilir.(y) noktasını sabit tutup, x = (z) noktasını değiştirelim.

95) $\qquad S(y, x) = x_0 S_0(y) + x_1 S_1(y) + x_2 S_2(y) + x_3 S_3(y) + x_4 S_4(y) = 0,$

Geometrik yer bir üst düzlemdir. Bu doğruya (y) noktasının üst kuadriğe göre, **kutup üst düzlemi** denilir.

Özelik I. Bir iç noktanın üst kuadriğe göre, bütün eşlenikleri dış noktadır.

Özelik II. Bir A noktasının kutup üst düzlemi, bir B noktasından geçerse, B noktasının kutup üst düzlemi de, A noktasından geçer.

ÖzelikIII. Bir A noktasının kutup üst düzlemi, bu noktadan üst kuadriğe çizilen teğet üst koninin değme noktalarının oluşturduğu, üst kuadrik ile sınırlı olan üst düzlemdir.

Özelik IV. Bir dış noktanın kutup üst düzlemi, üst kuadriği, gerçel bir üst kuadrik boyunca, bir iç noktanın kutup üst düzlemi ise, üst kuadriği karmaşık bir üst kuadrik boyunca keser.

Bir A noktasının kutup üst düzleminin, üzerinde alınan bir B noktasının, kutup üst düzleminin arakesiti üzerinde, bir C noktası alalım. Benzer işlemle D noktasını da alalım. D'nin de üst kutup düzlemi ile beraber, dört tane kutup üst düzlemi oldu. Dört üst düzlem, bir noktada kesişir. Bu noktaya E diyelim. Bu beş nokta da ikişer, ikişer eşleniktirler. Beş noktanın oluşturduğu geometrik şekle, üst kuadriğe göre, **kutupsal üst beşyüzlü** denilir.

96) $\qquad S(A, B) = S(A, C) = \dots = S(D, E) = 0,$

Bu köşelerden bir tanesi iç, diğerleri dış noktalardır. Kutupsal üst beşyüzlünün köşeleri, üst kuadriği normal biçime indirgeyen dönüşüm, matrisinin sütun matrisleridir.

Zarf Üst Kuadriği

Koordinatları, ikinci derece bir denklemi sağlayan üst düzlemler kümesine, **zarf denklemi** denilir. Nokta üst kuadriğinde olduğu gibi, benzer işlemler burada da yapılır.

Koordinatları,

96) $$\sum(u, u) = \sum(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_{i,j=0}^{4} Aijuiuj = 0$$

ikinci derece denklemini sağlayan noktaların geometrik yerine, **zarf üst kuadrik yüzeyi** denilir.

$$\sum(u, u) = UAU' = 0$$

$$\sum_i = \sum_i(u) = 1/2\ \partial\sum/\partial u_i = A_{i0}\,u_0 + A_{i1}\,u_1 + A_{i2}\,u_2 + A_{i3}\,u_3 + A_{i4}\,u_4$$

$$\sum(u, u) = u_0 \sum_0(u) + u_1 \sum_1(u) + u_2 \sum_2(u) + u_3 \sum_3(u) + u_4 \sum_4(u) = 0$$

A_{ij} katsayıları, nokta üst kuadriğindeki matrisinde, aynı indisli katsayıların minörleridir. Zarf üst kuadriğinde, bir P düzleminden geçen, iki üst düzleminde, zarfa ait bir [v] üst düzlemi ile çakışması halinde, P düzlemine, $\sum$ zarf üst kuadriğinin [v] üst düzlemi üzerindeki **teğet düzlem** ve [v] üst düzlemine de, bu noktadaki **teğet üst düzlem** denilir. P düzlemi teğet düzlem olarak yorumlandığı gibi, değme noktası olarak da, yorumlanabilir. Değme noktası, dışbükey üst kuadriklerde, nokta olduğu gibi, sanal düzlem ve içbükey üst kuadriklerde, düzlem de olabilir. Kuadriklerde doğru ve sanal doğru olan değme noktaları vardır. Bunlar kuadriğin doğuranlarıdır. Zarf üst kuadriğinin bir düzlemden geçen, iki tane üst düzlemi vardır. Bu üst düzlemler,

97) $$\sum(\lambda v + \mu u,\ \lambda v + \mu u) = \lambda^2\sum(v, v) + 2\lambda\mu \sum(v, u) + \mu^2 \sum(u, u) = 0,$$

denklemi ile verilirler. [v] üst düzlemi zarf üst kuadriğnin bir üst düzlemi ise, zarf denklemini sağlar. Birinci terim kalkar. $\mu = 0$, (97) denkleminin bir kökü olur. $\mu = 0$, u ve v üst düzlemlerinin çakışması için, ikinci derece denkleminin ikinci defa kökü olması gerekir.. Bunun için,

98) $\sum(v, u) = 0$, $\quad \sum(v, u) = u_0 \sum_0(v) + u_1 \sum_1(v) + u_2 \sum_2(v) + u_3 \sum_3(v) + u_4 \sum_4(v) = 0$

olmalıdır. [v] üst düzlemi sabit, [u] üst düzlemi değişir. Bu denklem M değme noktasının denklemidir. Eğer [v] ve [u] üst düzlemleri herhangi iki üst düzlem ise, ve (98) denklemi sağlanıyorsa, bu üst düzlemlere **harmonik eşlenik** veya **eşlenik** üst düzlemler denilir. [v] üst düzlemi üzerindeki M değme noktası, (98) üst düzleminin **kutbu**, (98) üst düzlemi de, M noktasının **kutup üst düzlemi** adını alırlar. .

Dört Boyutlu Öklid Uzayı

Düzlemin sonsuzdaki doğrusu üzerinde alınan $J_1(0, 1, i)$ ve $J_2(0, 1, -i)$ noktalarına **izotrop noktalar** denilir. Uzayın sonsuzundaki düzlem üzerinde alınan

$$x_0 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

koniğine**, izotrop konik** denilir. Dört boyutlu uzayın sonsuzundaki üst düzlem üzerinde alınan

$$x_0 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

kuadriğine, **izotrop kuadrik** denilir. İzotrop kavramlara dayalı olarak, uzaklık ve açı ölçümü için, formüller çıkarılır ve diklik tanımları yapılır. Bu sayılan izotrop nokta, konik ve kuadriğe dayalı, uzaylara ve düzleme, **Öklid düzlemi, Öklid Uzayı** ve **Öklid dört boyutlu uzayı** denilir.

Tanım I. Dört boyutlu uzayda, iki doğrunun sonsuzdaki üst düzlem üzerindeki noktaları, izotrop kuadriğe göre eşlenik iseler, bu doğrulara **dik doğrular** denilir.

TanımII. İki düzlemin normallerinin, sonsuzdaki üst düzlem üzerindeki noktaları, izotrop kuadriğe göre eşlenik iseler, bu düzlemlere **dik düzlemler** denilir.

Tanım III. Bir doğrunun sosuzdaki üst düzlem üzerindeki noktası, bir düzlemin normalinin sonsuzun üst düzlemindeki noktası ile, izotrop kuadriğe göre eşlenik iseler, bu doğru ile düzlem **diktir** denilir.

Tanım IV. Bir üst düzlemin sonsuzdaki üst düzlem üzerindeki düzlemi(arakesiti), bir doğrunun, sonsuzun üst düzlemindeki noktasının, izotrop kuadriğe göre, kutup üst düzlemi üstünde bulunuyorsa, bu doğru üst düzleme **diktir** denilir.

Tanım V. Bir düzlemle bir üst düzlemin normallerinin sonsuzun üst düzlemindeki noktaları, izotrop kuadriğe göre eşlenik iseler, bu üst düzlemle düzlem, **diktir** denilir.

Tanım VI. İki üst düzlemin normallerinin, sonsuzun üst düzlemindeki noktaları, izotrop kuadriğe göre eşlenik iseler, bu üst düzlemler **diktir** denilir.

Afin koordinatların $A_0A_1 = x_1$, $A_0A_2 = x_2$, $A_0A_3 = x_3$, $A_0A_4 = x_4$, eksenleri ikişer, ikişer dik ve B birim noktası da, açıortay üst düzlemlerinin arakesit doğrusu üzerinde olsun. Ox_1 ekseninden üç tane açıortay üst düzlemi geçer. Bunlar, Ox_1 ekseni ile, diğer iki eksenin oluşturduğu üst düzlemlerdir. Bunlar ikişer, ikişer birbirlerine diktirler. $A_1A_2A_3A_4$ dörtyüzlüsü izotrop kuadriğe göre kutupsaldır. Koordinat eksenleri, bu dörtyüzlünün köşelerinden geçerler. İzotrop kuadriğin denklemi,

97) $$x_0 = 0, \qquad S(x, x) = \nu_1 x_1^2 + \nu_2 x_2^2 + \nu_3 x_3^2 + \nu_4 x_4^2 = 0,$$

dır. ν_1, ν_2 , ν_3, ν_4 katsayıları aynı işaretli sabitlerdir. Ox_2, Ox_3 eksen çifti,

98) $$x_2.x_3 = 0,$$

dır. İzotrop düzlem çifti yerine burada, $A_1(0, 1, 0, 0, 0)$ noktasından, izotrop kuadriğe çizilen teğet koni alınacaktır. $y = A_1$ konulursa, teğet koni denklemi,

$$S^2(y, x) – S(y, y).S(x, x) = \nu_1^2 x_1^2 – \nu_1(\nu_1 x_1^2 + \nu_2 x_2^2 + \nu_3 x_3^2 + \nu_4 x_4^2) = 0,$$
$$\nu_2 x_2^2 + \nu_3 x_3^2 + \nu_4 x_4^2 = 0,$$

olur. Harmonik bölme işlemleri, ancak nokta, doğru ve düzlemler arasında yapılabilir. Burada ise, izotrop kuadriğe teğet koni gelmektedir. Bu nedenle $x_4 = 0$ üst düzlemi (içinde bulunduğumuz gerçel uzay) üzerine izdüşüm alınacak, doğrular ve düzlemler arsında, harmonik bölme işlemleri yapılacaktır.

Bu işlemler yukarda yapıldı. Sonuç,

99) $$x_0 = 0, \qquad S(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

izotrop konik olarak bulundu. İkinci olarak, $x_3 = 0$, üst düzlemi üzerine izdüşürülecek, aynı işlemler tekrarlanacaktır. Sonuç,

100) $$x_0 = 0, \qquad S(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 = 0,$$

izotrop konik olacaktır. (99), izotrop kuadriğin, $x_4 = 0$ üst düzlemi üstüne izdüşümüdür, (100), izotrop kuadriğin, $x_3 = 0$ üst düzlemi üstüne izdüşümdür. İzotrop kuadriğin kendisi,

101) $$x_0 = 0, \qquad S(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

dir.

Üst Kuadriklerin Özel Denklemi

Üst kuadriğin A_1, A_2, A_3, A_4 köşelerinin oluşturduğu üst düzlemin, üst kuadriğe göre kutbu A'_0 olsun. A_0, A'_0 ‘ye gelsin. Gerekli koordinat dönüşümünü yapalım. Üst kuadriğin zarf denkleminde, bir üst düzlemin kutup noktasının koordinatları,

107) $$\Sigma(u, v) = u_0\Sigma_0(v) + u_1\Sigma_1(v) + u_2\Sigma_2(v) + u_3\Sigma_3(v) + u_4\Sigma_4(v),$$

u[1, 0, 0, 0, 0] üst düzleminin kutbu,

$$\Sigma_0(v) = A_{00} v_0 + A_{01} v_1 + A_{02} v_2 + A_{03} v_3 + A_{04} v_4 = 0,$$

olduğundan,

$$A'_0(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}), \quad A'_0(1, A_{01}/A_{00}, A_{02}/A_{00}, A_{03}/A_{00}, A_{04}/A_{00}),$$

olur. Diğer temel noktalar değişmesin. Koordinat dönüşüm denklemi,

108) $$\begin{aligned} x_0 &= x'_0, \\ x_1 &= A_{01}/A_{00}\, x'_0 + x'_1, \\ x_2 &= A_{02}/A_{00}\, x'_0 + x'_2, \\ x_3 &= A_{03}/A_{00}\, x'_0 + x'_3, \\ x_4 &= A_{04}/A_{00}\, x'_0 + x'_4, \end{aligned}$$

olur.Bu değerleri üst kuadrik denkleminde yerlerine koyalım.

$S_0(x) = a_{00}\,x'_0 + a_{01}(\,A_{01}/A_{00}\,x'_0 + x'_1) + a_{02}(\,A_{02}/A_{00}\,x'_0 + x'_2) + a_{03}(\,A_{03}/A_{00}\,x'_0 + x'_3) + a_{04}(\,A_{01}/A_{00}\,x'_0 + x'_4) = x'_0\,[a_{00}\,A_{00} + a_{01}\,A_{01} + a_{02}\,A_{02} + a_{03}\,A_{03} + a_{04}\,A_{04}\,]/A_{00} + a_{01}\,x'_1 + a_{02}\,x'_2 + a_{03}\,x'_3 + a_{04}\,x'_4 = \Delta/A_{00}\,x'_0 + a_{01}\,x'_1 + a_{02}\,x'_2 + a_{03}\,x'_3 + a_{04}\,x'_4$

Köşeli parantez içerisi, üst kuadriğin determinantının açılımıdır.

$S_1(x) = a_{11}\,x'_1 + a_{12}\,x'_2 + a_{13}\,x'_3 + a_{14}\,x'_4,\;\; S_2(x) = a_{21}\,x'_1 + a_{22}\,x'_2 + a_{23}\,x'_3 + a_{24}\,x'_4,$

$S_3(x) = a_{31}\,x'_1 + a_{32}\,x'_2 + a_{33}\,x'_3 + a_{34}\,x'_4,\;\; S_4(x) = a_{41}\,x'_1 + a_{42}\,x'_2 + a_{43}\,x'_3 + a_{44}\,x'_4,$

$S(x, x) = (\Delta/A_{00}\,x'_0 + a_{01}\,x'_1 + a_{02}\,x'_2 + a_{03}\,x'_3 + a_{04}\,x'_4)\,x'_0 + (a_{11}\,x'_1 + a_{12}\,x'_2 + a_{13}\,x'_3 + a_{14}\,x'_4)\,(A_{01}/A_{00}\,x'_0 + x'_1) + (a_{21}\,x'_1 + a_{22}\,x'_2 + a_{23}\,x'_3 + a_{24}\,x'_4)\,(A_{02}/A_{00}\,x'_0 + x'_2) + (a_{31}\,x'_1 + a_{32}\,x'_2 + a_{33}\,x'_3 + a_{34}\,x'_4)\,(A_{03}/A_{00}\,x'_0 + x'_3) + (a_{41}\,x'_1 + a_{42}\,x'_2 + a_{43}\,x'_3 + a_{44}\,x'_4)\,(A_{04}/A_{00}\,x'_0 + x'_4)$

Parantezler açılır, x'lerin parantezlerine alınırsa, üst kuadriğin determinantı, paralel iki sıraya göre açılmış olarak gelir. Değerleri sıfırdır.

109) $S(x, x) = \Delta/A_{00}\,x'^2_0 + a_{11}\,x'^2_1 + a_{22}\,x'^{\,2}_2 + a_{33}\,x'^2_3 + a_{44}\,x'^2_4 + 2a_{12}\,x'_1x'_2 + 2a_{13}\,x'_1x'_3 + 2a_{14}\,x'_1x'_4 + 2a_{23}\,x'_2\,x'_3 + 2a_{24}\,x'_2\,x'_4, + 2a_{34}\,x'_3\,x'_4 = 0$

$S(x, x) = \Delta/A_{00}\,x'^2_0 + S(0, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4\,) = 0$

Dışbükey Üst Kuadriklerin Parametrelenmesi

Üst kuadrikler beş tane kareli terimin toplamına indirgensin. Birinci teriminin işareti negatif olan, bir dışbükey üst kuadrik göz önüne alalım.

$$(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2)^2 = (2\lambda\mu)^2 + (2\lambda\nu)^2 + (2\lambda\rho)^2 + (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \rho^2)^2,$$

özdeşliğinden yararlanarak üst kuadrikler parametrelenebilirler.

110) $a_{00}\,x_0^2 = a_{11}\,x_1^2.+ a_{22}\,x_2^2.+ a_{33}\,x_3^2.+ a_{44}\,x_4^2,$

$a_{00}\,x_0 : a_{11}\,x_1 : a_{22}\,x_2 : a_{33}\,x_3 : a_{44}\,x_4 = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2):(2\lambda\rho):(2\mu\rho):(2\nu\rho):(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \rho^2),$

$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2)/\sqrt{a_{00}} : (2\lambda\rho)/\sqrt{a_{11}} : (2\mu\rho)/\sqrt{a_{22}} :.(2\nu\rho)/\sqrt{a_{33}} : (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \rho^2)/\sqrt{a_{44}},$

Türdeş olmayan parametreleme,

111) $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 1)/\sqrt{a_{00}} : (2\lambda)/\sqrt{a_{11}} : (2\mu)/\sqrt{a_{22}} : (2\nu)/\sqrt{a_{33}} : (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 1)/\sqrt{a_{44}},$

olur.

IV DÖRT BOYUTLU AFİN UZAYDA ÜST KUADRİKLER

Dört Boyutlu Afin Uzayda Üst Kuadrikler

Afin uzayda sonsuzda bir üst düzlem tanımlanmıştır. Karteziyen koordinatlarda $x_0 = 0$ üst düzlemi sonsuzdaki üst düzlemdir. Projektif uzaydaki sınıflandırmaya dayalı olarak ve sonsuzdaki üst düzlemi göz önüne alarak, dört boyutlu afin uzayda, sınıflama yapılacaktır. Üst kuadriğin sonsuzdaki üst düzlemle kesitine, **H kuadriği** denilecektir. Sınıflama, normal biçime indirgenmiş bir üst kuadriğin, kareli terimlerindeki, işaret dağılımına göre yapılacaktır. H kuadriği sanal ve gerçel olabilir.

Ia) $r = 5$, $1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, ise, sanal **üst kuadrik** veya **sanal üst elipsoit,**.

Ib) $r = 5$, $-1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, ise, H sanal, **birinci tür dışbükey üst kuadrik** veya **üst elipsoit**, .

Ic) $r = 5$, $-1 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$, ise, H gerçel, **birinci tür içbükey üst kuadrik** veya **birinci tür içbükey üst hiperboloit,** (bir parçalı üst hiperboloit)

Id) $r = 5$, $-1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0$, ise H gerçel, **ikinci tür dışbükey üst kuadrik** veya **ikinci tür dışbükey üst hiperboloit**, (iki parçalı üst hiperboloit),

Ie) $r = 5$, $-1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$, ise, H gerçel, **ikinci tür içbükey üst kuadrik** veya, **ikinci tür içbükey üst hiperboloit,** (bir parçalı üst hiperboloit.)

If) $r = 5$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4 = 0$, $A_{00} = 0$, ise, **birinci tür dışbükey üst paraboloit,** (eliptik üst paraboloit)

Ig) $r = 5$, $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4 = 0$, $A_{00} = 0$, ise, **birinci tür içbükey üst paraboloit,** (hiperbolik üst paraboloit), Diğer hallerde $\Delta = 0$ olacağından, sınıflama kuadriklerle aynıdır. Üst kuadriğin bir katsayısı negatifse, üst kuadrik gerçel olur. Düzlemde hiperbol, Ox_2 ekseni etrafında döndürülürse, bir parçalı dönel hiperboloit oluşur. Bu dönme sırasında, x_1Ox_3 düzleminde, yani $x_2 = 0$ düzleminde bulunan noktalar, (x_1, x_3) koordinatları ile birbirlerine çember bağıntısı ile bağlıdırlar. Türdeş olmayan koordinatlarda,

$$-1 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

olur. Denklemde iki negatif işaret vardır Eğer hiperbol, Ox_1 ekseni etrafında döndürürülürse, iki parçalı dönel hiperboloit oluşur. x_2Ox_3 düzleminde, dönel hiperboloitin noktaları olmadığından, bu düzlemde bulunan noktalar, (x_2, x_3) koordinatları ile, birbirlerine sanal çember bağıntısı ile bağlıdırlar.

$$-1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0, \qquad 1 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

Bir katsayı negatiftir. Dört boyutlu uzayda da, aynı düşünce yürütülecektir. İki parçalı hiperboloit, Ox_1 ve Ox_2 eksenleri etrafında döndürülecektir. Ox_3 ile Ox_2 eksenleri etrafında dönmeler aynıdır. Bir parçalı kuadriğin, eksenlere göre farklı bir durumu yoktur. $Ox_1x_3x_4$ üst düzlemi ile, Ox_2 ekseni bir noktada kesişirler. Bu nokta dönme esnasında sabit kalır. Uzayda bir eksen etrafında dönme, dairesel bir harekettir. Dört boyutlu uzayda, bir eksen etrafında dönme, küresel bir harekettir. Dört boyutlu uzayda, Ox_2 ekseni etrafında, $Ox_1x_3x_4$ üst düzlemini, yani $x_2 = 0$ üst düzlemini veya iki parçalı hiperboloiti döndürelim Bu üst düzlem içinde bulunan noktalar, birbirlerine göre konumlarını ve sabit noktaya uzaklıklarını değiştirmezler. $Ox_1x_3x_4$ üst düzleminde oluşan üst hiperboloitin kesitinde, yani $x_2 = 0$ üst düzleminde, sabit nokta merkez olmak üzere, koordinatları (x_1, x_3, x_4) olan noktalar, birbirlerine küre bağıntısı ile bağlıdırlar. .

$$-1 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4 = 0,$$

İki tane negatif katsayı vardır. Dönel cisim birinci tür içbükey kuadrik veya bir parçalı üst hiperboloittir. İki paçalı hiperboloiti, Ox_1 ekseni etrafında döndürelim. $x_1 = 0$ üst düzlemi içinde, koordinatları (x_2, x_3, x_4) olan noktalar, birbirlerine göre konumlarını ve sabit noktaya uzaklıklarını değiştirmezler. $Ox_2x_3x_4$ üst düzleminde oluşan, yani $x_1 = 0$ üst düzleminde oluşan, üst hiperboloitin kesiti olmadığından, sabit nokta merkez olmak üzere, (x_2, x_3, x_4) koordinatlı noktalar, birbirlerine sanal küre bağıntısı ile bağlıdırlar. .

. $$-1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4 = 0,$$

Dört tane negatif katsayı vardır. Dönel cisim, ikinci tür içbükey üst kuadriktir. Sınıflamada Ie ile gösterilmiştir. Normal biçime indirgenmiş bir üst kuadrikte, işaret dağılımının sınıflama üzerindeki etkinliği, bu açıklamalardan görülmektedir.

Merkezli Üst Kuadrikler

Dört boyutlu uzayın sonsuzunda $x_0 = 0$ üst düzlemi vardır. Bu düzlemin kutbuna üst kuadriğin **merkezi** denilir. Bu üst düzlemin koordinatları u = [1, 0, 0, 0, 0] dir. Üst kuadriğin zarf denklemi göz önüne alınır ve değme noktasında, u[1, 0, 0, 0, 0] konulursa,

112) $$M(\Sigma_0(u), \Sigma_1(u), \Sigma_2(u), \Sigma_3(u), \Sigma_4(u)), \qquad M(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}),$$

olur. Minörlerin hepsi birden sıfır olmaz. Çünkü hepsi birden sıfır olursa, üst kuadriğin determinantı sıfır olacağından, üst kuadrik, kuadrik olur. Üst elipsoitlerde ve üst hiperboloitlerde merkez vardır. Üst paraboloitlerde merkez sonsuzdadır.veya yoktur.

M merkezinden çizilen teğet üst koninin denklemini arayalım.

$$S^2(m, x) - S(m, m)S(x, x) = 0, \quad S_0(m) = a_{00}A_{00} + a_{01}A_{01} + a_{02}A_{02} + a_{03}A_{03} + a_{04}A_{04} = \Delta,$$

$$S_1(m) = S_2(m) = S_3(m) = S_4(m) = 0,$$

Çünkü determinantın elemanları ile minörleri, paralel sıradan gelirler.

$$S^2(m, x) - S(m, m)S(x, x) = x_0^2\Delta^2 - A_{00}\,\Delta\, S(x, x) = 0, \qquad \Delta S(x, x) = x_0^2\Delta^2 / A_{00}$$

Teğet üst koninin paralel koordinatlarda denklemi,

$$\Delta\, S = \Delta^2 / A_{00} \qquad S - \Delta / A_{00} = 0,$$

olur. $\Delta S(x, x)$, A_{00} ile aynı işarettedir. $\Delta\, S(x, x) > 0$ ise nokta iç noktadır (eliptik nokta), $\Delta S(x, x) < 0$ ise, dış noktadır(hiperbolik nokta). (Prof. Dr. Macit Büke Analitik Geometri II)

Merkez üst elipsoitte iç, üst hiperboloitte dış noktadır. Üst paraboloitte merkez sonsuzdadır. Teğet üst koni, üst kuadriğe sonsuzda teğettir. Çünkü sonsuzdaki üst düzlem, merkezin kutup üst düzlemidir. Teğet üst koni, üst kuadriğe asemptottur. Teğet üst koni, üst elipsoitte sanal, üst hiperboloitte gerçeldir.

Üst kuadriklerin merkezlerinden geçen her üst düzleme, **köşegen üst düzlem**, ikişer, ikişer köşegen üst düzlemlerin, 6 arakesit düzlemlerine **köşegen düzlemler**, üçer, üçer üst düzlemlerin, 4 tane arakesitine de, üst kuadriğin **çapları** denilir.Merkez sonsuzdaki üst düzlemin kutbu olduğundan, $A_1(0, 1, 0, 0, 0)$, $A_2(0, 0, 1, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 0, 1, 0)$, $A_4(0, 0, 0, 0, 1)$, noktalarının kutup üst düzlemleri de, merkezden geçerler. Bu üst düzlemler, köşegen üst düzlemlerdir. Merkez noktası, bu dört köşegen üst düzlemin arakesitidir.

113) $S_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_{14} + a_{10} = 0,$

$$S_2(x) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{20} = 0,$$
$$S_3(x) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{30} = 0,$$
$$S_4(x) = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{40} = 0,$$

Merkezli bir üst kuadriğin, çaplara göre denklemi, projektif uzayda A_0 noktasının, A_1, A_2, A_3, A_4 noktalarının belirlediği üst düzleminin, A'_0 kutbuna taşınması problemidir.(108) den,

$$x_0 = x'_0,$$
$$x_1 = A_{01}/A_{00}\, x'_0 + x'_1,$$
$$x_2 = A_{02}/A_{00}\, x'_0 + x'_2,$$
$$x_3 = A_{03}/A_{00}\, x'_0 + x'_3,$$
$$x_4 = A_{04}/A_{00}\, x'_0 + x'_4,$$

114) $S(x, x) = \Delta/A_{00}\, x'^2_0 + S(0, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = 0$

olur..

Merkezli Bir Üst Kuadriğin Eşlenik Çapları

Bir A noktasının bir üst kuadriğe göre kutup üst düzlemi, P ve bir B noktasının kutup üst düzlemi de, Q olsun. P ve Q üst düzlemlerinin arakesiti, R düzlemi olsun. AB = d doğrusunun üzerindeki noktaların, üst kuadriğe göre eşlenikleri, R düzlemi üzerinde bulunacaklardır. d doğrusu ile R düzlemi, **eşleniktir** denilecektir. Üst kuadriğin bir çapının sosuzdaki üst düzlemi deldiği noktanın, sonsuzdaki H kuadriğine göre kutup düzlemi, çapın eşleniği olan R düzlemidir. Çapın eşleniği olan düzlem, sonsuzdaki üst düzlem içindedir. Bu düzlemden geçen bütün üst düzlemler, paralel bir hüzme oluştururlar.Bu üst düzlemlere **çapın eşlenikleri** denilir. Bu üst düzlemlerden bir tanesi, merkezden geçer. Merkezden geçen üst düzleme, **köşegen üst düzlem** denilir. Her çapın eşleniği, bir köşegen üst düzlem vardır.

Her köşegen üst düzlem, kendisine eşlenik olan, çapa paralel kirişleri iki eşit parçaya bölerler. Çünkü kendisine eşlenik çapın sonsuzdaki noktası, üst düzlemin hüzmesinin, tepe düzlemi olan, R düzleminin, sonsuzdaki H kuadriğine göre kutbudur.

Merkezli Bir Üst Kuadriğin Denkleminin Eşlenik Dört Çapına İndirgenmesi

Merkezli bir üst kuadriğin denklemini eşlenik çaplarına indirgemek için, koordinat üst beşyüzlüsü kutupsal kılınır. Her koordinat köşesi sıra ile, önceki köşelerin kutupsal üst düzlemleri üzerinde alınır. Fakat bu işlem oldukça uzundur. Üst paraboloitte bunun örneği verilmiştir. Küresel kesitlerin bulunmasında izlenen, H(x, x)(sonsuzdaki üst düzlemle, üst kuadriğin kesiti olan kuadrik) ve D(x, x) izotrop kuadriğin oluşturduğu hüzmenin, soysuzlaşmış kuadriklerinin yardımı ile de bulunur. Bulunan öz vektörler matrisi, ortogonal olup, kutupsal üst beşyüzlünün, sonsuzdaki üst düzlem üzerinde bulunan, köşelerinin doğrultularını belirler. Bu doğrultular, eşlenik çaplardır. Bu yöntem hem kısa ve hem de, bilgisayarda uygulamayı gerçekleştiren komutu (eig) vardır.

Örnek:

$$5x_1^2 + 13x_2^2 + 16\, x_3^2 + 34\, x_4^2 - 2\, x_1x_2 + 50\, x_1x_3 - 44\, x_1x_4 + 36\, x_2x_3 +$$
$$58\, x_2x_4 - 70\, x_3x_4 + \Delta/A_{00} = 0,$$

üst kuadriğinin türünü belirleyiniz ve denklemini, eşlenik çaplarına indirgeyiniz. Önce merkezi bulup, başlangıcı merkeze getirelim. Burada o işlem yapılmamıştır. Sonuçtan, üst kuadriğin diskriminantının sıfırdan farklı olduğu, pozitif olduğu ve dört kareli terim olduğu görülüyor. Üst kuadrik içbükey(hiperbolik) üst hiperboloittir. Matlab programı:

```
i = sqrt(– 1);      a1 = [5  – 1  25  – 22];  a2 = [– 1  13  18  29 ];  a3 = [25  18  16   – 35];
                                    a4 = [–22  29  – 35  34];
A = [a1;a2;a3;a4]; [x,y] = eig(M);   B = x'*(A*x);
b1 = x(:,1)*(6 – 13*i);b2 = x(:,2)*(13 – 19*i); b3 = x(:,3)*27;  b4 = x(:,4)*11;
x = [b1  b2  b3  b4];  BB = x'*(M*x);
            B = – 34.161        0           0          0
                     0     – 10.7657     0          0
                     0           0     34.7044      0
                     0           0           0       78.2223
```

olur. x öz vektörünün sütun elemanları, karmaşık sayılarla çarpılarak, çözümün çoğaltılabileceği gösterilmiştir.

$$-34.161\, x_1^2 - 10.7657\, x_2^2 + 34.7044\, x_3^2 + 78.2223\, x_4^2 + \Delta/A_{00} = 0$$

Sondan bir önceki formülde, eig(M) komutuyla gelen, öz vektörlerin oluşturduğu, x ortogonal dönüşüm matrisidir. Bu matrisin sütunları, esas eksen doğrultularını belirleyen, öz vektörlerdir. y matrisi de, üst kuadriğin dönüşümü yapılmış öz değerler matrisidir. y = x'(Mx) anlamındadır. Bundan sonra gelen satırda, x matrisinin sütun vektörleri, yani öz vektörler, bir sayı ile çarpılmış, yeni bir matris oluşturulmuştur. Yeni dönüşüm BB matrisi ile yapılmalıdır. Yeni dönüşüm matrisi artık ortogonal değildir. Sonuçta yalnız öz değerler değişir. Öz değerler burada katsayı olarak gelmemişlerdir, ancak, ortogonal dönüşümlerde gelirler.

Üst Paraboloitlerin Denklemleri

Üst paraboloitler, merkezi sonsuzda olan üst kuadriklerdir. Sonsuzdaki üst düzleme teğettirler. Bu üst düzlemin değme noktası, $A_4(0, 0, 0, 0, 1)$ ve bu noktada teğet üst düzlem de, $x_0 = 0$, üst paraboloitin bir başka yerinde bir nokta $O = A_0(1, 0, 0, 0, 0)$, bu noktadaki teğet üst düzlem, $x_4 = 0$ olsun. A_4 noktasındaki teğet üst düzlemin, $x_0 = 0$ üst düzlemi olması için, $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$, olmaları gerekir. (72) den,

72) $\quad S_i = S_i(x) = 1/2\ \partial S/\partial x_i = a_{i0}\, x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}\, x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4$

göz önüne alınırsa, $x_0 = 0$ üst düzleminin koordinatları u[1, 0, 0, 0, 0] dır. y noktasındaki teğet üst düzlemin denklemi,

$$x_0\, S_0(y) + x_1\, S_1(y) + x_2\, S_2(y) + x_3\, S_3(y) + x_4 S_4(y) = 0,$$

olduğundan, $S_0(y) \neq 0$, $S_i(y) = 0$ olmalıdır. A_4 noktasının koordinatları, $S_i(y)$ katsayılarında yerlerine konulursa, sözü edilen katsayıların, sıfır oldukları görülür. Benzer olarak, A_0 noktasındaki teğet üst düzlemin, $x_4 = 0$ üst düzlemi olması için, $a_{00} = a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$ katsayılarının sıfır olmaları gerekir. Bu defa, $x_4 = 0$ üst düzleminin koordinatları u[0, 0, 0, 0, 1] dir. $S_i(y) = 0$, $S_4(y) \neq 0$, olmalıdır. A_0 noktasının koordinatları, $S_i(y)$, teğet üst düzlemin katsayılarında yerlerine konulursa, sözü edilen katsayıların, sıfır oldukları görülür. Üst paraboloitin denklemi,

115) $\quad S(x, x) = a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2 + 2a_{23}\, x_{42}x_3 + 2a_{12}\, x_1x_2 + 2a_{13}\, x_1x_3 + 2a_{04}\, x_0x_4 = 0,$

olur $x_0 = 0$ ve $x_4 = 0$ teğet üst düzlemlerinin, arakesit düzlemi üzerinde, üç tane keyfi nokta alınacaktır, Bu noktalar, dönüşmüş üst paraboloitin $A_1(0, 1, 0, 0, 0)$, $A_2(0, 0, 1, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 0, 1, 0)$ temel noktaları olacaklardır. Bu noktalardan her birinin, diğerlerinin kutup üst düzlemlerinin içinde olmalarını istiyoruz.. Bu noktaların, üst paraboloitin denkleminden, kutup üst düzlemlerini bulalım.(72) den veya üst paraboloitin denkleminden türev alarak, kutup üst düzlemlerinin katsayıları bulunur. Kutup üst düzlemleri sıra ile,

116) $\quad a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = 0, \quad a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = 0, \quad a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = 0,$

olur. Kutup üst düzlemlerinin birinci özeliğine göre, bir A noktasının kutup üst düzlemi, B noktasından geçiyorsa, B noktasının kutup üst düzlemi de, A noktasından geçer. Bunun için, birinci kutup üst düzlemi A_2 ve A_3 noktalarından, ikinci kutup üst düzlemi A_1 ve A_3 noktalarından, üçüncü kutup üst düzlemi de, A_1 ve A_2 noktalarından geçmelidirler. Bu noktaların sözü edilen kutup üst düzlemlerinden geçmeleri için, $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$, katsayılarının sıfır olmaları gerekir. Üst paraboloitin denklemi, afin koordinatlarda,

117) $$S(x, x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{40}x_4 = 0$$

olur. a_{40} ile bölünür, uygun düşen işaretle, α_1, α_2, α_3 katsayıları getirilirse,

118) $$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 2x_4$$

olur.

Örnek:

$$S(x, x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 4x_4x_3 + 12x_3x_2 - 6x_2x_4 - 6x_1x_2 - 4x_1x_3$$
$$+ 2x_1x_4 - 4x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 12x_4 - 19 = 0$$

Üst kuadriğinin türünü belirleyiniz ve normal biçime indirgeyiniz. Matlab programı:

a0 = [– 19 – 2 5 2 6]; a1 = [–2 3 –3 –2 1]; a2 = [5 – 3 4 6 –3]; a3 = [2 –2 6 4 –2];
a4 = [6 1 – 3 – 2 1]; M =[a0;a1;a2;a3;a4]; A0 = [1; –1; –2;1;2]; R = A0'*(M*A0); R=0,
g1 = det(M); Δ = g1 = 1960,
b0 = [– 2;5;2;6]; b1 = [3;– 3;– 2;1]; b2 = [–3;4;6;–3]; b3 = [– 2;6;4;– 2];
b4 = [1;–3; – 2;1]; B00 = [b1;b2;b3;b4]; B10 = [b0;b2;b3;b4]; B20 = [b0;b1;b3;b4];
B30 = [b0;b1;b2;b4]; B40 = [b0;b1;b2;b3]; A00 = det(A00), A10 = –det(B10);
A20 = det(B20); A30 = – det(B300); A40 = det(B40); A0 = [1; –1; –2;1;2];
A1 = [0; –3;2;1;1]; A2 = [0; –30; –29;10;10]; A3 = [0; –35; – 31.5; 8; 9];
A4 = [A00;A10;A20;A30;A40]; T = [A0 A1 A2 A3 A4]; B = T'*(M*T),
.

$A_{00} = 0$ ve $g1 = \det(M) > 0$ dir. Üst kuadrik, .içbükey üst paraboloittir. Normal biçime indirgemek için üst paraboloit iki teğet üst düzlem arasına alınacaktır. Birinci teğet üst düzlem $x_0 = 0$ üst düzlemidir. İkinci teğet üst düzlem, keyfi alınacak, başlangıç noktasındaki, teğet üst düzlem olacaktır. Bu nokta A_0 olup, $R = 0$ olmasından, üst paraboloitin üzerinde olduğu anlaşılır. $x_0 = 0$ üst düzlemine değme noktası, A_4, başlangıç noktası da A_0 olsun. A_0 noktasındaki teğet üst düzlem, $x_4 = 0$ üst düzlemi olsun. Bu koşul altında, A_1, A_2, A_3, köşeleri, $x_4 = 0$ teğet üst düzlemi ve $x_0 = 0$ teğet üst düzlemi üzerinde olacaklar ve üst paraboloite göre eşlenik olacaklardır. A_0 ve A_4 noktalarının eşlenikleri, kendilerine teğet üst düzlem üzerinde bulunurlar. $x_0 = 0$ üst düzlemi içinde bulunması, türdeşlik koordinatının sıfır kılınmasıyla kolayca sağlanır. Fakat $x_4 = 0$ üst düzleminin içinde bulunması, biraz işlem gerektirir. Şimdi bu işlemleri yapalım.

A_0 noktasındaki teğet üst düzlemi yazalım.

$$S_i = S_i(x) = 1/2\ \partial S/\partial x_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4$$
$$x_4 = 0, \qquad -13x_0 + x_1 + 0 + -8x_3 + 11x_4 = 0$$

olur. $x_0 = 0$ ve $x_4 = 0$ üst düzlemlerinin arakesiti üzerinde, keyfi bir nokta alalım. Bu nokta $A_1(0, -3, 2, 1, 1)$ olsun. Birinci koordinatı sıfır olduğundan, $x_0 = 0$ üst düzlemi üzerinde, teğet üst düzlemin denklemini sağladığı için de, $x_4 = 0$ üst düzlemi üzerindedir. A_1 noktasının üst paraboloite göre kutup üst düzlemini bulalım.

$$24x_0 - 16x_1 + 20x_2 + 20x_3 - 10x_4 = 0$$

olur. Hem teğet üst düzlemi içinde ve hem de kutup üst düzlemi içinde olan keyfi bir nokta A_2 noktası olacaktır. Bunun için üstteki teğet üst düzlemle, alttaki kutup üst düzlemi ortak çözülür. Denklem sayısını geçen bilinmeyenler, parametre alınır, çözümden sonra bu parametrelere uygun değeler verilerek, basit sonuçlar bulunması sağlanır. $A_2(0, -30, -29, 10, 10)$ dur. A_2 noktasının içbükey üst paraboloite göre, kutup üst düzlemi bulunur.

$$-5x_0 - 13x_1 + 4x_2 - 94x_3 + 47x_4 = 0$$

A_3 noktası, bu üç üst düzlemin arakesiti olan, doğru üzerinde olacaktır.Bu üç düzlem ortak çözülür. Bir bilinmeyen parametre olarak alınır. $A_3(0, -35, -31.5, 8, 9)$ dur..Programın çıktısında, B matrisi ile verilen sonuç, içbükey üst paraboloitin, normal biçime indirgenmiş matrisidir.

119) $$98 x_1^2 - 196 x_2^2 + 245 x_3^2 + 3920 x_4 = 0 .$$

olur.

V DÖRT BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÜST KUADRİKLER

Üst Küre

Daire ve küre tanımlarını, dört boyutlu uzaya uyarlayalım. Dört boyutlu uzayın, sonsuzundaki üst düzleminde, üst kuadriğin H kuadriği, dört boyutlu uzayın, izotrop kuadriği ile çakışıyorsa, üst kuadrik, **üst küre** adını alır. Üst kuadriğin denklemi, bu tanıma uygun düşecek biçimde düzenlenir. İzotrop kuadrik (101)den,

$$x_0 = 0, \qquad S(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

dir. H kuadriğinin bu kuadrikle çakışması için, katsayıları orantılı olmalıdır. Sıfır olan katsayıların, orantılı olacağı katsayılar da, sıfır olmalıdır.

120) $$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} \neq 0 \qquad a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0,$$

olmalıdır. a_{11} ile bölünürse,

121) $$S(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\, a_{10}/a_{11}\, x_1 + 2\, a_{20}/a_{11}\, x_2 + 2a_{30}/a_{11} x_3 + 2a_{40}/a_{11} x_4 + a_{00}/a_{11} = 0$$

olur. Her iki tarafa uygun terimler eklenerek, tam kareler oluşturulur.

122) $S(x, x) = (x_1 + a_{10}/a_{11})^2 + (x_2 + a_{20}/a_{11})^2 + (x_3 + a_{30}/a_{11})^2 + (x_4 + a_{40}/a_{11})^2 = (a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2 + a_{40}^2 - a_{00}\, a_{11})/a_{11}^2 = 0$

Üst küre matrisinin determinantı, beşinci satıra göre açılırsa,

122) $$\Delta = a_{11}^3 (a_{00}a_{11} - a_{10}^2 - a_{20}^2 - a_{30}^2 - a_{40}^2)$$

bulunur.

123) $S(x, x) = (x_1 + a_{10}/a_{11})^2 + (x_2 + a_{20}/a_{11})^2 + (x_3 + a_{30}/a_{11})^2 + (x_4 + a_{40}/a_{11})^2 = -\Delta/a_{11}^5 = R^2$

olur. Merkez koordinatları olarak,

$$m_1 = -a_{10}/a_{11}, \quad m_2 = -a_{20}/a_{11}, \quad m_3 = -a_{30}/a_{11}, \quad m_4 = -a_{40}/a_{11}$$

konulursa,

124) $$S(x, x) = (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 + (x_4 - m_4)^2 = R^2$$

bulunur. $\Delta > 0$ ise, üst küre sanaldır. $a_{11} = 0$ ise veya (122) de görülen diğer çarpan sıfır ise, üst küre soysuzlaşır.

Üst küre yüzeyi üzerinde bir nokta $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve merkezi $M(m_1, m_2, m_3, m_4)$, yarıçapı da R olsun.

125) $\mathbf{OP} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{OM} = \mathbf{m}, \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{m})^2 = R^2, \qquad \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{m.r} + n = 0$

Üst kürenin vektörel denklemi elde edilir.

Üst Kürenin Kutbu ve Teğet Üst Düzlemi

A(**a**) ve B(**b**) noktalarından geçen doğru, Öklid uzaylarında barisantrik vektör ile gösterilir.Üst küre ile doğruyu ortak çözelim.

126) $\mathbf{r} = (\lambda\, \mathbf{a} + \mu\, \mathbf{b})/(\lambda + \mu), \qquad [(\lambda\, \mathbf{a} + \mu\, \mathbf{b})/(\lambda + \mu)]^2 - 2\, \mathbf{m}.\, [(\lambda\, \mathbf{a} + \mu\, \mathbf{b})/(\lambda + \mu)] + n = 0$

$$\lambda^2(\mathbf{a}^2 - 2\, \mathbf{m.a} + n) + 2\, \lambda\mu[\mathbf{a.b} - \mathbf{m}\, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + n] + \mu^2(\, \mathbf{b}^2 - 2\, \mathbf{m.b} + n) = 0$$

A ve B noktalarının üst kuadriğe göre harmonik eşlenik olmaları için, λ ve μ parametreleri ters işaretle eşit olmaları, ikinci terimin sıfır olması gereklidir. .

127) $$\mathbf{a.b} - \mathbf{m}\, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + n = 0$$

A noktasına eşlenik olan noktaların yer vektörü, **r** ile gösterilirse,

128) $$\mathbf{a.r} - \mathbf{m}\, (\mathbf{a} + \mathbf{r}) + n = 0, \qquad (\mathbf{a} - \mathbf{m})\, \mathbf{r} - \mathbf{m.a} + n = 0,$$

olur. A noktası üst küre yüzeyi üzerinde ise, (128) teğet üst düzleminin denklemidir. A noktası üst küre üzerinde değilse, (128) A noktasının kutup üst düzlemidir. A noktasını merkeze birleştirn vektör, teğet üst düzleme ve kutup üst düzlemine diktir.

Üst Küre Hüzmesi

İki üst kürenin doğrusal toplamına, **üst küre hüzmesi** denilir.

$S(x, x) = \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{m}.\mathbf{r} + n = 0, \quad S'(x, x) = \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{m}'.\mathbf{r} + n' = 0, \quad S + \lambda S' = 0,$

İki üst kürenin oluşturduğu hüzme, üst kürelerden oluşur.

129) $(1 + \lambda)\,\mathbf{r}^2 - 2\,(\mathbf{m} + \lambda\mathbf{m}')\,\mathbf{r} + n + \lambda n' = 0$

Her iki taraf $1 + \lambda$ ile bölünürse, üst küreler görülür. $\lambda = -1$ ise, birinci terim kalkar, kalan ifade üst düzlemin denklemidir.

130) $-2\,(\mathbf{m} + \lambda\mathbf{m}')\,\mathbf{r} + n + \lambda n' = 0$

r yer vektörü her iki üst küreyi de sağladığından, üst düzlem arakesit üst düzlemidir. Üst küre, uzayın izotrop kuadriğinden geçtiği için, arakesit üst düzlemi de, uzayın kuadriğini keser. İki üst kürenin arakesiti küredir.

Ortogonal Üst Küreler

İki üst kürenin arakesiti üzerinde olan bir noktasındaki teğet üst düzlemleri, dik ise, üst küreler **ortogonaldir** denilir. Bu noktadaki yarıçap vektörler yazılır ve parantez açılırsa,,

$(\mathbf{r} - \mathbf{m})\,(\mathbf{r} - \mathbf{m}') = 0, \qquad \mathbf{r}^2 - (\mathbf{m} + \mathbf{m}')\,\mathbf{r} + \mathbf{m}.\mathbf{m}' = 0$

bulunur. Arakesit üzerindeki noktalar üst kürelerin denklemlerini sağladıklarından,

$S(x, x) = \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{m}.\mathbf{r} + n = 0, \quad S'(x, x) = \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{m}'.\mathbf{r} + n' = 0,$

olur. Önce ortogonallik koşulu ile üst kürelerin denklemlerini taraf, tarafa çıkaralım. Bulunan sonuçları, **r**'li termler yok olacak biçimde, taraf, tarafa toplayalım

131) $2\,\mathbf{m}.\mathbf{m}' = n + n'$

ortogonallik koşulu bulunur. Bu ortogonallik koşulu kullanılarak, iki üst küreye ortogonal olan bir üst küre, bu iki üst kürenin oluşturduğu hüzmenin, bütün üst kürelerine ortogonal olduğu gösterilir. Üst kürelerin ortogonallik koşulları,

132) $2\,\mathbf{m}.\mathbf{m}' = n + n', \qquad 2\,\mathbf{m}.\mathbf{m}'' = n + n''$

olsun. Hüzmenin denklemi (129) dan,

$\mathbf{r}^2 - 2\,(\mathbf{m}' + \lambda\mathbf{m}'')\,\mathbf{r}/(1 + \lambda) + (n' + \lambda n'')/(1 + \lambda) = 0$

olur. Hüzmenin merkezinin yer vektörü ve sabit terimi sırayla,

$\mathbf{m}''' = (\mathbf{m}' + \lambda\mathbf{m}'')/(1 + \lambda), \qquad n''' = (n' + \lambda n'')/(1 + \lambda)$

olur. Bunlar (131) ortogonallik koşulunda yerlerine konulursa,

$2\,\mathbf{m}\,(\mathbf{m}' + \lambda\mathbf{m}'')/(1 + \lambda) = n + (n' + \lambda n'')/(1 + \lambda)$

bulunur. Payın λ'lı terimleri, ayrılır ve paranteze alınırsa, (132) ile verilen hipotez görülür.. .

Üst Kuadriklerin Üst Düzlemsel Kesitleri

Teorem

Sonsuzdaki düzlem üzerinde, izotrop konikle üç ortak noktası olan kuadrik,bir küredir. Üç noktadan ikisi katlı nokta(değme noktası) olabilir..

$x_0 = 0, \qquad D(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$

İzotrop koniği,

$[\,i(\lambda^2 + 1)]^2 + (2\lambda)^2 + (\lambda^2 - 1)^2 = 0, \qquad x_1 : x_2 : x_3 = i(\lambda^2 + 1) : (2\lambda) : (\lambda^2 - 1)$

özdeşliğinden yararlanarak, türdeş olmayan parametre ile, parametreleyelim. Bir kuadrik λ'nın üç farklı değeri için, D izotrop koniği ile, ortak noktada olsun.

$S(x, x) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2\,a_{12} x_1 x_2 + 2\,a_{13} x_1 x_3 + 2\,a_{23} x_2 x_3 = 0$

kuadriği ile, D izotrop koniğinin arakesit noktalarını bulalım. $\lambda = 1$ olsun

$-4\,a_{11} + 4\,a_{22} + a_{33}.0 + 2\,a_{12}.4i + 2\,a_{13}.0 + 2\,a_{23}.0 = -4\,a_{11} + 4\,a_{22} = 0, \; a_{12} = 0, \; a_{11} = a_{22}$

Eşitliğin sağlanması için, sanal terimin sıfır olması gerekir. $\lambda = 2$ olsun.

$-25\,a_{11} + 16\,a_{22} + 9\,a_{33} + 40\,a_{12}\,i + 30\,a_{13}\,i + 24\,a_{23} = 0, \; -9\,a_{11} + 9\,a_{33} + 24\,a_{23} = 0, \; a_{13} = 0$

Katsayılar aralarında ve λ'ya göre, bağımsız olduklarından, sanal terimler sıfır olmalıdır.

$\lambda = 3$ olsun.

$-100\,a_{11} + 36\,a_{22} + 64\,a_{33} + 120\,a_{12}\,i + 160\,a_{13}\,i + 96\,a_{23} = 0, \; -64\,a_{11} + 64\,a_{33} + 96\,a_{23} = 0,$

İkinci ve üçüncü denklemlerin sonuçlarında, birinci ve ikinci terimlerin katsayıları bire indirgenir ve taraf, tarafa çıkarılırsa, $a_{23} = 0$ bulunur. Geri kalan ifadede $a_{11} = a_{33}$ olur. Kuadrik küredir. Bu sonuç, dört boyutlu uzayda bir eksen etrafında dönmenin, küresel bir hareket olduğunu kanıtlar.

Öklid düzlemi üç izotrop nokta ile belirlenir. Bunlar $J_1(0, 1, i)$, $J_2(0, 1, -i)$, $O(1, 0, 0)$ noktalarıdır. Başlangıç izotrop noktadır. Çünkü, izotrop doğrular başlangıçtan geçerler. Sonsuzdaki doğru izotrop doğrudur. Çünkü izotrop noktaları birleştiren doğrudur. Uzay dört izotrop nokta ile belirlenir. Buradan çıkan sonuç, izotrop konik, üç izotrop noktanın karşılığıdır. Burada düzlemin izotrop noktalarına, uzayın $Z(0, 1, 1, 1)$ noktası katılarak, göreceli uzayı tanımlandı. Göreceli uzayın izotrop koordinatları ile, Merkür gezegeninin günberi noktasının ilerlemesi hesaplandı. Ayrıntılar Karmaşık Sayılar kitabımdadır.

Bir üst kuadrik, sonsuzdaki üst düzlemde, izotrop kuadrikle kesişsin. Arakesit eğrisi üzerinde üç keyfi nokta alalım. Üç noktadan sonsuz tane üst düzlem geçer. Çünkü iki üst düzlemin arakesiti, bir düzlemdir. Bu üst düzlemler paraleldirler. Bu üst düzlemlerin, kuadrikle kesitleri kürelerdir. İzotrop kuadrikle en az üç ortak noktası olan kuadriklerin, üst düzlemlerle, küre kesitleri vardır.

Üst kuadriklerin küresel üst düzlem kesitleri, $H(x, x)$ kuadriği ve $D(x, x)$ izotrop kuadriğinin oluşturduğu hüzmenin, soysuzlaşmış kuadrikleri ile bulunurlar.

133) $H(x, x) - \nu D(x, x) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{24} x_2 x_4 + 2 a_{34} x_3 x_4 - \nu(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 0$

Sözü edilen kesitler, hüzmenin elemanları olan kuadriklerin matrislerinin, öz değerleri ile belirlenirler. (133) hüzmesinde, parametre negatif işaretle alınmıştır. Bu konuda bilgisayarın öz değerleri ve öz vektörleri bulan, hazır programı vardır. Bundan yararlanmak için, parametre negatif işaretle alınmıştır. Sonuçta yalnız öz değerler işaret değiştirir, öz vektörler değişmez.

134)
$$\begin{matrix} a_{11}-\nu & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\nu & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\nu & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\nu \end{matrix}$$
$$= \nu^4 - \nu^3 \sum_{i,j=1}^{4} aij + \nu^2 \sum_{ij} Aij,ij - \nu \sum_{i=1}^{4} Aii + \Delta = 0$$

Dört tane öz değer bulunacaktır. Bir kök ν_1 ise, $H - \nu_1 D = 0$ denklemi, (133) hüzmesinin, iki üst düzleme soysuzlaşmış bir kuadriğini gösterir. Bu üst düzlemlere paralel olan, üst düzlem kesitleri, küreseldirler. Bu kuadriklerin dört farklı doğrultuda küresel kesitleri vardır.

Dönel Üst Kuadrik Yüzeyler

H kuadriği ve D izotrop kuadriği, bir düzlemsel eğri boyunca teğet olabilirler. Bu halde üst kuadrik, **üst dönel kuadrik** adını alır. Bu eğrinin düz
leminden, sonsuz tane birbirine paralel üst düzlem geçer. Arakesit eğrisinin düzlemi, Q düzlemi olsun. Q düzleminden geçen üst düzlemler ile, üst kuadriğin kesitleri küreseldirler. Sözü geçen Q düzleminin, kuadriklerden birine göre kutbu, bir P_1 noktası olsun. Q düzlemi üzerinde, keyfi bir P_2 ve hem P_2'nin kutup düzlemi ve hem de Q düzlemi üzerinde, bir nokta P_3, P_3'ün kutup düzlemi ile, diğer iki düzlemin ortak noktası da, P_4 olsun. $P_1P_2P_3P_4$ dörtyüzlüsü, iki kuadriğin ortak kutupsal dörtyüzlüsüdür. P_1 noktası, paralel üst düzlemlerin normallerinin, sonsuzdaki üst düzlemi deldiği noktadır. Bu noktayı başlangıca (merkeze) birleştiren doğru, Q düzleminin kutup doğrusudur ve dönel üst kuadriğin, dönme eksenidir. Uzayda bir eksen etrafında dönme, dairesel bir harekettir; dört boyutlu uzayda, bir eksen etrafında dönme, küresel bir harekettir. Sözü edilen eksen, dönme eksenidir. Bu eksen etrafında dönme ile, üst kuadriğin bütün noktaları, kesit küresini, dönme ekseni üzerindeki, sabit nokta merkez olacak biçimde, küreleri oluştururlar..

Üst Kuadriklerin Esas Eksenlerine İndirgenmeleri

Yukarda üst kuadriklerin, küresel üst düzlem kesitlerini H ve D kuadriklerinin hüzmesinin Soysuzlaştığı, öz değerlerle bulduk. H ve D kuadriklerinin hüzmesinde, ortak kutupsal dörtyüzlünün köşeleri, hem H kuadriğine göre ve hem de, D izotrop kuadriğe göre, harmonik eşleniktirler. Bu noktalar, birinci halde eşlenik çap doğrultularını, ikinci halde ise, birbirlerine dik, çaplar kümesini oluştururlar. Bu çaplara üst kuadriğin **esas eksenleri** denilir. Hüzme, üst kuadrikleri, kutupsal dörtyüzlünün köşe noktalarında, üst düzlem çiftlerine soysuzlaşırlar. Kutupsal dörtyüzlünün köşe noktalarının doğrultuları, hüzmenin matrisinin öz vektörlerinin doğrultularıdır. Hüzmenin matrisi (134) de verildi. Dört tane öz değer ve dört tane öz vektör gelecektir. Bir üst kuadriğin dört tane esas ekseni vardır. Bu doğrultular koordinat eksenleri olarak alınırsa, üst kuadriğin denklemi,

135) $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 1, \quad \alpha_1 x_1^2 - \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 + \alpha_4 x_4^2 = 1,$

olur. Birincisi üst elipsoit, ikincisi üst içbükey hiperboloittir.

Örnek 1:

$S(x, x) = -1 + 3x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 + 7x_4^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_1x_4 + 18x_2x_3 + 14x_2x_4 - 4x_3x_4 + 8x1 + 16x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0,$

Üst kuadriğinin esas eksen doğrultularını bulunuz ve normal biçime indirgeyiniz.

Matlab programı:

```
a1 = [– 1; 4; 8;  – 4;1]; a2 = [4; 3; – 6; 3; – 4]; a3 = [8; – 6; 7; 9; 7];
a4 = [– 4; 3; 9; 5; – 2];    a5 = [1; – 4; 7; – 2; 7] ; M = [a1  a2  a3  a4  a5];
b1 = [4; 8; –4; 1]; b2 = [3; –6; 3; – 4]; b3 = [– 6; 7; 9; 7]; b4 = [3; 9; 5; – 2];
b5 = [– 4; 7; – 2; 7]; B00 = [b2  b3  b4  b5];  B01 = [b1  b3  b4  b5];  B02 = [b1  b2  b4  b5];
B03 = [b1  b2  b3  b5];  B04 = [b1  b2  b3  b4];  A00 = det(B00);  A01 = –det(B01);
A02 = det(B02);  A03 = – det(B03);  A04 = det(B04);  B0 = [A00;A01;A02;A03;A04];
ds = sqrt(B0’*B0);  A0 = B0/ds;  A1 = [0; 1; 0; 0; 0]; A2 = [0; 0; 1; 0; 0]; A3 = [0; 0; 0; 1; 0];
A4 = [0; 0; 0; 0; 1];  T = [A0  A1  A2  A3  A4];  MF = T’*(M*T);  [x, y] = eig(B00);
A1 = [0; x(1,1); x(2,1); x(3,1); x(4,1)];  A2 = [0; x(1, 2); x(2, 2); x(3, 2); x(4, 2)];
A3 = [0; x(1, 3); x(2, 3); x(3, 3); x(4, 3)];  A4 = [0; x(1, 4); x(2, 4); x(3, 4); x(4, 4)];
A0 = [1; 0; 0; 0; 0];  TS= [ A0  A1  A2  A3  A4];  ME = TS’*(MF*TS)/MF(1,1);  ME,
```

Önce üst kuadriğin merkezi başlangıç yapıldı, MF matrisi bulundu. Sonra eig(B00) komutuyla gelen x matrisinin sütun matrisleri ile, esas eksen doğrultularını belirleyen, öz vektörlerin oluşturduğu, ortogonal dönüşüm matrisi ile, üst kuadrik dönüştürüldü..ME matrisi bulundu. B00 matrisi a_{00} elemanının minörü, yani H kuadriğinin matrisidir. a_{00} elemanı , 1'e indirgendikten sonra, öz değerler :$\nu_1 = -33.6941$, $\nu_2 = 3.5516$, $\nu_3 = 44.1799$, $\nu_4 = 79.1223$, öz vektörlerin bileşenleri: $\mathbf{u}_1 = [0.4145, 0.6437, -0.5846, -0.2686]$, $\mathbf{u}_2 = [0.7386, -0.1345, 0.740, 0.6564]$, $\mathbf{u}_3 = [0.4077, 0.51977, 0.7371, -0.5013]$, $\mathbf{u}_4 = [0.3412, -0.7269, -0.3308, -0.4957]$ olur. x matrisinin sütun matrisleridir.

$S(x', x') = 33.6941x'^2_1 - 3.5516\, x'^2_2 - 44.1799\, x'^2_3 - 79.1223\, x'^2_4 = 1$

Bulunan üst kuadrikte, bütün terimler + 1'in karşı tarafına alınırsa, üç tane negatif terim gelmiştir. İkinci tür içbükey üst kuadriktir..

Örnek 2:

$S(x, x) = -1 + 3x_1^2 + 7x_2^2 - 5x_3^2 + 7x_4^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_1x_4 + 18x_2x_3 + 14x_2x_4 - 4x_3x_4 + 8x1 + 16x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0,$

Örnek, yukardakinden yalnız x_3^2 nin katsayısı farklı işarette alınmıştır. Üst kuadriğin esas eksen doğrultularını bulunuz ve normal biçime indirgeyiniz. Matlab programı:

```
a1 = [– 1; 4; 8; – 4; 1]; a2 = [4; 3; – 6; 3; – 4]; a3 = [8; – 6;7;9;7]; a4 = [– 4;3;9; –5; – 2];
a5 = [1; – 4; 7; – 2; 7] ; M = [a1  a2  a3  a4  a5];  b1 = [4; 8; –4; 1]; b2 = [3; –6; 3; – 4]; b3 =
[– 6; 7; 9; 7]; b4 = [3; 9; – 5; – 2];  b5 = [– 4; 7; – 2; 7]; B00 = [b2  b3  b4  b5];  B01 = [b1  b3
b4  b5];  B02 = [b1  b2  b4  b5]; B03 = [b1  b2  b3  b5];  B04 = [b1  b2  b3  b4];  A00 =
det(B00);  A01 = –det(B01);  A02 = det(B02);  A03 = – det(B03);  A04 = det(B04);
```

B0 = [A00; A01; A02; A03; A04]; ds = sqrt(B0'*B0); A0 = B0/ds; A1 = [0; 1; 0; 0; 0];
A2 = [0; 0; 1; 0; 0]; A3 = [0; 0; 0; 1; 0]; A4 = [0; 0; 0; 0; 1]; T = [A0 A1 A2 A3 A4];
MF = T'*(M*T); [x, y] = eig(B00); A1 = [0; x(1,1); x(2,1); x(3,1); x(4,1)];
A2 = [0; x(1, 2); x(2, 2); x(3, 2); x(4, 2)]; A3 = [0; x(1, 3); x(2, 3); x(3, 3); x(4, 3)];
A4 = [0; x(1, 4); x(2, 4); x(3, 4); x(4, 4)]; A0 = [1; 0; 0; 0; 0]; TS= [A0 A1 A2 A3 A4];
ME = TS'*(MF*TS)/MF(1,1); ME,

Öz değerler : $\nu_1 = 24.2402$, $\nu_2 = -1.4689$, $\nu_3 = -11.1126$, $\nu_4 = -34.6262$,

Öz vektörlerin bileşenleri: $\mathbf{u}_1 = [0.2952,\ 0.5179,\ -0.7767,\ -0.2033]$,
$\mathbf{u}_2 = [0.7854,\ -0.0653,\ 0.0958,\ 0.6081]$, $\mathbf{u}_3 = [-0.3748,\ -0.4746,\ -0.5969\ \ 0.5272]$,
$\mathbf{u}_4 = [-0.3944,\ 0.7087,\ 0.1767,\ 0.5577]$, olur.

$S(x', x') = -24.2402\, x'^2_1 + 1.4689\, x'^2_2 + 11.1126\, x'^2_3 + 34.6262\, x'^2_4 = 1$

Verilen üst kuadrik, +1'in karşı tarafına alınırsa, bir tane – işaret gelmiştir. Birinci tür içbükey üst kuadrik veya bir parçalı üst hiperboloittir.

Paraboloitlerin Esas Eksenlerine İndirgenmeleri

Paraboloitlerin esas eksenlerinin, doğuranların yardımı ile bulunduğunu Prof. Dr Macit Bükenin kitabı yazmaktadır..Fakat bir örnek vermemiştir. Üst kuadriklerde doğuranlar vardır, fakat bunlar doğrular ve düzlemler değildirler. Parametrelerin çok uzun ve çok karışık fonksiyonlarıdır. Paraboloitlerin esas eksenleri, burada klasik Analitik Geometri yöntemi ile bulunacaktır..Üst paraboloitlerin esas eksenlerinin de, klasik Analitik Geometri yöntemi ile bulunması önerilecektir. Bu amaçla, klasik Analitik Geometri yönteminin ortaya konulmasını, bir paraboloit üzerinde görelim..

Örnek:

$S(x, x) = 20/9\, x_1^2 + 29/9\, x_2^2 - 4/9\, x_3^2 - 20/9\, x_2x_3 - 56/9\, x_3x_1 + 76/9\, x_1x_2 + 34\, x_1 + 14\, x_2 + 3 = 0$

Paraboloitini esas eksenlerine indirgeyiniz.

a1 = [1;1; –1; 1]; a2 = [0; 2; 2; –1]/3; a3 = [0; 2; –1; 2]/3; a4 = [0; –1; 2; 2]/3; T = [a1 a2 a3 a4]; b1= [0; 0; 0; –1]; b2 = [0; 8; 0; 0]; b3 = [0; 0; –3; 0]; b4 = [–1; 0; 0; 0]; M = [b1 b2 b3 b4]; a = T'*(M*T); c0 = [a(2,1); a(3,1); a(4,1)]; c1 = [a(2, 2); a(3, 2); a(4, 2)]; c2 = [a(2, 3); a(3,3); a(4, 3)]; c3 = [a(2, 4); a(3, 4); a(4, 4)]; B00 = [c1 c2 c3]; B01 = [c0 c2 c3];
B02 = [c0 c1 ,c3]; B03 = [c0 c1 c2]; A00 = det(B00); A01 = –det(B01); A02 = det(B02);
A03 = – det(B03); p0 = a(2, 1)*A02 – a(3, 1)*A01; p1 = a(2, 2)*A02 – a(3, 2)*A01;
p2 = a(2, 3)*A02 – a(3, 3)*A01; p3 = a(2, 4)*A02 – a(3, 4)*A01; r0 = a(2, 1)*A03 – a(4, 1)*A01; r1 = a(2, 2)*A03 – a(4, 2)*A01; r2 = a(2, 3)*A03 – a(4, 3)*A01; r3 = a(2,4)*A03 – a(4, 4)*A01; n0 = 35; n1 = 72; n2 = 54; n3 = 95; p = [p1; r1; n1]; r = [p2; r2; n2]; n = [p3; r3; n3]; g1 = [p r n]; b = [–p0; –r0; n0]; y = inv(g1)*b; t = [A01 A02 A03];
f = t*(B00*t') ; g = 2*(t*(B00*y) + a(1, 2)*t(1) + a(1, 3)*t(2) + a(1, 4)*t(3));
h = y'*(B00*y) + 2*(a(1, 2)*y(1) + a(1, 3)*y(2) + a(1, 4)*y(3)) + a(1,1);
for j = 1:3 as(j) = y(j) – (h/g)*t(j); end
A0 = [1 as(1) as(2) as(3)]; A1= [0;1;0;0;];A2 = [0;0;1;0]; A3 = [0;0;0;1];
TS = [A0' A1 A2 A3];u = TS'*(a*TS); A0 = [1;0;0;0]; df = u*A0; n = df(2);
p = df(3); q = df(4); d1 = – u(2,2)*q + 2*u(2,4)*n – u(4,4)*n^2/q,
d2 = – u(2,3)*q + u(2,4)*p + u(4,3)*n – u(4,4)*p*n/q, d3 = –u(4,2)*p – u(3,4)*n + u(3,2)*q + u(4,4)*n*p/q, d4 = u(3,3)*q – 2*u(3,4)*p + u(4,4)*p^2/q,
d5 = – u(3,2)*n + u(2,2)*p + u(4,3)*n^2/q – u(2,4)*p*n/q, d6 = u(3,2)*p – u(3,3)*n + u(3,4)*p*n/q – u(2,4)*p^2/q, s = d2*q – d6*p; r = d4*q + d1*q – d6*n – d5*p;
k = d3*q – d5*n, v = (– r – sqrt(r^2 – 4*s*k))/(2*s); A1 = [0; q; q*v; (– n – p*v)];
A2 = [0;(d3 + v*d4); (d1 + v*d2); (d5 + v*d6)]; dn = sqrt(A1'*A1); A1 = A!/dn;
dn = sqrt(A2'*A2); A2 = A2/dn; A3 = [0; A01; A02; A03]; dn = Sqrt(A3'*A3);
A3 = A3/dn; TB = [A0 A1 A2 A3]; TG = TB'*(u*TB); TG = TG/(1,4),

$8\, x_1^2 - 3\, x_2^2 = 2\, x_3$ İçbükey Paraboloit

. Örnek olarak verilen paraboloit, a matrisi ile verilen paraboloittir. Asıl paraboloitin T ortogonal matrisi ile dönüşmüşüdür. Asıl paraboloit, M matrisi ile verilen paraboloit olup, sonuçta bulunan paraboloittir. T ortogonal matrisi, sonsuzdaki düzlemi koruyan bir matris olarak düzenlenmiştir. Bu dönüşümle paraboloit, herhangi bir kuadrik konumuna gelmemiştir. Amacım başlangıçta alınan paraboloitin, sonuçta çıktığını, yani sağlamasını görmektir. a matrisi ile bir başka paraboloit alınabilir. İstenilen sonuç bulunmuyorsa, sondan dördüncü satırda, v değişkeni ile verilen, ikinci derece denkleminin, diğer kökü alınmalıdır. İkinci ve üçüncü satırlar, a matrisinin yazılmasıdır. c_i dizisi, birinci satırın minörlerinin sütun matrisleridir. Sonra gelen p ve r dizileri, $S_i(t)$ teğet düzlemin koordinatları olmak üzere,

136) $$S_1(t)/A_{01} = S_2(t)/A_{02} = S_3(t)/A_{03}$$

teğet düzlemin normal vektörünün, paraboloitin esas eksenine, paralel olması için, tepe noktasındaki teğet düzleme dik olması için, orantılılık koşuludur. İçler dışlar çarpımı yapılmış, sıfıra eşitlenmiş, p ve r dizileri oluşturulmuştur. p ve r dizileri, paraboloitin esas ekseninden geçen, çap düzlemlerinin koordinat dizileridir. Bu iki düzlemin arakesiti, parboloitin esas eksenidir. Bu eksen üzerinde herhangi bir nokta, eksen denklemi için, başlangıç noktası olarak alınacaktır. n dizisi, keyfi seçilmiş başlangıç noktasını belirleyen düzlemin koordinat dizisidir. Bu üç düzlemin arakesiti, eksen denkleminin başlangıç noktasıdır. **y** üç düzlemin kesim noktasının, başlangıç noktasının yer vektörüdür.

136) $$\mathbf{t} = A_{01}\mathbf{i} + A_{02}\,\mathbf{j} + A_{03}\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{y} + \lambda\mathbf{t}$$

λ'nın katsayısı olan **t** vektörü, esas eksen doğrultusunda olan vektör ve **y** de, esas eksen üzerinde bir noktanın yer vektörüdür. Esas eksenin denklemi ile paraboloit, ortak çözülmüştür. f, ortak çözümden gelen λ^2 nin katsayısı, g, λ'nın katsayısı ve h da, sabit terimdir. f = 0 dır. Çünkü ikinci derece denkleminin bir kökü sonsuzsa, f = 0 olur. İkinci derece denklemi $g\lambda + h = 0$ olmuştur. λ çözümü, as = – h/g*$\mathbf{t}$ dizisi ile verilmiştir.. as dizisi ile bulunan ifade, türdeş koordinatlara dönüştürülmüş ve paraboloitin A_0 tepe noktası olmuştur. A_0'*(a*A_0) ifadesinin sıfır olmasından, A_0'ın paraboloit üzerinde olduğu anlaşılır. df = a*A_0, sütun matris olup, A_0 tepe noktasındaki teğet düzlemin koordinat matrisidir. A_0 başlangıç olacak biçimde, dönüşüm yapılmıştır. Paraboloitin yeni matrisi u'dur. Yardımcı değişkenler atayalım..

$$m = u(1,1),\ \ n = u(2, 1),\ \ p = u(3, 1),\ \ q = u(4, 1),$$

A_0 tepe noktasının koordinatları, dönüşümden sonra, $A_0(1, 0, 0, 0)$ olacaktır. Yeni değişkenler, sıra ile A_0 noktasındaki teğet düzlemin koordinatlarıdır. $A_1(0, 1, \lambda, x)$, $A_2(0, 1, y, z)$ olsunlar. Bu noktaların, paraboloite göre eşlenik olmaları için, A_0 daki teğet düzlem içinde ve A_2 , A_1'in kutup düzlemi içinde olmalıdırlar.

$$a(A_0, A_1) = 0, \qquad a(A_0, A_2) = 0, \qquad a(A_1, A_2) = 0, \qquad (A_1{}'{*}A_2) = 0$$

$$m.0 + n + p\lambda + qx = 0, \qquad x = (-n - p\lambda)/q, \qquad m.0 + n + py + qz = 0,$$

A_1 noktasının kutup düzleminin koordinatları, g = u*A_1; matrisi ile verilir.. u(i, j) matris elemanları, u_{ij} ile ve g'nin satır elemanları da, r dizisi ile gösterilirse,

$r_1 = u_{11}{*}A_1(1) + u_{12}{*}A_1(2) + \lambda\, u_{13}{*}A_1(3) + u_{14}{*}A_1(4)$, $r_2 = u_{21}{*}A_1(1) + u_{22}{*}A_1(2) + \lambda u_{23}{*}A_1(3) + u_{24}{*}A_1(4)$, $r_3 = u_{31}{*}A_1(1) + u_{32}{*}A_1(2) + \lambda\, u_{33}{*}A_1(3) + u_{34}{*}A_1(4)$, $r_4 = u_{41}{*}A_1(1) + u_{42}{*}A_1(2) + \lambda\, u_{43}{*}A_1(3) + u_{44}{*}A_1(4)$,

olur. λ A_1 noktasının koordinatı olmasına rağmen, belirginleşmesi ve sonra gelecek diklik koşuluna aktarılması için, ayrı yazılmıştır

$$r_2 + r_3 y + r_4 z = 0, \qquad n + py + qz = 0,$$

olup, son iki denklemden, y, z bilinmeyenleri çözülür, yalnız bilinmeyen λ kalır. Çözüm,

$$y = (nr_4 - qr_2)/(qr_3 - pr_4), \qquad z = (pr_2 - nr_3)/(qr_3 - pr_4),$$

dır. r dizisi, son ifadede yerlerine konulursa,

$$d_1 = 2.u_{42}\, n - u_{44}\, n^2/q - u_{22}\, q, \quad d_2 = u_{43}\, n - u_{44}\, pn/q - u_{23}\, q + u_{24}\, p,$$

$$d_3 = u_{32}\, q - u_{34}\, n - u_{42}\, p + u_{44}\, pn/q, \quad d_4 = u_{33}\, q - 2.u_{34}\, p + u_{44}\, p^2/q,$$

$$d_5 = u_{22}\, p - u_{24}\, pn/q - u_{32}\, n + u_{34}\, n^2/q, \quad d_6 = u_{23}\, p - u_{24}\, p^2/q - u_{33}\, n + u_{34}\, pn/q,$$

değişkenleri ile,

$$x = (-n - p\lambda)/q, \qquad y = (d_1 + \lambda d_2)/(d_5 + \lambda d_6), \qquad z = (d_3 + \lambda d_4)/(d_5 + \lambda d_6),$$

$$A_1(0, q, q\lambda, -n - p\lambda), \qquad A_2(0, d_3 + \lambda d_4, d_1 + \lambda d_2, d_5 + \lambda d_6),$$

bulunur, A_1 ve A_2 doğrultularının dik olmalarını istiyoruz. Bu noktalar sonsuzda oldukları için, birinci koordinatın dışında olan koordinatlar, doğrultu vektörlerinin bileşenleridir. TS matrisi ile paraboloitin a matrisi, u matrisine dönüştürülmüştür. Bu dönüşümde yalnız A_0 tepe noktası yer değiştirmiş ve başlangıç olmuş, koordinat eksenleri doğrultularnı, değiştirmemiş olduklarından, koordinat sisteminin karteziyen olması bozulmamıştır. A_1 ve A_2'nin iç çarpımı yapılırsa,

$$(d_3 + \lambda d_4) q + (d_1 + \lambda d_2) q\lambda + (d_5 + \lambda d_6)(-n - p\lambda) = 0,$$

$$f = d_2q - d_6p, \qquad g = d_4q + d_1q - d_6n - d_5p, \qquad h = qd_3 - nd_5, \qquad f\lambda^2 + g\lambda + h = 0,$$

λ çözülür. A_1 ve A_2 temel noktaları bulunur. $A_3(0, A_{01}, A_{02}, A_{03})$ dür. Yeni konuma, ortogonal matris oluşturularak geçilir.

Üst paraboloitler de, aynı yöntemle esas eksenlerine indirgenir. Ancak işlemler çok uzundur. 9 denklem ve 9 bilinmeyen gelmektedir.. Denklemin 3 tanesi, ikinci derecedendir. Bu nedenle uğraşmayı gereksiz gördüm.